BAYERN Abitur 1987 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_a : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-|x-a|}$$

mit $0 \leq a \leq 1$. Der Graph der Funktion f_a wird mit G_a bezeichnet.

1. (a) Geben Sie $f_a(x)$ abschnittsweise ohne Betragszeichen an. Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a und untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$. (4 BE)

   (b) Es sei $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$. Untersuchen Sie, ob und an welchen Stellen die Graphen G_{a_1} und G_{a_2} gemeinsame Punkte haben. Untersuchen Sie dazu die drei Bereiche $x \leq a_1$, $a_1 < x < a_2$ und $a_2 \leq x$. (9 BE)

2. (a) Ermitteln Sie $f'_a(x)$ für $x \neq a$, und untersuchen Sie das Verhalten von $f'_a(x)$ bei Annäherung an die Stelle $x = a$. Zeigen Sie, dass f_0 die einzige Funktion der Schar ist, die in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. (7 BE)

   (b) Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph G_a eine waagrechte Tangente hat. (5 BE)

   (c) Berechnen Sie für die beiden Funktionen f_0 und f_1 die Funktionswerte an den Stellen -2, 0, 1, 2 (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet). Zeichnen Sie die Graphen G_0 und G_1 mit verschiedenen Farben unter Berücksichtigung aller Ergebnisse der vorausgegangenen Teilaufgaben (Querformat; Ursprung 5 cm unterhalb der Blattmitte; Längeneinheit 5 cm). (12 BE)

3. (a) Eine Stammfunktion F_a von f_a im Bereich $x < a$ hat als Funktionsterm $F_a(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \cdot \mathrm{e}^{x-a}$ mit geeigneten Konstanten c_0, c_1, c_2. Bestimmen Sie diese Konstanten. (9 BE)

   (b) Berechnen Sie den Inhalt $J(a)$ der Fläche im zweiten Quadranten, die sich zwischen G_a und der x-Achse ins Unendliche erstreckt. (4 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionen

$$f : x \mapsto \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|+1}}.$$

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie und Nullstellen. Wie verhält sich $f(x)$ für $|x| \to \infty$? (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$.
   Geben Sie $f'(x)$ für $x > 0$ an, und untersuchen Sie, sie sich $f'(x)$ und der Graph G_f in Der Umgebung von $x = 0$ verhalten. (7 BE)

   (c) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche und das Extremum von f. (2 BE)

   (d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$, 1, 2 und 3 (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet). Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm, Ursprung in Blattmitte). (6 BE)

2. Die Einschränkung der Funktion f auf die Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ hat eine Umkehrfunktion g.

   (a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g in der Form $x = g(y)$, und geben Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$ und die Wertemenge $\mathbb{W}_g$ an. (4 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = \arctan \sqrt{|x|}$. (4 BE)

3. Gegeben ist die Funktion $F : x \mapsto \int\limits_0^x \arctan \sqrt{|t|}\, dt$ mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$.

   (a) Begründen Sie ohne Berechnung des Integrals: F besitzt genau eine Nullstelle, und der Graph G_F von F hat dort einen Terassenpunkt. (3 BE)

   (b) Stellen Sie $F(x)$ für $x \geq 0$ integralfrei dar. Beginnen Sie dazu mit der Substitution $z = \sqrt{t}$.
   [Zur Kontrolle: $F(x) = (x+1) \cdot \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$] (9 BE)

   (c) Die Graphen der Funktionen

   $$g : x \mapsto g(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} - 1 \quad \text{und} \quad h : x \mapsto h(x) = \frac{\pi}{2}x - 1$$

   sind Geraden durch den Punkt$(1|F(1))$ (Nachweis nicht erforderlich). Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Differenzfunktionen $D_1 : x \mapsto F(x) - g(x)$ und $D_2 : x \mapsto h(x) - F(x)$ im Bereich $x > 1$. (6 BE)

   (d) Skizzieren Sie in das angelegte Koordinatensystem den Graphen G_F sowie im Bereich $x \geq 1$ die Graphen von g und h unter Verwendung der Ergebnisse der Teilaufgabe 3a und 3c. (6 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-k|k|k)$, $B(2k|-k|0)$ und $C(2k|0|-k)$ gegeben. Dabei sei $k \in \mathbb{N}$.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Ebene E_k bestimmen, und stellen Sie eine Gleichung von E_k in Normalenform auf.
   [Ein mögliches Ergebnis: $E_k : x_1 + x_2 + x_3 - k = 0$]
   Begründen Sie, dass es sich um eine Schar von parallelen Ebenen handelt (6 BE)

   (b) Ermitteln Sie die Schnittpunkte S_k, T_k, U_k dieser Ebene E_k mit den Koordinatenachsen.
   Legen Sie eine Zeichnung des Koordinatensystems an (Hochformat, Ursprung in der Blattmitte), und tragen Sie das Dreieck $S_4T_4U_4$ ein.
   Berechnen Sie das Volumen V_4 der Pyramide $S_4T_4U_4O$ mit $O(0|0|0)$. (5 BE)

2. Eine weitere Ebene F enthält die Punkte O, $P(2|0|6)$ und $Q(0|2|6)$.

   (a) Zeichnen Sie das Dreieck OPQ in das bei 1.b angelegte Koordinatensystem ein.
   Weisen Sie nach, dass die Gerade $g = PQ$ in einer Scharebene E_{k_0} liegt. Geben Sie k_0 an, und tragen Sie auch das Dreieck $S_{k_0}T_{k_0}U_{k_0}$ in die Zeichnung ein. (5 BE)

   (b) Berechnen Sie aus V_4 (vgl. 1.b) das Volumen V_8 der Pyramide $S_8T_8U_8O$. (3 BE)

   (c) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Schnittgerade s von F und E_4 zur Geraden g parallel ist. (4 BE)

3. (a) Berechnen Sie den spitzen Winkel (auf Grad gerundet), den die Ebenen E_k mit der Ebene F bilden. (3 BE)

   (b) Geben Sie eine Gleichung von F in Parameterform an, bei der die Richtungsvektoren aufeinander senkrecht stehen. Dabei soll der eine Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{PQ}$ sein. (4 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $A(1|3|-1)$ und die Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \sigma \in \mathbb{R}$$

mit dem gemeinsamen Punkt $P(4|-3|5)$ gegeben.

1. Stellen Sie eine Gleichung der Verbindungsgeraden p der Punkte A und P auf.

   g und A bestimmen eine Ebene E. Stellen Sie eine Gleichung von E in Normalenform auf.

   [Mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 = 0$] (5 BE)

2. (a) $M(m_1|1|m_3)$ sei ein Punkt auf der Geraden p und der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. Ermitteln Sie die fehlenden Koordinaten von M und die Koordinaten von B.
   [Zur Kontrolle: $B(3|-1|3)$] (4 BE)

   (b) In welchem Verhältnis teilt P die Strecke $[AB]$?
   Berechnen Sie damit aus $\overline{AP} = 9$ die Länge der Strecke $[AB]$. (4 BE)

3. (a) Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes C, der auf g liegt und mit A und B ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Basis $[AB]$ ist. (6 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Lotgerade zur Ebene E durch M die Gerade h schneidet, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S an. (4 BE)

   (c) Legen Sie, ausgehend von der Pyramide $ABCS$, eine Skizze an, welche die Lagebeziehungen der bisher eingeführten geometrischen Elemente deutlich macht. (4 BE)

   (d) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die durch p und h bestimmte Ebene F auf E senkrecht steht. (3 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. Auf dem Weg zur Arbeitsstätte hat ein Autofahrer 2 Verkehrsampeln und dann einen Bahnübergang zu passieren. Unabhängig voneinander hat er an den Ampeln mit je 30%, am Bahnübergang mit 90% Wahrscheinlichkeit freie Fahrt. An jeder Ampel muß er mit 40% Wahrscheinlichkeit nur 1 Minute, mit 30% Wahrscheinlichkeit 2 Minuten warten, am Bahnübergang hat er mit 10% Wahrscheinlichkeit eine Wartezeit von 3 Minuten.

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen $X_i :=$ „Wartezeit an der Ampel i" ($i = 1, 2$) und $Y :=$ „Wartezeit am Bahnübergang", und berechnen Sie damit Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $Z :=$ „Gesamtwartezeit". (8 BE)

   (b) Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit ist die Wartezeit an Ampeln und Bahnübergang zusammen mindestens 5 Minuten, wenn der Autofahrer an der ersten Ampel 2 Minuten warten muss? (5 BE)

2. Auf dem Weg von der Wohnung zu seiner Arbeitsstätte hat ein anderer Autofahrer insgesamt 15 Ampeln zu passieren, die unabhängig voneinander geschaltet sind. Erfahrungsgemäß kann er jede Ampel mit 30% Wahrscheinlichkeit ohne Wartezeit passieren. Ansonsten muss er mit einer mittleren Wartezeit von 1 Minute pro Ampel rechnen.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt frühestens die 6. Ampel Rot? (3 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er auf einer Fahrt mehr als die Hälfte der Ampeln bei Grün und kann diese also ohne Verzögerung passieren? (3 BE)

   (c) Im Jahr fährt er 230mal von der Wohnung zur Arbeitsstätte. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die gesamte Wartezeit G vor den Ampeln pro Jahr bei seinen Fahrten zur Arbeitsstätte mit mindestens 90% Sicherheit liegt. (6 BE)

3. Eine umfangreiche Auswertung der Fahrzeiten von der Wohnung zur Arbeitsstätte hat ergeben, dass die Zufallsgröße $T :=$ „Fahrzeit" normalverteilt ist mit Erwartungswert 30 Minuten und Standardabweichung $4,75$ Minuten.

   (a) Als „normal" soll eine Fahrt gelten, wenn die Fahrzeit um höchstens 6 Minuten vom Erwartungswert abweicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann eine beliebig herausgegriffene Fahrt „normal"? Mit wievielen „normalen" Fahrten kann man bei 230 Fahrten pro Jahr rechnen? (5 BE)

   (b) Welche Fahrzeit to muss der Autofahrer ansetzen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Fahrzeit, die länger als t_0 ist, nur $\frac{1}{230}$ beträgt, d. h., dass er im Mittel pro Jahr einmal zu spät zur Arbeit kommt? (4 BE)

4. Ein Autofahrer behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der er zu spät zur Arbeit kommt, höchstens 1% beträgt. Kann er mit einem Signifikanzniveau von 5% seine Behauptung noch aufrechterhalten, wenn er bei den letzten 150 Fahrten 4 mal zu spät gekommen ist? Formulieren Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung eine Entscheidungsregel und wenden Sie diese an! (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Weiße Natursteinplatten werden in Paketen zu je 100 Platten geliefert. Die Pakete werden je nach der Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten rötlich verfärbter Platten (kurz: rote Platten), die bei der Produktion zwangsläufig anfallen, in drei Güteklassen eingeteilt:
Güteklasse I: $p = 0,01$; Güteklasse II: $p = 0,05$; Güteklasse III: $p = 0,10$.

1. Auf dem Weg sollen 100 Platten in einer Reihe verlegt werden. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind möglich,

   (a) wenn das gelieferte Paket genau zwei rote Platten enthält, und sich die Platten nur in der Farbe (weiß, rot) unterscheiden, (3 BE)

   (b) wenn das gelieferte Paket genau 3 rote Platten enthält, und diese untereinander (etwa nach der Maserung) unterscheidbar sind, die weißen Platten aber nicht? (4 BE)

2. (a) Zur Pflasterung des gleichen Weges wie in 1. wird ein Paket der Güteklasse 1 bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine roten Platten dabei sind? (4 BE)

   (b) Bis zu 12 rote Platten werden beim Pflastern des Weges in Kauf genommen. Kann man dann ein Paket der Güteklasse II bestellen, wenn man die Wahrscheinlichkeit für mehr als 12 rote Platten unter 1% halten will? (4 BE)

3. In einer Siedlung sollen 10 Wege mit je 100 Platten gepflastert werden. Der Plattenleger bestellt 10 Pakete der Güteklasse III. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können die 1000 Platten so verlegt werden, daß alle 10 Wege mit jeweils weniger als 13 roten Platten belegt sind? Verwenden Sie die Normalverteilung! (7 BE)

4. Eine Firma liefert Pakete der Güteklasse II und III, die auf Güterwaggons verladen werden. Jeder Waggon enthält lauter Pakete gleicher Güteklasse. Bei einer Lieferung, die doppelt so viele Waggons der Güteklasse III wie der Güteklasse II enthält, ist die Kennzeichnung der Güteklasse vom Regen abgewaschen worden. Durch eine Stichprobe von 50 Platten soll entschieden werden, in welche Güteklasse der jeweilige Waggon eingestuft wird.

   Ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse II verursacht einen Schaden von 1000 DM (entgangene Einnahmen), ein falsch eingestufter Waggon der Güteklasse III verursacht einen Schafden von 2000 DM (Reklamation, verärgerte Kunden). Verwenden Sie im Folgenden die Tabelle für die Binominalverteilung.

   (a) Ein Waggon werde genau dann in die Güteklasse II eingestuft, wenn weniger als 3 rote Platten in der Stichprobe sind, andernfalls in Güteklasse III. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art, und berechnen Sie dann den mittleren Schaden pro Waggon, der bei diesem Vorgehen zu erwarten ist. (9 BE)

   (b) Ermitteln Sie für die Hypothese „Der Waggon enthält Güteklasse II“ einen Annahmebereich der Form $\{0, \ldots, k\}$, der so beschaffen ist, dass der mittlere Schaden pro Waggon möglichst klein ist. Wie groß ist dann dieser Schaden? (9 BE)