

# BAYERN Abitur 1990 Mathematik Leistungskurs

## Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} 4 \cdot (1 - x) \cdot e^{x-1} & \text{für } x \leq 1 \\ -\frac{4 \cdot \ln x}{x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet.

1. (a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion  $f$  an und bestimmen Sie das Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ . (3 BE)
- (b) Ermitteln Sie die erste Ableitung von  $f$ . Untersuchen Sie insbesondere, ob diese Ableitung auch an der Stelle  $x = 1$  existiert.  
[Teilergebnis:  $f' : x \mapsto \begin{cases} -4x \cdot e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 4x^{-2} \cdot (\ln x - 1) & \text{für } x > 1 \end{cases}$ ]  
Berechnen Sie die 2. Ableitung von  $f$  für  $x \neq 1$ , und bestimmen Sie den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert der 2. Ableitung an der Stelle  $x = 1$ . (11 BE)
- (c) Bestimmen Sie die Lage und Art der Extrempunkte sowie die Wendepunkte des Graphen  $G_f$ . Prüfen Sie, ob für  $x = 1$  ein Wendepunkt vorliegt. (9 BE)
- (d) Zeichnen Sie den Graphen  $G_f$  für  $-3 \leq x \leq 5$  unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Querformat; Längeneinheit 2 cm). tragen Sie auch die Tangente bei  $x = 1$  ein. (7 BE)

2. Nun wird die Funktion  $g : x \mapsto \int_1^x f(t) dt$  mit  $D_g = \mathbb{R}$  betrachtet.

- (a) Zeigen Sie ohne Ausführung der Integration, dass  $g$  genau eine Nullstelle hat, und bestimmen Sie die Abszissen der Extrem- und Wendepunkte sowie die Art der Extrempunkte des Graphen  $G_g$  von  $g$ . Begründen Sie Ihre Antworten. (7 BE)
- (b) Ermitteln Sie für  $x \leq 1$  eine integralfreie Darstellung von  $g(x)$ . (6 BE)
- (c) Geben Sie den Inhalt  $A$  des Flächenstücks an, das für  $x \leq 1$  vom Graphen  $G_f$  und der  $x$ -Achse begrenzt wird. (3 BE)
- (d) Für  $x \geq e$  gilt:  $f(x) \leq -\frac{4}{x}$ . Begründen Sie damit, dass das für  $x \geq 1$  vom Graphen  $G_f$  und der  $x$ -Achse begrenzte Flächenstück keinen endlichen Inhalt hat. (4 BE)

## Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a : x \mapsto \arctan \left( 1 - \frac{2}{ax} \right)$$

mit  $a \in \mathbb{R}^+$ . Der Graph der Funktion  $f_a$  wird mit  $G_{f_a}$  bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge  $D_{f_a}$  und die Nullstellen der Scharfunktionen  $f_a$ . Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen, wenn  $x$  gegen die Grenzen von  $D_{f_a}$  strebt. (5 BE)
- (b) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Extrempunkte und die Wendepunkte der Graphen  $G_{f_a}$  in Abhängigkeit von  $a$ . Stellen Sie eine Gleichung für die Schar der Wendetangenten  $t_a$  auf.  
[Zur Kontrolle:  $f'_a(x) = \frac{a}{a^2x^2 - 2ax + 2}$ ] (8 BE)
- (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen  $f_a$ . (3 BE)
- (d) Die Tangenten an die Graphen streben bei links- bzw. rechtsseitiger Annäherung an die Definitionslücke bestimmten Grenzlagen zu. Geben Sie die entsprechenden Geradengleichungen an. (3 BE)
- (e) Berechnen Sie die Funktionswerte  $f_5(-2)$  und  $f_5(2)$ . Zeichnen Sie im Bereich  $-2 \leq x \leq 2$  den Graphen  $G_{f_5}$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Querformat; Ursprung des Koordinatensystems in Blattmitte; Längeneinheit 5 cm). (6 BE)

2. Nun werden die Funktionen

$$g_a : x \mapsto \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{a}{(at - 1)^2 + 1} dt,$$

$x \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  betrachtet.

- (a) Berechnen Sie eine integralfreie Darstellung von  $g_a^{-1}(x)$  mit Hilfe der Substitutionsmethode.  
[Ergebnis:  $g_a(x) = \arctan(ax - 1) - \frac{\pi}{4}$ ] (5 BE)
  - (b) Zeigen Sie, dass  $g_a$  und  $f_a$  in  $\mathbb{R}^+$  übereinstimmen. (5 BE)
  - (c) Begründen Sie, dass  $g_a$  umkehrbar ist. Berechnen Sie den Term  $g_a^{-1}(x)$  der Umkehrfunktion von  $g_a$ , und zeichnen Sie den Graphen  $g_a^{-1}$  in das bereits angelegte Koordinatensystem. (8 BE)
3. Berechne Sie den Inhalt des im 4. Quadranten liegenden Flächenstücks, das von den Koordinatenachsen und dem Graphen  $G_{f_a}$  begrenzt wird. Hinweis: Verwenden Sie die in Teilaufgabe 2 erkannten Zusammenhänge. (7 BE)

## Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung  $O$  sind die drei Ebenen:

$$\begin{aligned} E_1 : & 4x_1 - 3x_2 - rx_3 = 0 \\ E_2 : & -x_1 + 7x_2 + rx_3 = 50 \quad (r \in \mathbb{R}) \\ E_3 : & rx_1 - 4x_3 = 6r \end{aligned}$$

und der Punkt  $A(6|8|0)$  gegeben.

1. Zeigen Sie, dass der Punkt  $A$  für jeden Wert von  $r$  in allen drei Ebenen liegt. Welche Bedingung muss  $r$  erfüllen, damit die drei Ebenen nur diesen Punkt gemeinsam haben? (5 BE)
2. Im Folgenden sei  $r = 5$ .
  - (a) Die Ebenen  $E_1, E_2, E_3$  haben im Fall  $r = 5$  eine Gerade  $s$  gemeinsam. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden  $s$  auf. Weisen Sie nach, dass  $s$  auf  $OA$  senkrecht steht.  
[Mögliches Teilergebnis:  $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}$ ] (5 BE)
  - (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $F$ , bezüglich der die Punkte  $O$  und  $A$  Spiegelpunkte zueinander sind. Zeigen Sie, dass  $F$  und die Gerade  $s$  keinen Punkt gemeinsam haben. (3 BE)
  - (c) Mit der Strecke  $[OA]$  als Basis werden nun gleichschenklige Dreiecke  $OAP$  betrachtet, deren Spitzen  $P(p_1|p_2|p_3)$  in der Ebene  $E_2$  liegen. Bestimmen Sie für die Menge  $h$  dieser Punkte  $P$  eine Gleichung in Parameterform. Bestätigen Sie ferner, dass  $h$  parallel zu  $s$  liegt.  
[Mögliches Teilergebnis:  $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ ] (7 BE)
  - (d) Ein spezieller Punkt von  $h$  ist  $P'(1|5, 5|2, 5)$ . Welche Neigung hat die Ebene des Dreiecks  $OAP'$  gegen die  $x_1x_2$ -Ebene? (4 BE)
  - (e) Begründen Sie, dass unter allen in Teilaufgabe c beschriebenen Dreiecken  $OAP$  das Dreieck  $OAP'$  minimalen Flächeninhalt hat. (6 BE)

## Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(12, 5|3|4)$  und  $B(2, 5|6|0)$  gegeben.

1. (a) Eine Ebene  $E$  liegt parallel zur  $x_1$ -Achse und enthält die Punkte  $A$  und  $B$ .  
Stellen Sie für  $E$  eine Gleichung in Normalenform auf.  
[Mögliches Ergebnis:  $E : 4x_2 + 3x_3 - 24 = 0$ ] (4 BE)
- (b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von  $E$  mit der  $x_2$ -Achse bzw.  $x_3$ -Achse. Legen Sie ein Schrägbild des Koordinatensystems an, tragen Sie die Punkte  $A$  und  $B$  ein, und machen Sie die Lage der Ebene  $E$  durch Einzeichnen ihrer Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen deutlich. (4 BE)
2. (a) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Geraden  $g$ , die im Punkt  $B$  auf  $AB$  senkrecht steht und in der Ebene  $E$  liegt. (4 BE)
- (b) Das Rechteck  $ABCD$  soll ganz in der Ebene  $E$ , die Ecke  $C$  außerdem in der  $x_2x_3$ -Ebene liegen.  
Berechnen Sie die Koordinaten von  $C$  und  $D$ .  
[Teilergebnis:  $F : C(0|3|4)$ ] (4 BE)
- (c) Ergänzen Sie die Zeichnung durch das Rechteck  $ABCD$ , ferner durch die Punkte  $A_0, B_0, C_0, D_0$ , die durch senkrechte Projektion von  $A, B, C, D$  auf die  $x_1x_2$ -Ebene entstehen. Welches besondere Viereck bestimmen die Punkte  $A_0, B_0, C_0, D_0$ ? Geben Sie auch die Koordinaten dieser Punkte an. (3 BE)
3. (a)  $A_0B_0C_0D_0$  ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze  $S$  im Inneren oder auf dem Rand von Dreieck  $ACD$  liegt. Für welche Lagen von  $S$  nimmt das Pyramidenvolumen den kleinsten Wert an? Berechnen Sie diesen kleinsten Wert. (8 BE)
- (b) Ermitteln Sie ohne weitere Rechnung die Koordinaten des Fußpunktes  $F$  des Lotes von  $B_0$  auf die Ebene  $A_0C_0C$ , und tragen Sie  $F$  in die Zeichnung ein. (3 BE)

## Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Ein Glücksspielautomat liefert Lose, auf denen jeweils eine siebenstellige Zahl aufgedruckt ist. Diese siebenstellige Zahl besteht nur aus den Ziffern 1 und 2. Die Ziffer 1 wird dabei mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 und die Ziffer 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 erzeugt.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$E_1 :=$  „Die aufgedruckte Zahl beginnt mit 222“;

$E_2 :=$  „Auf den ersten vier Stellen kommt die Ziffer 2 genau zweimal vor“;

$E_3 :=$  „Die aufgedruckte Zahl ist kleiner als 1112111“. (5 BE)

2. Ein Spiel beginnt mit dem Kauf eines Loses. 1 Los kostet 1 DM. Die Zufallsgröße  $A$  sei Auszahlung für ein Los. Es gilt folgender Auszahlungsplan:

Anzahl $k$ der Ziffern 2	$k < 4$	4	5	6	7
Auszahlung in DM	0	3	10	40	100

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße  $A$  (auf 5 Dezimalstellen gerundet), ihren Erwartungswert und ihre Varianz. (6 BE)

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße  $G = \text{Gewinn} = \text{Auszahlung} - \text{Einsatz}$ . (2 BE)

(c) Nach wie vielen Spielen unterscheidet sich das arithmetische Mittel der Gewinne eines Spielers mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% um weniger als 0,5 DM vom Erwartungswert  $E(G)$ . Verwenden Sie die Tschebyschow-Ungleichung. (7 BE)

3. Der Besitzer des Automaten vermutet, dass der Anteil der Gewinnlose mit der Auszahlung 10 DM größer ist als 2,5%. Zur Überprüfung zieht er 1000 Lose und bestimmt die Anzahl  $Z$  der 9 DM-Gewinne. Dann testet er die Nullhypothese „ $P(A = 10) = 0,025$ “ gegen die Alternative „ $P(A = 10) > 0,025$ “. Wie lautet die Entscheidungsregel, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art höchstens 5% betragen soll? Verwenden Sie die Poissonverteilung. (8 BE)

4. Um das Spiel attraktiver zu gestalten, erhält der Spieler eine zusätzliche Chance: Zieht er kein Gewinnlos (also kein Los mit positivem Gewinn), ist aber unter den ersten vier Stellen genau zweimal die Ziffer 2, so darf er ohne weiteren Einsatz dem Glücksspielautomaten ein weiteres Los, Freilos genannt, entnehmen. Bei einem Spiel dürfen höchstens zwei Freilose gezogen werden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit darf der Spieler mindestens ein Freilos entnehmen? (4 BE)

(b) Ein Spieler erzielt einen Haupttreffer von 100 DM. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschieht dies durch mindestens ein Freilos? (8 BE)

## Wahrscheinlichkeitsrechnung II

1. An einer Tankstelle wird jedes tankende Auto überprüft, ob es mit einem Katalysator ausgerüstet ist (K-Auto) oder nicht.
  - (a) In einer Schlange von 20 Autos vor der Tankstelle stehen genau 5 K-Autos.
    - i. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es, wenn man nur K-Autos und Nicht-K-Autos unterscheidet?
    - ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die fünf K-Autos in der 2. Hälfte der Schlange?
    - iii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die fünf K-Autos direkt hintereinander? (6 BE)
  - (b) Wie groß müsste der Anteil  $p$  der K-Autos sein, damit unter 20 Autos mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein K-Auto ist? (5 BE)
  - (c) Wie viele Autos müssen mindestens überprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% die relative Häufigkeit der K-Autos von der tatsächlichen (unbekannten) Wahrscheinlichkeit für ein K-Auto um weniger als 2% abweicht? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow und wählen Sie für  $p(1 - p)$  eine geeignete Abschätzung. (5 BE)
  - (d) Durchschnittlich tanken täglich zwischen 23 Uhr und 24 Uhr 4 K-Autos an der Tankstelle. Bestimmen Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung die Wahrscheinlichkeit, dass heute zwischen 23 Uhr und 24 Uhr mindestens 5 K-Autos tanken. (4 BE)
2. Zwei Firmen A und B liefern ein Bauteil T zu den Katalysatoren. 20% der Bauteile T der Firma A sind fehlerhaft, von denen der Firma B sind sogar 30% fehlerhaft.
  - (a)  $\frac{2}{3}$  aller fehlerhaften Bauteile T sind von der Firma A. Wieviel Prozent der Bauteile T werden demnach von der Firma A geliefert? (8 BE)
  - (b) Bei einer Lieferung von 400 Bauteilen T, die alle von der gleichen Firma stammen, fehlen die Lieferpapiere, so dass der Hersteller nicht mehr feststellbar ist.
    - i. Folgende Entscheidungsregel wird getroffen: Sind unter den 400 Bauteilen mindestens 99 fehlerhaft, dann wird die Lieferung der Firma B zugeordnet, sonst der Firma A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird damit die Lieferung fälschlicherweise der Firma B zugeordnet? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (5 BE)
    - ii. Bis zu welchem Höchstwert der Anzahl von fehlerhaften Bauteilen kann man die Lieferung der Firma A zuordnen, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Zuordnung zu A höchstens 1% sein soll? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (7 BE)