BAYERN Abitur 1986 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar von Funktionen

$$f_a : x \mapsto 4x\mathrm{e}^{-ax^2}$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$.

1. (a) Bestimmen Sie die gemeinsame Nullstelle der Funktionen f_a und die Symmetrieeigenschaft ihrer Graphen G_a. (4 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte von G_a.
   [Zur Kontrolle: $f_a''(x) = 8ax(2ax^2 - 3)\mathrm{e}^{-ax^2}$] (12 BE)

   (c) Die Extrempunkte aller Graphen G_a liegen auf einer Kurve k. Geben Sie eine Gleichung von k an. (2 BE)

   (d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkt $P(t|f_a(t))$ von G_a. (4 BE)

2. Für die weiteren Aufgaben ist $a = \frac{1}{6}$.

   (a) W sei der im 1. Quadranten liegende Wendepunkt von $G_{\frac{1}{6}}$. Zeigen Sie, dass die Wendetangente w in W die x-Achse im Punkt $S(4,5|0)$ schneidet. (4 BE)

   (b) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse den Graphen $G_{\frac{1}{6}}$ im Bereich $-6 \leq x \leq 6$ ein (Längeneinheit 1 cm). Tragen Sie auch die Kurve k und die Wendetangente w ein. (6 BE)

3. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode eine Stammfunktion F von $f_{\frac{1}{6}}$.
   [Zur Kontrolle: z. B. $F(x) = -12\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x^2}$] (4 BE)

   (b) Berechnen Sie den Inhalt der sich ins Unendliche erstreckenden Fläche, die im 1. Quadranten vom Graphen $G_{\frac{1}{6}}$ und der x-Achse begrenzt wird. (2 BE)

4. Vom Punkt S aus (Teilaufgabe 2a) gibt es neben der Geraden w noch eie weitere Tangente an den Graphen $G_{\frac{1}{6}}$. Zeigen Sie, dass die Abszisse des Berührpunktes dieser Tangente der Gleichung $2x^3 - 9x^2 + 27 = 0$ genügt. (Beachten Sie dabei Teilaufgabe 1d). Bestimmen Sie aus dieser Gleichung die Abszisse des Berührpunkts. Berücksichtigen Sie dabei, dass bereits eine Lösung der Gleichung bekannt ist. (12 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f : x \mapsto \arctan \frac{x^2 - 1}{2 \cdot |x|}$$

und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. (a) Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie. Geben Sie die Nullstellen von f an. (2 BE)

   (b) Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $|x| \to \infty$. Weisen Sie nach, dass die Definitionslücke von f stetig behebbar ist. (4 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.
   Begründen Sie: Für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x) = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan x$. (6 BE)

   (d) Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie von $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x)$ (Längenheinheit 2 cm). (5 BE)

2. Betrachten Sie nun die stetige Fortsetzung f^* von f

$$f^* : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

   sowie die Integralfunktion $F : x \mapsto \int\limits_0^x f^*(t)\ dt$; $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$. Die Teilaufgaben a bis e sollen ohne Berechnung des Integrals gelöst werden.

   (a) Begründen Sie, dass der Graph G_F punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. (2 BE)

   (b) Bestimmen Sie die Extremstellen von F und die Art dieser Extrema. (4 BE)

   (c) Begründen Sie, dass für alle $x \in [2; \infty[$ gilt: $f^*(x) \geq f^*(2) > 0$. Zeigen Sie damit, dass $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \infty$. (6 BE)

   (d) Begründen Sie, dass F drei Nullstellen besitzt. (5 BE)

   (e) Begründen Sie, dass der Graph G_F in $x = 0$ einen Wendepunkt besitzt. (3 BE)

   (f) Stellen Sie nun $F(x)$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$ integralfrei dar.
   [Ergebnis: $F(x) = 2x \cdot \arctan x - \ln(1 + x^2) - \frac{\pi}{2} \cdot x$] (5 BE)

   (g) Zeichnen Sie den Graphen G_F unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. Berechnen Sie dazu noch $F(1)$, $F(2)$ und $F(3)$ (auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet). Tragen Sie auch die Wendetangente ein. (8 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|1|9)$, $B(6|-1|5)$, $P(2|-8|0)$ und die Ebene $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6 = 0$ gegeben. Ein weiterer Punkt Q entsteht durch Spiegelung von P an der Ebene E.

1. (a) Zeigen Sie, dass E die Symmetrieebene der Punkte A und B ist. (2 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten von Q. (3 BE)

2. (a) Begründen Sie, dass man ein ebenes Viereck mit sich nicht überschneidenden Seiten erhält, wenn man die Punkte A, B, P und Q in der Reihenfolge $AQPBA$ verbindet. Fertigen Sie eine Skizze an, welche die Lage dieses Vierecks zu der Ebene E erkennen lässt. (5 BE)

   (b) Berechnen Sie die Innenwinkel des Vierecks $AQPB$ (auf Grad gerundet). (5 BE)

3. Der Punkt $S(0|-4|5)$ liegt auf der durch das Viereck $AQPB$ bestimmten Ebene (Nachweis nicht erforderlich).

   (a) Zeigen Sie, dass der Punkt S folgende Eigenschaft hat: Er hat von A, B, P und Q die gleiche Entfernung. (3 BE)

   (b) Begründen Sie, dass alle Punkte mit der in Teilaufgabe 3a angegebenen Eigenschaft auf einer Geraden liegen. (6 BE)

   (c) Liegt S innerhalb oder außerhalb des Vierecks $AQPB$? Die Antwort ist zu begründen. (6 BE)

Analytische Geometrie II

Durch $g_a : \vec{s} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $a, \sigma \in \mathbb{R}$ ist eine Geradenschar mit a als Scharparameter gegeben.

1. (a) Zeigen Sie: Alle Geraden dieser Schar sind zueinander parallel und keine der Geraden geht durch den Ursprung. (2 BE)

   (b) Berechnen Sie eine Normalengleichung derjenigen Ebene E, die alle Geraden g_a enthält.
   [Ein mögliches Ergebnis: $E : x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 12 = 0$] (4 BE)

   (c) Welche Gerade der Schar hat vom Ursprung den kleinsten Abstand? Wie groß ist dieser Abstand? (7 BE)

2. (a) Wie groß ist der Abstand der beiden Geraden g_0 und g_3? (7 BE)

   (b) $A(2|2|5)$ liegt auf g_0, $C(6|3|6)$ auf g_3 (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass es ein Quadrat mit der Diagonalen $[AC]$ gibt, dessen übrige Ecken B und D ebenfalls auf g_0 bzw. g_3 liegen. Berechnen Sie die Koordinaten von B und D. (10 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. Eine Firma stellt Kugelschreiber her. Sie werden in Packungen zu je 20 Stück geliefert. Ein Händler prüft aus jeder Packung nacheinander zwei Kugelschreiber (ohne Zurücklegen). Er nimmt die Packung genau dann an, wenn beide Kugelschreiber in Ordnung sind. Jede Packung enthält eine unbekannte Anzahl defekter Kugelschreiber.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Händler eine solche Packung jeweils annehmen, wenn sie 2, 4 oder 6 defekte Kugelschreiber enthält? Nehmen Sie kurz Stellung zur Brauchbarkeit dieser Prüfung. (7 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle 10 Packungen einer Lieferung angenommen, wenn jede von ihnen genau 4 defekte Kugelschreiber enthält? (3 BE)

2. Der Defekt eines Kugelschreibers kann zwei Gründe haben: defekte Mechanik (1. Mangel) bzw. defekte Mine (2. Mangel). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kugelschreiber defekt ist, beträgt $0,088$. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des 1. Mangels ist $0,05$ und die für das Auftreten beider Mängel gleichzeitig ist $0,002$. Untersuchen Sie, ob die beiden Mängel unabhängig voneinander auftreten. (7 BE)

3. Bei der Endkontrolle wird ein Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit $0,1$ als Ausschuß ausgesondert. Bei dieser Kontrolle wird erfahrungsgemäß ein einwandfreier Kugelschreiber mit der Wahrscheinlichkeit $0,04$ als Ausschuß deklariert. $8,8\%$ aller produzierten Kugelschreiber seien defekt.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein defekter Kugelschreiber aussortiert wird. (5 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kugelschreiber wirklich defekt ist, falls er bei der Endkontrolle aussortiert wurde? (4 BE)

4. Mit einer Stichprobe von 200 Stück soll getestet werden, ob die Angabe der Herstellerfirma stimmt, dass höchstens 4% der Kugelschreiber defekt sind.

   (a) Bestimmen Sie für ein Signifikanzniveau von 1% einen möglichst großen Ablehnungsbereich für die Hypothese „Höchstens 4% der Kugelschreiber sind defekt“. (5 BE)

   (b) Wie groß ist bei diesem Test das Risiko 2. Art, wenn tatsächlich 10% der Kugelschreiber defekt sind? (3 BE)

5. Ein Händler erhält eine Lieferung von 5000 Kugelschreibern. Die Anzahl der defekten Kugelschreiber in der Lieferung ist unbekannt, jedoch liegt der Ausschussanteil der Gesamtproduktion erfahrungsgemäß bei 4%. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung ein möglichst kleines Intervall $[0;k]$, so dass die Anzahl der defekten Kugelschreiber mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% in diesem Intervall liegt. (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

1. In einer Zuckerfabrik wird der Zucker in Packungen zu 10 g, 250 g, 500 g, 1 kg und 2,5 kg abgefüllt. Nun soll das ganze Sortiment in einem Schaukasten in einer Reihe ausgestellt werden, und zwar ein 2,5-kg-Paket und je zwei Pakete der übrigen Größen.

   (a) Auf wie viele verschiedene Arten ist das möglich? (5 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht das 2,5-kg-Paket unmittelbar zwischen den beiden 1-kg-Paketen, wenn die Anordnung zufällig erfolgt? (5 BE)

2. Im Mittel wird in jedes zehnte 1-kg-Paket ein Gutschein gelegt.

   (a) Ein Kunde kauft 20 Pakete. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mindestens einen Gutschein? (4 BE)

   (b) Wie viele Pakete müsste er mindestens kaufen, damit er mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 95% wenigstens einen Gutschein erhält? (4 BE)

3. 100 Gutscheine werden nun durch einen Zufallsmechanismus auf die 1000 Pakete eines Containers so verteilt, dass jeder Gutschein unabhängig von den anderen in jedes Paket gelangen kann. (Ein Paket kann also auch mehr als einen Gutschein enthalten!)

   (a) Beschreiben Sie ein Urnenexperiment, mit dem man einen solchen Zufallsmechanismus realisieren könnte. (5 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in ein bestimmtes Paket mehr als ein Gutschein gelangt? [Ergebnis: 0,46%] (5 BE)

   (c) Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder 4 oder 5 Pakete in einem Container mehr als einen Gutschein enthalten. (5 BE)

4. Die Zuckerfabrik behauptet, ihre Abfüllanlage für die 1-kg-Pakete arbeite so, dass höchstens 4% der Pakete weniger als 1000 g enthalten. Die prüfende Behörde will diese Behauptung nur dann akzeptieren, wenn in einer Stichprobe von 400 Paketen höchstens k Pakete mit einer Masse unter 1000 g zu finden sind. Bestimmen Sie zu einem Signifikanzniveau von 1% einen möglichst großen Wert für k (Normalverteilung!). (7 BE)