BAYERN Abitur 1985 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{-|x|}.$$

1. (a) Geben Sie die Nullstelle und das Verhalten von f für $|x| \to \infty$ an. (3 BE)

   (b) Untersuchen Sie f an der Stelle $x = 0$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. (7 BE)

   (c) Bestimmen Sie Koordinaten und Art der Extrempunkte (4 BE)

   (d) Berechnen Sie $f(-1)$ und $f(-2)$, und skizzieren Sie den Graphen G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 3 cm, Hochformat, Ursprung in Blattmitte). (6 BE)

   (e) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im 4. Quadranten einschließt. (4 BE)

2. Nun wird die Funktion $g : x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$ betrachtet.

   (a) Geben Sie $\mathbb{D}_g$ an, und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen von $\mathbb{D}_g$. (3 BE)

   (b) Bestimmen Sie Koordinaten und Art des Extrempunktes, und geben Sie die Wertemenge $\mathbb{D}_g$ an. (4 BE)

   (c) Skizzieren Sie den Graphen G_g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d. (3 BE)

3. Die Integralfunktion $G : x \mapsto \displaystyle\int_2^x g(t)\,\mathrm{d}t$ ist für $x > 1$ definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass G genau eine Nullstelle und der Graph von G genau einen Wendepunkt hat. (5 BE)

   (b) Geben Sie eine integralfreie Darstellung von $G(x)$ an. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to 1} G(x) = \dfrac{5}{2}$ ist. ($\lim\limits_{z\to 0}(z \ln z) = 0$ kann verwendet werden.) (7 BE)

   (c) Skizzieren Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse den Graphen von G in das vorhandene Koordinatensystem; zeichnen Sie auch die Wendetangente ein. (4 BE)

Infinitesimalrechnung II

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierte Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1-x^2}{2(2-x)}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen, und untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung von $x = 2$. (4 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für $x \neq 2$ gilt:

$$\frac{1-x^2}{2(2-x)} = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2(2-x)}.$$

   Begründen Sie, dass G_f für $|x| \to \infty$ eine Asymptote hat. Für welche Werte von x verläuft G_f oberhalb dieser Asymptote? (5 BE)

   (c) Zeigen Sie für $h \in \mathbb{R}^+$: $f(2+h) - 2 = 2 - f(2-h)$.
   Deuten Sie diese Beziehung geometrisch. (6 BE)

   (d) Weisen Sie nach, dass die Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente auf der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegen. (5 BE)

   (e) Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm, Querformat, Ursprung 10 cm vom linken und 7 cm vom unteren Blattrand entfernt). (5 BE)

   (f) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3}{2(2-x)}\,dx$.

   Kennzeichnen Sie in der Zeichnung von Teilaufgabe 1e das Flächenstück, dessen Inhalt damit berechnet wurde. (6 BE)

2. Gegeben ist weiter die Funktion $g :\mapsto \arccos \frac{3}{2(2-x)}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion g im Bereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus]\frac{1}{2}; \frac{7}{2}[$ definiert ist. (4 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen von $\mathbb{D}_g$. (3 BE)

   (c) Bestätigen Sie: $g'(x) = \dfrac{-3}{|2-x| \cdot \sqrt{4(2-x)^2 - 9}}$.

   Untersuchen Sie das Verhalten von g' an den Grenzen $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{7}{2}$.
   Warum kann aus $g'(x) < 0$ in $\mathbb{D}_{g'}$ nicht auf die Monotonie von g in $\mathbb{D}_{g'}$ geschlossen werden? (8 BE)

   (d) Skizzieren Sie unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse den Graphen von g in ein neues Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm). (4 BE)

Analytische Geometrie I

1. In einem kartesichen Koordinatensystem sind die Punkte $P(-6|8|7)$, $Q(9|-4|-2)$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

gegeben, wobei der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt.

   (a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E, welche P und g enthält, in der Normalenform auf.
   [Mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 18 = 0$] (4 BE)

   (b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E und die Koordinaten des Schnittpunktes F der Ebene E mit der Lotgeraden zu E durch den Punkt Q.
   [Ergebnis: $F(1|-8|6)$] (4 BE)

   (c) Weisen Sie nach, dass $\overline{QF}$ auch der Abstand des Punktes Q von der Geraden g ist. Legen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen der bisher eingeführten geometrischen Elemente ersichtlich sind, und ergänzen Sie diese fortlaufend. (5 BE)

   (d) Welche Punkte auf g haben von F dieselbe Entfernung wie der Punkt Q? (3 BE)

2. Durch

$$h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2-2t \\ 2+t \end{pmatrix}, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}$$

ist eine Geradenschar mit dem gemeinsamen Punkt P gegeben.

   (a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene E liegen. (4 BE)

   (b) Für welchen Wert von t erhält man die Gerade PF? (5 BE)

   (c) Begründen Sie ohne Rechnung, warum die Schargerade PF unter allen Geraden h_t von Q den kleinsten Abstand hat. (5 BE)

Analytische Geometrie II

1. In einem kartesichen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|2|3)$, $B(5|0|-1)$ und $D(-1|6|-1)$ gegeben.

   (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ aufeinander senkrecht stehen und gleiche Beträge haben. (2 BE)

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes C so, dass $ABCD$ zu einem Quadrat wird. Berechnen Sie auch die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M.
   [Zur Kontrolle: $M(2|3|-1)$] (3 BE)

2. Durch das Quadrat $ABCD$ und den Punkt $S(6|7|1)$ ist eine Pyramide mit der Spitze S gegeben.

   (a) Weisen Sie nach, dass $[SM]$ die Höhe der Pyramide ist. Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide. (5 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes H, der von A, B, C, D und von S jeweils gleiche Entfernung hat. (5 BE)

   (c) Welchen Winkel (auf Grad gerundet) schließt die Seitenkante $[SA]$ mit der Höhe $[SM]$ der Pyramide ein? (3 BE)

3. T ist ein beliebiger, von S verschiedener Punkt der Parallelen zu AB durch S.

   (a) Fertigen Sie eine saubere Skizze der Pyramide $ABCDS$ an, und tragen Sie einen sochen Punkt T ein. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{MT}$ und $\vec{AD}$ stets senkrecht aufeinander stehen. (5 BE)

   (b) Ergänzen Sie die angelegte Skizze durch die Gerade h, welche sowohl AB als auch MS senkrecht schneidet. Begründen Sie möglichst ohne Rechnung, dass die Gerade AB von TM denselben Abstand hat wie von MS. Wie groß ist dieser Abstand? (7 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Beim Spiel „Werfen von Sechsen“ werden drei gleichartige Laplace-Würfel gleichzeitig geworfen. Jeder Würfel, der bei diesem Wurf eine „6“ zeigt, bleibt liegen. Mit den anderen Würfeln wird (falls nicht alle drei Würfel schon beim ersten Wurf „6“ zeigen) ein zweites Mal gleichzeitig geworfen. Dann ist das Spiel zu Ende.

1. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der bei diesen Spiel geworfenen Sechsen. Zeichnen Sie ein übersichtliches Baumdiagramm zu diesem Spiel, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf Promille genau. (20 BE)

2. Max schlägt seinen Freund Otto für das Spiel „Werfen von Sechsen“, folgende Regelung vor:

   Otto zahlt an Max 2 DM Einsatz. Tritt beim Spiel das Ereignis A: „Die Würfel zeigen mindestens eine Sechs“ auf, so zahlt Max an Otto den Betrag a DM aus. Andernfalls behält Max den Einsatz. Wie groß muss a sein, damit Max in Mittel pro Spiel $0,50$ DM gewinnt? Rechnen Sie zur Vereinfachung mit $P(A) = \frac{2}{3}$. (4 BE)

3. Drei neue Würfel werden getestet, indem man das Spiel „Werfen von Sechsen“ 500mal durchführt. Berechnen Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich $[0; k_1] \cup [k_2; 500]$ so, dass die Hypothese „$P(A) = \frac{2}{3}$“ in jedem Teilbereich mit höchstens $2,5\%$ Wahrscheinlichkeit irrtümlich abgelehnt wird.

   Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (10 BE)

4. Am Ende des Spiels „Werfen von Sechsen“ liegen immer drei Würfel auf, bei denen keine Reihenfolge erkennbar ist. Wie viele voneinander verschiedene Augenzahlkombinationen sind möglich? (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Auf einer belebten Straße soll der Anteil p der Autolenker untersucht werden, die während der Fahrt keinen Sicherheitsgurt tragen (sog. Gurtmuffel). Es wird angenommen, dass die Autolenker unabhängig voneinander den Gurt anlegen oder nicht anlegen.

1. Bestimmen Sie In Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 vorbeifahrenden Autos

   (a) nur das 3. und das 5. Auto von einem Gurtauffel gelenkt wird, (2 BE)

   (b) die ersten vier Autos von keinem Gurtmuffel gelenkt werden, aber trotzdem unter den 10 Fahrern genau zwei Gurtmuffel sind. (4 BE)

2. Wie groß muss der Anteil der Gurtmuffel mindestens sein, wenn unter 10 vorbeifahrenden Autos mit mehr als 95% Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem Gurtmuffel gelenkt wird? Berechnen Sie diesen Anteil auf Promille genau. (6 BE)

3. Wie viele Autos muss man mindestens überprüfen, um den Anteil der Gurtmuffel mit einer Abweichung von höchstens $0,02$ und einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens 95% feststellen zu können?

   Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow, und beachten Sie dabei $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. (6 BE)

4. Es werden 200 Autos auf einer Straße mit dem bekannten Gurtmuffelanteil $p = 15\%$ überprüft. X ist die Anzahl der dabei entdeckten Gurtmuffel. Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialtabellen einen möglichst kleinen Bereich symmetrisch um den Erwartungswert von X, in dem die Zahl der entdeckten Gurtmuffel mit mindestens 90% Wahrscheiniichkeit liegt. (7 BE)

5. Bei einem bekannten Anteil $p = 15\%$ kontrolliert man die vorbeifahrenden Autos so lange, bis man einen Gurtmuffel entdeckt, höchstens aber 10 Autos. Z ist die Anzahl der bei diesem Vorgehen kontrollierten Autos.

   (a) Bestimmen Sie $P(Z = 6)$ und $P(Z = 10)$. (4 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mindestens 6 Autos überprüfen muss? (4 BE)