Abiturprüfung 2009

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{x}{k + x^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

3 a) Untersuchen Sie G_k auf Symmetrie und geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

7 b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_k. Die Hochpunkte von G_k bilden den Graphen einer Funktion h. Ermitteln Sie Funktionsterm und Definitionsmenge von h.

[Teilergebnis: Hochpunkt bei $x = \sqrt{k}$]

3 c) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Graphen der Schar nur den Koordinatenursprung gemeinsam haben.

5 d) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen G_k für $k = 0{,}25$ und $k = 1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm). Zeichnen Sie auch den Graphen von h ein.

7 e) Für jedes k begrenzt G_k mit der x-Achse im I. Quadranten ein Flächenstück, das sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück keinen endlichen Inhalt besitzt.
Für beliebige positive k_1, k_2 $(k_1 \neq k_2)$ begrenzen G_{k_1} und G_{k_2} im I. Quadranten ein Flächenstück, das sich ebenfalls ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück einen endlichen Inhalt hat, und geben Sie diesen an.

5 2. Nun wird die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{x}{k + x^2}$ für $k \in \mathbb{R}_0^-$ betrachtet. Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_k von f_k in Abhängigkeit von k an.
Zeigen Sie, dass an den Definitionslücken Polstellen vorliegen. Hat f_k an den Polstellen einen Vorzeichenwechsel? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4 3. a) Die drei folgenden Abbildungen zeigen Halbkreise mit Radius r und Mittelpunkten $(0\,|\,0)$, $(0\,|\,r)$ und $(r\,|\,0)$. Begründen Sie, dass der Halbkreis in Bild 1 Graph der Funktion $f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $-r \leq x \leq r$ ist. Die Halbkreise der Bilder 2 und 3 sind Graphen der Funktionen f_2 und f_3. Geben Sie jeweils Term und Definitionsmenge für f_2 und f_3 an.

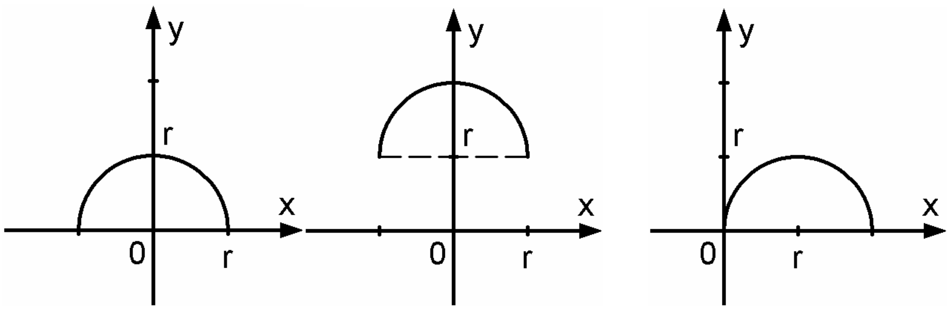
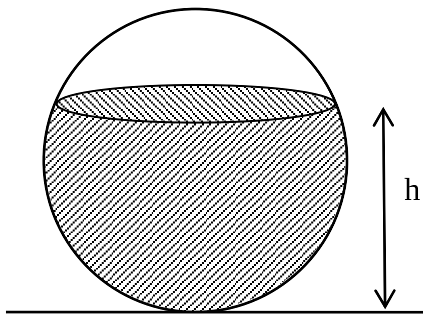


Bild 1 Bild 2 Bild 3

6 b) Ein kugelförmiger Tank hat den Innenradius r und ist mit einer Flüssigkeit gefüllt. Die Höhe der eingefüllten Flüssigkeit ist h. Zeigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung, dass für das Volumen V der eingefüllten Flüssigkeit gilt:
$V = \pi(rh^2 - \frac{1}{3}h^3)$.

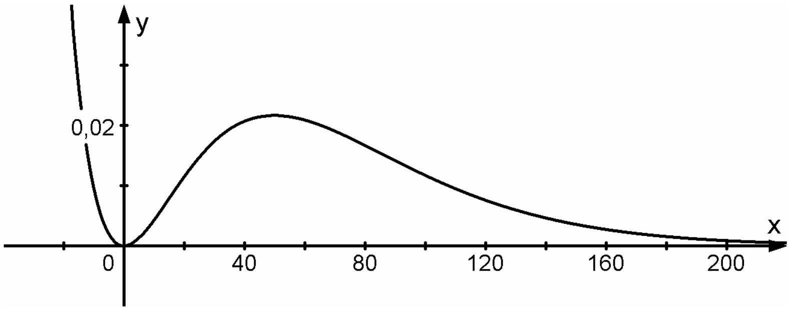


40

BE

II.

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto a^3 x^2 e^{-ax}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Die Abbildung zeigt G_a für $a = 0{,}04$.



3 1. a) Untersuchen Sie am Funktionsterm das Verhalten von f_a für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$. Begründen Sie, dass G_a nie unterhalb der x-Achse verläuft.

7 b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_a.

[Zur Kontrolle: Tiefpunkt bei $x = 0$ und Hochpunkt bei $x = \frac{2}{a}$]

2. Nun werden die in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktionen $F_a : x \mapsto \int_0^x f_a(t)dt$ betrachtet.

4 a) Begründen Sie ohne Ausführung der Integration, dass der Graph von F_a für alle $a \in \mathbb{R}^+$ durch den Koordinatenursprung verläuft und dort einen Terrassenpunkt besitzt.

10 b) Berechnen Sie durch partielle Integration einen integralfreien Term für F_a. Geben Sie den Grenzwert von F_a für $x \to +\infty$ an und interpretieren Sie das Ergebnis am Graphen G_a.

[Teilergebnis: $F_a(x) = 2 - e^{-ax} \cdot (a^2 x^2 + 2ax + 2)$]

6 c) Nun sei $a = 0{,}04$. Der Graph der Funktion $F_{0,04}$ besitzt für $x > 0$ einen Wendepunkt W. Bestimmen Sie die Koordinaten von W.
Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von $F_{0,04}$ im Bereich $-30 \le x \le 200$ in ein Koordinatensystem (x-Achse: 50 LE $\hat{=}$ 2,5 cm, y-Achse: 1 LE $\hat{=}$ 2,5 cm). Verwenden Sie dazu ohne Nachweis: $F_{0,04}(-30) \approx -1{,}45$ und $F_{0,04}(200) \approx 1{,}97$.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Die Gruppe „Die toten Rosen“ gibt ein Konzert. Es beginnt um 20 Uhr, der Einlass wird ab 18 Uhr gewährt. Der Besucherzustrom soll durch eine Funktion g der Form $g(x) = k \cdot f_a(x)$ mit geeignetem a und geeignetem $k > 0$ modelliert werden. Dabei bedeutet x die seit 18 Uhr vergangene Zeit in Minuten. $g(x)$ gibt die momentane Zunahme der Besucherzahl in Besucher pro Minute an.

5 a) Bestimmen Sie die Parameter a und k, wenn das Maximum der Funktion g um 18.50 Uhr auftritt und 26 Besucher pro Minute beträgt.

5 b) Berechnen Sie für $a = 0{,}04$ und $k = 1200$ unter Verwendung des in Teilaufgabe 2b ermittelten Terms $F_a(x)$ das Integral $\int_0^{120} g(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Anwendungszusammenhang.

40

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

Eine kleine Pension mit 5 Gästezimmern im ersten Stock und 4 weiteren im zweiten Stock wird renoviert. Die individuell gestalteten Zimmer unterscheiden sich durch Lage, Größe und Ausstattung.

1. Für die Bäderrenovierung der Gästezimmer bestellt der Pensionsinhaber 2500 Fliesen. Aus Kostengründen entscheidet er sich für Fliesen II. Wahl, wobei der Verkäufer versichert, dass höchstens 10 % derartiger Fliesen fehlerhaft sind. Die Fliesen werden in Kartons zu je 50 Stück geliefert.

3 a) Der Pensionsinhaber ist gegenüber der 10%-Angabe skeptisch und vereinbart daher mit dem Verkäufer: Ein Karton aus der Lieferung wird zufällig ausgewählt und sein Inhalt geprüft. Wenn mehr als 5 Fliesen fehlerhaft sind, wird die Annahme der Lieferung verweigert, ansonsten akzeptiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Lieferung angenommen, obwohl im Mittel 15 % der Fliesen fehlerhaft sind?

4 b) Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Fliese sei p. Wie würde die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn man die Nullhypothese $H_0: p > 0{,}1$ anhand der 50 Fliesen eines Kartons auf dem Signifikanzniveau 5 % testen würde?

Im Folgenden ist die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Fliese 10 %. Verwenden Sie jeweils die Normalverteilung als Näherung.

3 c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 2500 Fliesen höchstens 260 fehlerhaft sind.

7 d) Berechnen Sie die Grenzen eines möglichst kleinen Intervalls symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die Anzahl fehlerhafter Fliesen der gesamten Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % liegt.

2. Nach der Renovierung kommen die ersten 5 Übernachtungsgäste gleichzeitig an: 3 Frauen und 2 Männer. Jeder Gast möchte ein eigenes Zimmer.

5 a) Die Gäste äußern unabhängig voneinander ihren Zimmerwunsch. Die Zimmerwahl ist nicht geglückt, wenn mindestens ein Zimmer mehrfach gewünscht wird. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass die Wahl nicht glückt, wenn nur danach unterschieden wird, wie oft ein Zimmer gewählt wurde?

3 b) Die Gäste einigen sich schließlich darauf, dass die Zimmer der Frauen in einem der beiden Stockwerke liegen und die der Männer im anderen Stockwerk. Wie viele verschiedene Zimmerbelegungen sind möglich, wenn dabei auch nach den einzelnen Personen unterschieden wird?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Eine Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3\}$ und Erwartungswert 1 hat folgende Verteilung:

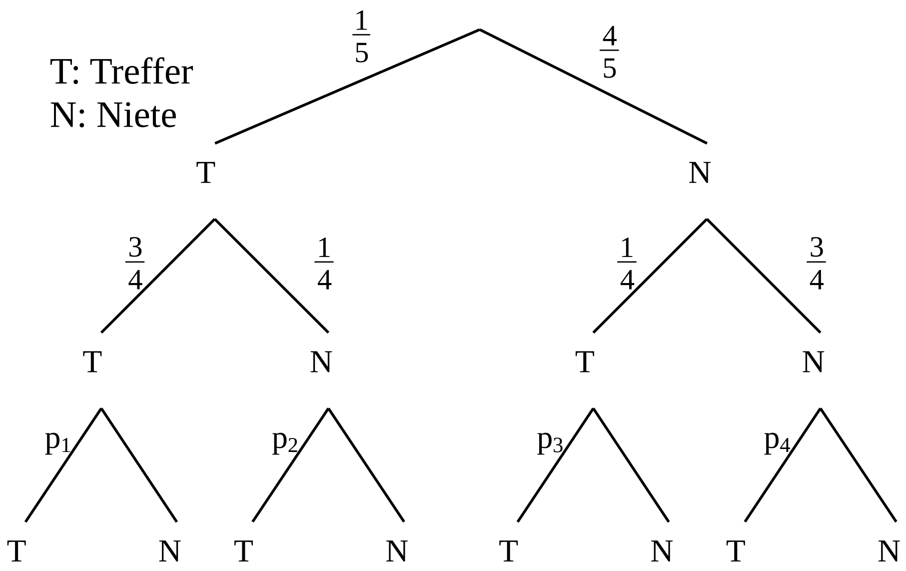
$$P(X = k) = \frac{a - k}{a} \cdot b \text{ mit } k \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ und } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

5 a) Berechnen Sie a und b.

[Ergebnis: $a = 4$; $b = 0{,}4$]

4 b) Begründen Sie, dass X nicht die Anzahl der Treffer einer binomial verteilten Zufallsgröße beschreiben kann.

6 c) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer bei einem dreistufigen Zufallsexperiment an. Dieses Zufallsexperiment wird durch das unten stehende Baumdiagramm beschrieben.
Berechnen Sie p_1 und p_4 und ermitteln Sie je einen möglichen Wert für p_2 und p_3 so, dass sich mit diesen vier Werten die Verteilung der Zufallsgröße X ergibt.



40

BE	**IV.**
	Die folgenden Angaben zum Rauchverhalten beziehen sich auf den Drogen- und Suchtbericht der Bundesregierung aus dem Jahr 2008. Personen, die regelmäßig rauchen, werden unabhängig vom Geschlecht als Raucher bezeichnet. Die anderen Personen werden als Nichtraucher bezeichnet.
	1. Ein Drittel der Erwachsenen in Deutschland sind Raucher.
3	a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 15 zufällig ausgewählten Erwachsenen mehr als die Hälfte Nichtraucher?
5	b) Es werden zufällig nacheinander n Erwachsene befragt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Befragung Raucher und Nichtraucher einander immer abwechseln, werde mit p_n bezeichnet, wobei der erste Befragte Raucher oder Nichtraucher sein kann. Zeigen Sie, dass für eine ungerade Anzahl $n \geq 3$ gilt: $p_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}$.
3	c) Ab welcher Anzahl n ist die Wahrscheinlichkeit p_n aus Teilaufgabe 1b kleiner als ein Milliardstel?
6	2. Im Jahr 2005 waren 20 % der 12- bis 17-jährigen Jugendlichen Raucher. Es wird vermutet, dass durch diverse Kampagnen diese Raucherquote auf 18 % gesenkt werden konnte. Um diese Vermutung zu testen, werden 500 Jugendliche dieser Altersgruppe anonym befragt. Die Nullhypothese „Mindestens 20 % der Jugendlichen sind Raucher“ wird abgelehnt, wenn weniger als 19 % der Befragten regelmäßig rauchen. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Kampagnen so erfolgreich waren wie vermutet, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.
	3. Im Folgenden werden ausschließlich Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I, die die Jahrgangsstufen 5-10 umfasst, betrachtet. Von diesen besuchen in Bayern jeweils 35 % eine Hauptschule beziehungsweise ein Gymnasium. Vereinfachend werde angenommen, dass die Übrigen eine Realschule besuchen. Es soll angenommen werden, dass die folgenden Raucherquoten aus dem Bericht der Bundesregierung auch für Bayern gelten: In der Sekundarstufe I sind insgesamt 16 % Raucher; an Hauptschulen ist die Quote der Raucher mit 24 % mehr als dreimal so hoch wie an Gymnasien mit 7 %.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	a) Wie groß ist die Raucherquote an Realschulen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit besucht ein aus der Sekundarstufe I zufällig ausgewählter Raucher ein Gymnasium? [Teilergebnis: Raucherquote an Realschulen: 17 %]
5	b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besuchen 2 aus der Sekundarstufe I zufällig ausgewählte Personen die gleiche Schulart und mindestens eine der beiden Personen raucht regelmäßig?
5	c) An einem Gymnasium besuchen 800 Schüler die Klassen 5 bis 10, von denen jeder mit einer Wahrscheinlichkeit von 7 % regelmäßig raucht. Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall symmetrisch um den Erwartungswert an, in dem die Zahl der regelmäßigen Raucher der Sekundarstufe I mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % liegt.
4	4. a) An einem Gymnasium werden die 38 Interessenten am Grundkurs Physik, von denen 12 regelmäßig rauchen, auf 2 Kurse mit 18 beziehungsweise 20 Teilnehmern zufällig verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in jedem der beiden Kurse gleich viele Raucher?
3	b) Für die K12 eines Gymnasiums sind im Fach Geschichte 4 Kurse mit jeweils mindestens 20 Teilnehmern eingerichtet worden. Wie viele verschiedene Aufteilungen der 20 Raucher der K12 auf diese 4 Kurse sind prinzipiell möglich, wenn nur zwischen Rauchern und Nichtrauchern unterschieden wird?
40	

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE	V.
	Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A(5\|1\|0)$ und $B(1\|5\|2)$, die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie die Ebenenschar $E_k: kx_1 + x_2 + kx_3 - 11 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.
4	1. a) Es gibt eine Gerade h, die in allen Ebenen der Schar E_k enthalten ist. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h in Parameterform.
6	b) Weisen Sie nach, dass genau eine Ebene der Schar echt parallel zur Geraden g ist. In welcher Lagebeziehung stehen folglich g und h? Begründen Sie Ihre Antwort.
4	2. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A und B in der Ebene E_2 liegen, und bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts C von E_2 mit der Geraden g.
	[Zur Kontrolle: $C(-1\|1\|6)$]
5	b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist, und ermitteln Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
	Das Quadrat ABCD als Grundfläche bildet zusammen mit einem Punkt S als Spitze eine vierseitige Pyramide ABCDS. Der Punkt S liegt dabei auf der Geraden g und ist so gewählt, dass die Pyramide gerade ist, das heißt, der Fußpunkt F der Pyramidenhöhe ist gleichzeitig der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats.
4	c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte F und S.
	[Zur Kontrolle: $S(6\|3\|7)$]
6	d) Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide sowie den Inhalt ihrer Oberfläche.
7	e) K sei die Kugel, auf der alle Ecken der Pyramide ABCDS liegen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M und den Radius r der Kugel K und zeigen Sie, dass M im Inneren der Pyramide liegt.
4	f) Betrachtet werden nun eine gerade Pyramide mit dem Quadrat ABCD als Grundfläche und der Höhe $h' > 0$ sowie die Kugel durch die Ecken dieser Pyramide. Für welche Werte von h' liegt der Mittelpunkt dieser Kugel außerhalb der Pyramide?
40	

BE	**VI.**
	Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ die Ebene F, die parallel zur x_3-Achse ist und die Punkte $A(-2\,|\,1{,}5\,|\,6)$ und $B(0\,|\,3\,|\,0)$ enthält, sowie die Ebenenschar $E_a: 2x_1 + 2x_2 + x_3 - a = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.
4	a) Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform. [Zur Kontrolle: $F: 3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$]
4	b) Die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(3\,|\,-1\,|\,0)$ berührt die Ebene F. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunkts und den Radius r der Kugel. [Teilergebnis: $r = 5$]
3	c) Die Punktspiegelung der Kugel K am Punkt A ergibt die Kugel K'. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M' der Kugel K' und geben Sie deren Radius r' an. [Teilergebnis: $M'(-7\,|\,4\,|\,12)$]
6	d) Zeigen Sie, dass die Ebenen E_{13} und E_{-3} symmetrisch bezüglich des Punktes A liegen, und berechnen Sie den Abstand dieser beiden Ebenen.
8	e) Die Ebene E_{13} schneidet die Kugel K in einem Kreis. Berechnen Sie den Mittelpunkt N und den Radius ρ dieses Kreises. Warum hat der Schnittkreis von E_{-3} mit der Kugel K' ebenfalls den Radius ρ? [Teilergebnis: $N(5\,|\,1\,|\,1)$]
8	f) Die Kreise aus Teilaufgabe e bilden die Grund- und die Deckfläche eines schiefen Zylinders. Berechnen Sie das Volumen dieses schiefen Zylinders und den Winkel φ, um den die Zylinderachse gegen die Grundfläche geneigt ist.
7	g) In welcher Ebene der Schar E_a liegt der Punkt M'? Für welche Werte des Scharparameters a schneiden sich die Kugel K' und die Ebene E_a in einem Kreis?
40	