# BAYERN Abitur 1988 Mathematik Leistungskurs

## Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto x^2 - \ln(x^2 + a^2)$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

1. (a) Untersuchen Sie die Graphen $G_a$ von $f_a$ auf Symmetrie. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen $f_a$ für $x \to \pm\infty$. (5 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt: $f'_a(x) = \dfrac{2x(x^2 + a^2 - 1)}{x^2 + a^2}$.
   Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Scharfunktion in Abhängigkeit von $a$ und bestimmen Sie damit Lage und Art der Extrema. Folgern Sie, dass jede Scharfunktion einen minimalen Funktionswert $m_a$ besitzt und berechnen Sie diesen Wert.
   [Teilergebnis: $\begin{array}{lll} m_a = 1 - a^2 & \text{für} & a < 1 \\ m_a = -2\ln a & \text{für} & a \geq 1 \end{array}$] (12 BE)

   (c) Welche Scharkurven $G_a$ haben mit der $x$-Achse Punkte gemeinsam, und wie viele derartige Punkte gibt es dann? Begründen Sie Ihre Antwort. (6 BE)

   (d) Weisen Sie nach, dass für $a_1 < a_2$ der Graph $G_{a1}$ stets oberhalb des Graphen $G_{a2}$ liegt. (3 BE)

   (e) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_{0,5}(2)$ die Graphen $G_2$ und $G_{0,5}$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem mit Längeneinheit 2 cm ein. (7 BE)

2. (a) Bestimmen Sie unter Verwendung partieller Integration eine Stammfunktion $F_a$ von $f_a$.
   [Mögliches Ergebnis: $F_a(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x - x\ln(x^2 + a^2) - 2a\arctan\dfrac{x}{a}$] (8 BE)

   (b) Berechnen Sie den Inhalt $A$ des zwischen den Graphen $G_2$ und $G_{0,5}$ liegenden Flächenstücks.
   Hinweis: Unter Verwendung der bekannten Abschätzung $\ln z \leq z - 1$ für $z \in \mathbb{R}^+$ können Sie zeigen: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \dfrac{x^2 + a_2^2}{x^2 + a_1^2} = 0$. (9 BE)

## Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionen

$$f : x \mapsto \arccos \frac{1}{\sqrt{|x|+1}}.$$

Der Graph von $f$ wird mit $G_f$ bezeichnet.

1. (a) Untersuchen Sie $f$ auf Symmetrie und Nullstellen. Wie verhält sich $f(x)$ für $|x| \to \infty$? (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$.
   Geben Sie $f'(x)$ für $x > 0$ an, und untersuchen Sie, sie sich $f'(x)$ und der Graph $G_f$ in Der Umgebung von $x = 0$ verhalten. (7 BE)

   (c) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche und das Extremum von $f$. (2 BE)

   (d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$, 1, 2 und 3 (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet). Zeichnen Sie den Graphen $G_f$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm, Ursprung in Blattmitte). (6 BE)

2. Die Einschränkung der Funktion $f$ auf die Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ hat eine Umkehrfunktion $g$.

   (a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $g$ in der Form $x = g(y)$, und geben Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$ und die Wertemenge $\mathbb{W}_g$ an. (4 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = \arctan \sqrt{|x|}$. (4 BE)

3. Gegeben ist die Funktion $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \arctan \sqrt{|t|}\, dt$ mit $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$.

   (a) Begründen Sie ohne Berechnung des Integrals: $F$ besitzt genau eine Nullstelle, und der Graph $G_F$ von $F$ hat dort einen Terassenpunkt. (3 BE)

   (b) Stellen Sie $F(x)$ für $x \geq 0$ integralfrei dar. Beginnen Sie dazu mit der Substitution $z = \sqrt{t}$.
   [Zur Kontrolle: $F(x) = (x+1) \cdot \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$] (9 BE)

   (c) Die Graphen der Funktionen

   $$g : x \mapsto g(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4} - 1 \quad \text{und} \quad h : x \mapsto h(x) = \frac{\pi}{2}x - 1$$

   sind Geraden durch den Punkt$(1|F(1))$ (Nachweis nicht erforderlich). Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Differenzfunktionen $D_1 : x \mapsto F(x) - g(x)$ und $D_2 : x \mapsto h(x) - F(x)$ im Bereich $x > 1$. (6 BE)

   (d) Skizzieren Sie in das angelegte Koordinatensystem den Graphen $G_F$ sowie im Bereich $x \geq 1$ die Graphen von $g$ und $h$ unter Verwendung der Ergebnisse der Teilaufgabe 3a und 3c. (6 BE)

## Analytische Geometrie I

Durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(6|12|0)$ und $D(6|2|8)$ ist eine auf der $x_1x_2$-Ebene stehende dreiseitige Pyramide gegeben. Die Ebene, in der die Punkte $A$, $B$ und $C$ liegen, werde mit $E_1$, diejenige, in der die Punkte $A$, $C$ und $D$ liegen, mit $E_2$ bezeichnet.

1. (a) Legen Sie ein Schrägbild des kartesischen Koordinatensystems an (z. B. gemäß untenstehender Skizze, Ursprung in Blattmitte, Querformat, Einheit 1 cm), und zeichnen Sie die Pyramide $ABCD$ ein. (3 BE)

   (b) Bestimmen Sie einen Lotvektor $\vec{n}_1$ der Ebene $E_1$ und einen Lotvektor $\vec{n}_2$ der Ebene $E_2$ und zeigen Sie, dass $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ linear unabhängig, dagegen $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\overrightarrow{BD}$ linear abhängig sind. Welche Dimension hat also der von den Vektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ und $\overrightarrow{BD}$ aufgespannte Vektorraum? (7 BE)

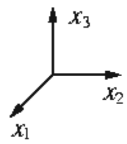
2. Es sei $h_B$ die Lotgerade von $B$ auf $E_2$ und $h_D$ die Lotgerade von $D$ auf $E_1$.

   (a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $H$ von $h_B$ und $h_D$ und die Koordinaten des Fußpunktes $D_0$ des Lotes $h_D$.
   [Zur Kontrolle: $H(6|2|2,5)$] (7 BE)

   (b) Die durch die Punkte $B$, $D$ und $H$ bestimmte Ebene sei $E_3$. Sie hat mit der Kante $[AC]$ den Punkt $G$ gemeinsam. Tragen Sie $H$ und $D_0$ in dei angelegte Zeichnung ein und konstuieren Sie damit den Punkt $G$ und den Fußpunkt $B_0$ des Lotes $h_B$. (7 BE)

   (c) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Geraden $GH$ und $BD$ sich senkrecht schneiden. Wie kann man dieses Ergebnis ohne Rechnung erschließen? (6 BE)

Zu 1.a.



# Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Schar der Geraden

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4a \\ 1 \\ 3a \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad a, \sigma \in \mathbb{R}$$

durch den Punkt $A(6|5|8)$ sowie die Gerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass der Punkt $A$ nicht auf $h$ liegt. (2 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass jede Schargerade $g_a$ die Gerade $h$ schneidet, und dass durch jeden Punkt von $h$ eine Schargerade geht. (6 BE)

   (c) Begründen Sie mit Hife der bisherigen Ergebnisse, dass alle Geraden $g_a$ in einer Ebene $E_1$ liegen. Stellen Sie eine Gleichung von $E_1$ in Normalenform auf.
   [Mögliches Ergebnis: $E_1 : 3x_1 + 4x_3 - 50 = 0$] (5 BE)

   (d) $k$ sei diejenige Gerade durch $A$, die in $E_1$ liegt, nicht aber zur Geradenschar $g_a$ gehört. Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben $E_1$, $h$ und $k$? (4 BE)

2. (a) Der Punkt $B(10|0|5)$ liegt auf der Geraden $h$. Durch den Punkt $A$ wird die zu $AB$ senkrechte Ebene $E_2$ gelegt. Sie schneidet $h$ in $C$. Berechnen Sie die Koordinaten von $C$. (4 BE)

   (b) Die Schnittgerade von $E_1$ und $E_2$ gehört zur Schar der Geraden $g_a$. Berechnen Sie den zugehörigen Parameterwert $a$. (3 BE)

3. Ein Punkt $F$ wird auf der Geraden $h$ so gewählt, dass die Pyramide $OABF$ den Rauminhalt $\frac{125}{3}$ erhält. Berechnen Sie die Koordinaten eines solchen Punktes. (6 BE)

# Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Ein Reiseunternehmen chartert ein Flugzeug, das 250 Passagiere aufnehmen kann, für Flüge nach Gransolio.

1. An einem Flug nehmen 243 Personen teil.

   (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die freien Plätze? (3 BE)

   (b) Das Flugzeug hat 50 Plätze für Raucher und 200 Plätze für Nichtraucher. 47 Fluggäste belegen einen Platz für Raucher, die restlichen einen Platz für Nichtraucher. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt für die freien Plätze? (4 BE)

2. Das Reiseuntemehmen weiss aus Erfahrung, dass ein gebuchter Platz nur mit der Wahrscheinlichkeit $0,9$ auch tatsächlich belegt wird.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 zufällig ausgewählten gebuchten Plätzen mindestens 46 belegt werden? (4 BE)

   (b) Da gebuchte Plätze mit der Wahrscheinlichkeit $0,1$ nicht belegt werden, ist das Reiseuntemehmen dazu übergegangen, die Flüge um 10% überbuchen zu lassen. Das bedeutet, dass für jeden Flug 275 Plätze verkauft werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Personen, welche die Reise wirklich antreten wollen, mit dem Flugzeug befördert werden können? Näherung mit der Normalverteilung! (6 BE)

3. Das Reiseunternehmen ändert die Vertragsbedingungen und möchte nun in Erfahrung bringen, ob sich die bisherige Wahrscheinlichkeit für Nichtbelegung eines gebuchten Platzes (Rücktrittswahrscheinlichkeit) von $0,1$ auf einen neuen Wert $p$ ändert. Dazu werden die nächsten 1500 Buchungen untersucht.

   (a) Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ab, um wieviel die relative Häufigkeit der Reiserücktritte höchstens von der Rücktrittswahrscheinlichkeit $p$ abweicht bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens 99%. Verwenden Sie $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. (6 BE)

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung bei unveränderter Rücktrittswahrscheinlichkeit $0,1$ einen möglichst kleinen, zum bisherigen Erwartungswert für die Rücktritte symmetrischen Bereich, in dem die Anzahl der Rücktritte (bei 1500 Buchungen) mit mindestes 95% Wahrscheinlichkeit liegt. Welchen Schluss kann das Reiseuntemehmen ziehen, wenn tatsächlich 123 Rücktritte gezählt werden? (10 BE)

4. Ein Reiseleiter behauptet, dadd mindestens 60% der Flüge nach Gransolio Verspätung haben. Das Reiseuntemehmen möchte diese Aussage überprüfen. Daraufhin werden die nächsten 20 Flüge auf ihre Pünktlichkeit hin kontrolliert. Kann der Behauptung des Reiseleiters auf dem Signifikanzniveau 5% widersprochen werden, wenn 8 dieser Flüge Verspätung haben? (7 BE)

## Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Zu jedem Ziffemschloss gehört eine „Geheimzahl“, mit der das Schloss geöffnet werden kann. Im Folgenden werden als Geheimzahlen vierstellige Zahlen verwendet, die aus den Ziffern 1 bis einschließlich 7 gebildet werden können. Dabei wird die Produktion so gesteuert, das alle möglichen Geheimzahlen gleichwahrscheinlich sind.

1. (a) Berechnen Sie den Anteil aller Geheimzahlen, die genau zwei gleiche Ziffern enthalten. Bei welchem Bruchteil dieser Geheimzahlen sind die übereinstimmenden Ziffern benachbart? (5 BE)

   (b) Sind die Ereignisse $Z :=$ „Die Geheimzahl enthält genau zwei übereinstimmende Ziffern“ und $U :=$ „Die Geheimzahl besteht nur aus ungeraden Ziffern“ unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. (5 BE)

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Element aus $U$, wenn man nur aus den Elementen von $Z$ zufällig auswählt? (3 BE)

2. Aus einer Tagesproduktion werden 200 Ziffernschlösser zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich unter diesen 200 Schlössern mindestens eines, das sich mit der Geheinzahl 1234 öffnen lässt? Verwenden sie die Poisson-Näherung. (5 BE)

3. Die Zufallsgröße $X$ gibt die Zahl der Einsen an, die in einer Geheimzahl vorkommen.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ auf $0,1\%$ genau. (6 BE)

   (b) Man wählt nun 100 Ziffernschlösser zufällig aus. $X_i$ ist die Anzahl der Einsen in der Geheimzahl des $i$-ten Schlosses. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$. (3 BE)

   (c) Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow die Mindestwahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Erwartungswert von $Y$ um weniger als 15 verfehlt wird. (6 BE)

4. Um einen Hinweis auf die Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Geheimzahlen zu erhalten, werden im Laufe eines Jahres 20 000 Schlösser überprüft. Es wird folgender Test durchgeführt: Man bestimmt die Anzahl $T$ der Geheimzahlen, die die Ziffer 1 genau einmal enthalten. Liegt $T$ im Intervall $[7100; 7300]$, dann hält man an der Nullhypothese $H_0 :=$ „Der Anteil der Geheimzahlen, die die Ziffer 1 genau einmal enthalten, beträgt 36%“ fest; andernfalls lehnt man sie ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lehnt man die Nullhypothese irrtümlich ab? Verwenden Sie dabei die Normalverteilung. (7 BE)