BAYERN Abitur 1991 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto \frac{ax}{1+x^2}$$

mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Graph der Funktion f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1. (a) Geben Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$ an. Zeigen Sie, dass G_{f_a} zum Ursprung des Koordinatensystems symmetrisch ist. (3 BE)

   (b) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche von f_a sowie die Lage und die Art der Extrempunkte von G_{f_a}. Geben sie eine Gleichung der Tangente t_a an G_{f_a} im Ursprung an.

   [Zur Kontrolle: $f_a'(x) = \dfrac{a(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$] (9 BE)

   In den folgenden beiden Teilaufgaben c und d sei $a = 2\sqrt{2}$.

   (c) Zeigen Sie, dass G_{f_a} genau zwei Tangenten g und h besitzt, die auf der Tangente t_a senkrecht stehen. Tragen Sie die Tangente t_a sowie g und h in ein kartesisches Koordinatensystem (Querformat, Ursprung in Blattmitte, Längeneinheit 2 cm) ein. (9 BE)

   (d) Zeichnen Sie für $a = 2\sqrt{2}$ den Graphen G_{f_a} unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse. Verwenden Sie dabei auch die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{4}$ und 4. Zeigen Sie ohne Berechnung der 3. Ableitung, dass g und h Wendetangenten sind. (9 BE)

2. Nun wird die Schar der Funktionen $h_a : x \mapsto \ln f_a(x)$ mit $\mathbb{D}_{h_a} = \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Der Graph der Funktion h_a wird mit G_{h_a} bezeichnet.

   (a) Ermitteln Sie das Verhalten von $h_a(x)$ an den Grenzen von $\mathbb{D}_{h_a}$. (3 BE)

   (b) Zeigen Sie: $h_a'(x) = \dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)}$.

   Wie wirkt sich somit eine Änderung des Parameterwertes a auf den Graphen G_{h_a} aus? (4 BE)

   (c) Weisen Sie nach, dass h_a die Wertemenge $]-\infty; \ln \frac{a}{2}]$ hat. (3 BE)

   (d) Bestimmen sie für $a = 2\sqrt{2}$ die Nullstellen der Funktion h_a und zeichnen Sie G_{h_a} in das bereits angelegte Koordinatensystem ein. Verwenden Sie dabei auch die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{4}$ und 4. (5 BE)

   (e) Bestimmen Sie eine Stammfunktion H_a von h_a, indem Sie z. B. mit partieller Integration beginnen. (5 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto (\sin x) \cdot \mathrm{e}^{a \cdot \cos x}$$

mit $\mathbb{D}_{f_a} = [2; 2\pi]$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

1. (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a. (2 BE)

   (b) Berechnen Sie die fünf Punkte, welche allen Scharkurven gemeinsam sind. (3 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass jede Scharkurve symmetrisch zum Punkt $P(\pi|0)$ ist. Nutzen Sie bei den folgenden Teilaufgaben diese Tatsache aus. (5 BE)

2. (a) Weisen sie nach, dass die Ableitungsfunktion f_a' genau zwei Nullstellen x_1, x_2 in $\mathbb{D}_{f_a}$ hat, und ermitteln Sie diese in Abhängingkeit von a.
   [Teilergebnis: $x_1 = \arccos \frac{\sqrt{4a^2+1}-1}{2a}$] (10 BE)

   (b) Bestimmen Sie für $a = \sqrt{2}$ Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f_a. (5 BE)

3. (a) Zeigen Sie, dass für die 2. Ableitung von f_a gilt:
   $f_a''(x) = f_a(x) \cdot \left[a^2 \cdot (\sin x)^2 - 3a \cdot (\cos x) - 1\right]$ (5 BE)

   (b) Berechnen Sie für $a = \sqrt{2}$ die Koordinaten der Punkte mit $f_a''(x) = 0$, $0 < x < 2\pi$. Diese Punkte sind Wendepunkte (Nachweis nicht erforderlich). (5 BE)

4. Zeichnen sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $a = \sqrt{2}$ den Graphen von f_a in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm). Verwenden Sie dazu auch die Steigungen des Graphen an den Stellen 0, π und 2π. (6 BE)

5. (a) Ermitteln Sie $\int f_a(x)\,\mathrm{d}x$ durch Substitution. (6 BE)

   (b) Vom Graphen von f_a und der x-Achse wird im 1. Quadranten ein Flächenstück eingeschlossen. Berechnen Sie seinen Inhalt in Abhängigkeit von a. (3 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind das Büschel der Ebenen $E_k : kx_1 - kx_2 + x_3 = 8$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und der Punkt $A(12|12|8)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie: Der Punkt A gehört allen Büschelebenen an. (1 BE)

   (b) S_{ik} sei der Schnittpunkt der x_i-Achse ($i = 1, 2, 3$) mit der Ebene E_k. Bestimmen Sie die Koordinaten der drei Punkte S_{ik}. (3 BE)

   (c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an, der sich die Ebenen E_k für $|k| \to \infty$ nähern. (4 BE)

   (d) Weisen Sie nach, dass es zu jeder Ebene E_k in dem Ebenenbüschel eine Ebene E_k^* gibt, die auf E_k senkrecht steht. Welcher Zusammenhang muss dazu zwischen k^* und k bestehen? (3 BE)

   (e) Zeichnen Sie nach nebenstehendem Muster ein Schrägbild des Koordinatensystems. Tragen Sie für die Ebenen E_1 und E_2 die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen ein. Zeichnen Sie auch den Punkt A ein. (4 BE)

   (f) In den bisherigen Untersuchungen ergab sich ein weiterer, von A verschiedener Punkt, den die Ebenen E_k gemeinsam haben. Um welchen Punkt handelt es sich? Zeigen Sie, dass die Punkte S_{ik} für $i = 1, 2, 3$ und A ein Trapez bilden. Zeichnen Sie diese Trapeze für $k = 1$ und $k = 2$ ein. (6 BE)

2. (a) Der Ursprung O und die Punkte S_{ik} ($i = 1, 2, 3$) bestimmen jeweils eine Pyramide P_k. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide in Abhängigkeit von k. (3 BE)

   (b) $M_k(m_k| - m_k|4)$ ist der Mittelpunkt der Kugel, auf der die vier Ecken der Pyramide P_k liegen. Bestimmen Sie m_k und den Kugelradius r_k. (6 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}$$

sowie die beiden Punkte $A(2|0|-8)$ und $B(1|-1|-4)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass A und B auf einer zu g parallelen und von g verschiedenen Geraden h liegen. (3 BE)

   (b) Durch die Geraden g und h wird eine Ebene E bestimmt. Stellen Sie für E eine Gleichung in Normalform auf.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 4x_1 - 8x_2 - x_3 - 16 = 0$] (4 BE)

   (c) Welchen Abstand haben die Geraden g und h? (5 BE)

2. Die Ebene E von Teilaufgabe 1b schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten S_1, S_2 und S_3. Diese Punkte und der Ursprung sind die Ecken einer dreiseitigen Pyramide. Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche dieser Pyramide. (6 BE)

3. (a) Durch Spiegelung der Ebene E von Teilaufgabe 1b an der x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems erhält man die Ebene E'. Ermitteln Sie für E' eine Gleichung in Normalenform. (5 BE)

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E'.
   [Mögliches Ergebnis: $s : \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$] (3 BE)

   (c) Es gibt außer der x_1x_2-Ebene noch eine zweite Ebene F, bezüglich der die Ebenen E und E' spiegelbildlich liegen. Beschreiben Sie die Lage von F, und geben Sie für F eine Gleichung in Normalform an. (4 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. Für eine Abschlussprüfung werden 4 Aufgaben im Fachgebiet A, 6 Aufgaben im Fachgebiet B und 3 Aufgaben im Fachgebiet C angeboten. Wie viele Möglichkeiten der Aufgabenzusammenstellung hat ein Prüfling, wenn er 4 Aufgaben zu lösen hat und aus jedem Fachgebiet mindestens eine Aufgabe wählen muss? (4 BE)

2. Erfahrungsgemäß sind 25% der Kandidaten Wiederholer der Prüfung; 15% der Wiederholer und 28% der anderen Kandidaten treten von der Prüfung zurück. Ein Kandidat wird zufällig ausgewählt.

   Verwenden Sie folgende Bezeichnungen:

   W := „Der Kandidat ist Wiederholer“,

   R := „Der Kandidat ist von der Prüfung zurückgetreten“.

   (Die Zahl der Prüflinge kann als sehr groß angenommen werden.)

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Kandidat Wiederholer und zugleich einer, der von der Prüfung zurückgetreten ist? (3 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Kandidat Wiederholer, wenn er an der Prüfung teilgenommen hat? (5 BE)

   (c) Untersuchen Sie die Ereignisse W und R auf Unabhängigkeit. (4 BE)

   (d) Bei der Anmeldung zur Prüfung werden die Kandidaten befragt, ob sie Wiederholer der Prüfung seien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass spätestens auf dem 6. Platz der Anmeldeliste ein Wiederholer steht? (4 BE)

   (e) Nach wie vielen Anmeldungen steht mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens ein Wiederholer auf der Anmeldeliste? (4 BE)

3. Zur Abschlußprüfung wird Papier geliefert, das nach Angabe der Lieferfirma mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% fehlerhaft und damit unbrauchbar ist.

   (a) Ein Prüfer teilt die ersten 200 Blatt Papier aus und stellt fest, daß 17 Blatt nicht zu verwenden sind. Kann die Angabe der Lieferfirma aufgrund dieser Stichprobe auf dem 5%-Signifikanzniveau aufrechterhalten werden? (6 BE)

   (b) Zur Abschlußprüfung benötigt man erfahrungsgemäß 5000 Blatt Papier. Wie viele Blatt müssen beim Zutreffen der Angabe der Lieferfirma wenigstens eingekauft werden, damit das Papier mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% zur Durchführung der Prüfung ausreicht? Näherung mit der Normalverteilung! (10 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Die einzelnen Stücke eines Massenartikels werden vom Fließband durch eine Maschine in Verpackungsbehälter befördert. Die Soll-Stückzahl in einer Packung beträgt 20; daher sind für das Füllen einer Packung 20 Greifbewegungen der Maschine vorgesehen. Die „Greifsicherheit“ g einer Maschine ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Stück vom Fließband tatsächlich in die Packung gelangt.

1. Bei einer bestimmten Maschine ist die Greifsicherheit $g_1 = 99{,}5\%$.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt in einer Packung genau 1 Stück? (3 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt in einer nicht einwandfrei gefällten Packung genau 1 Stück? (5 BE)

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht die Maschine bei 1000 Greifbewegungen mehr als 10 Fehlgriffe? Näherung mit der Poisson-Verteilung! (4 BE)

2. Bei einer anderen Maschine ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung vollständig ist, $p = 80\%$. Ihre Tagesproduktion besteht aus 800 Packungen.

   (a) Berechnen Sie die Greifsicherheit g_2 dieser Maschine. (3 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag mehr als 150 Packungen unvollständig sind? Näherung mit der Normalverteilung! (5 BE)

   (c) Die Packungen werden vor dem Versand auf Vollständigkeit untersucht und gegebenenfalls aufgefüllt. Wie viele unvollständige Packungen müssen die dafür zuständigen Arbeitskräfte pro Tag wenigstens bearbeiten können, damit sie die anfallende Arbeit mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit bewältigen? Näherung mit der Normalverteilung! (7 BE)

3. Jemand will die Wahrscheinlichkeit p (vgl. Teilaufgabe 2) testen, indem er 50 Packungen dieser Maschine auf Vollständigkeit überprüft. Er wählt für die Nullhypothese $p \geq 0{,}80$ den Annahmebereich A so, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art höchstens 5% beträgt.

   (a) Bestimmen Sie den Annahmebereich A. (3 BE)

   (b) Erstellen Sie eine Wertetabelle der zugehörigen Operationscharakteristik (OC-Kurve) für $p = 0{,}55$ bis $p = 0{,}85$ mit $\Delta p = 0{,}05$; runden Sie dabei die Werte des Tafelwerks auf 2 Dezimalen. Zeichnen Sie die OC-Kurve (Einheit auf beiden Achsen 10 cm). Markieren Sie für $p = 0{,}80$ die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. (6 BE)

   (c) Ermitteln Sie im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit Hilfe der OC-Kurve denjenigen Wert der Greifsicherheit g_3, bei dem die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art 5% beträgt. (4 BE)