BAYERN Abitur 1992 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

1. Gegeben ist die Schar reeller Funktionen

$$f_k : x \mapsto \frac{2k}{ke^x + 1}$$

mit $k > 0$ und maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$. Der zu f_k gehörende Graph sei G_k.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_k$ und das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge. Untersuchen Sie G_k auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. (4 BE)

(b) Untersuchen Sie f_k auf Monotonie, und geben Sie die Wertemenge $\mathbb{W}_k$ an.

[Zur Kontrolle: $f_k'(x) = \dfrac{-2k^2e^x}{(ke^x + 1)^2}$] (4 BE)

(c) Begründen Sie, dass folgende Ungleichung gilt: $0 < f_k(x) < 2e^{-x}$. Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der Ungleichung die von k unabhängige Menge aller Punkte $(x|y)$ der Ebene, durch die Scharkurven verlaufen. Berechnen Sie auch die Grenzwerte $a(x) = \lim\limits_{k \to 0} f_k(x)$ und $b(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$. (9 BE)

(d) Begründen Sie, dass jede Funktion f_k in $\mathbb{D}_k$ umkehrbar ist, und schreiben Sie den Term der Umkehrfunktion in der Form $f_k^{-1}(x)$. Geben Sie für f_k^{-1} auch die Definitionsmenge und die Wertemenge an.

[Zur Kontrolle: $f_k^{-1}(x) = \ln \dfrac{2k - x}{kx}$] (5 BE)

(e) Der Punkt $Q_k(k|-\ln k)$ ist Symmetriepunkt des Graphen von f_k^{-1}. Weisen Sie dies nach, und geben Sie den Symmetriepunkt P_k von G_k an. Die Symmetriepunkte P_k liegen auf einer Kurve c. Berechnen Sie deren Gleichung. (8 BE)

(f) Zeichnen Sie die Grenzkurven aus Teilaufgabe 1c mit den Gleichungen $y = a(x)$ und $y = b(x)$ sowie die Kurve c aus Teilaufgabe 1e. Kennzeichnen Sie jene Gebiete der Ebene, in denen keine Scharkurven verlaufen. Ermitteln Sie die Steigung von G_2 im Symmetriepunkt P_2, und zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse den Graphen G_2.

(Platzbedarf: $-4 \leq x \leq 3$; $-1 \leq y \leq 6$; Längeneinheit 2 cm) (9 BE)

2. (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int (2k - f_k(x))\,dx$, und bestimmen Sie daraus $\int f_k(x)\,dx$.

[Teilergebnis: $\int f_k(x)\,dx = -2k\ln(k + e^{-x}) + C$] (7 BE)

(b) Die x-Achse und der Graph G_k begrenzen für $x \geq -\ln k$ ein Flächenstück. Zeigen Sie, dass sein Inhalt $2k\ln 2$ beträgt. (4 BE)

Infinitesimalrechnung II

1. Gegeben ist die reelle Funktion

$$f : x \mapsto \frac{2|x|}{1-x^2}$$

mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der zu f gehörende Graph sei G_f.

   (a) Geben Sie $\mathbb{D}_f$ an. Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie. Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ an den Rändern von $\mathbb{D}_f$, und geben Sie die Asymptoten des Graphen G_f an. (5 BE)

   (b) Berechnen Sie $f'(x)$, untersuchen Sie das Verhalten von $f'(x)$ bei $x = 0$, und geben Sie die Definitionsmenge von f' an.

   [Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ für $x > 0$ und $x \neq 1$]

   Geben Sie die Monotoniebereiche von f an und weisen Sie nach, dass der Graph G_f genau einen Extrempunkt hat. (8 BE)

   (c) Berechnen Sie die Funktionswerte von f an den Stellen $\frac{1}{2}$, 2 und 3, und zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse. (Längeneinheit 2 cm; Ursprung in Blattmitte) (6 BE)

2. Wir betrachten nun die Integralfunktion $F : x \mapsto \int_{-0,5}^{x} f(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_F =]-1;1[$.

   (a) Begründen Sie ohne Berechnung des Integrals, dass F in $\mathbb{D}_F$ differenzierbar ist und genau eine Nullstelle aufweist. (3 BE)

   (b) Geben Sie eine integralfreie Darstellung von $F(x)$ an. (8 BE)

3. Nun wird die Funktion $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_h$ betrachtet. Der zu h gehörende Graph sei G_h.

   (a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_h$, und untersuchen Sie G_h auf Symmetrie. Geben Sie das Verhalten von $h(x)$ an den Rändern von $\mathbb{D}_h$ an. (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie ohne Berechnung der Ableitung die Monotoniebereiche der Funktion h, ihr relatives Extremum und ihre Wertemenge $\mathbb{W}_h$. (3 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass gilt:

$$h(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{für } 0 < x < 1 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan x & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

   Ermitteln Sie das Verhalten von $h'(x)$ in der Umgebung von 0 und von 1. (8 BE)

   (d) Zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnene Ergebnisse den Graphen G_h in das Koordinatensystem von Aufgabe 1c. (5 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(8|0|0)$, $B(8|3|0)$, $C_t(4t+5|3|-3t)$, $t \in \mathbb{R}$, und $D(0|0|6)$ gegeben.

1. (a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte C_t liegen. Stellen Sie eine Normalengleichung derjenigen Ebene auf, die A und B enthält und zu g parallel ist. (4 BE)

   (b) Für welche Werte von t hat das Dreieck ABC_t einen rechten Winkel? (3 BE)

   (c) Für welche Werte von t ist das Dreieck ABC_t gleichschenklig? [zur Kontrolle: $t_1 = 0$, $t_2 = 0,96$] (4 BE)

   (d) Legen Sie eine Schrägbildzeichnung für die beiden in Teilaufgabe 1c ermittelten gleichschenkligen Dreiecke an. Schraffieren Sie die beiden Dreiecke. Vervollständigen Sie die Zeichnung im weiteren Verlauf der Aufgabe. (4 BE)

2. (a) Weisen Sie nach, dass die Volumenzahl der Pyramide ABC_tD 9 ist. Geben Sie eine geometrische Deutung dafür, dass dieses Ergebnis von t unabhängig ist. (5 BE)

   (b) Ermitteln Sie den Abstand d der Punkte C_t von der Ebene ABD. [zur Kontrolle: $d = 1,8$] (4 BE)

   (c) Begründen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe 1c geometrisch, warum für $t = 0,48$ die Entfernung $\overline{BC_t}$ minimal ist. Bestimmen Sie den Wert dieses Minimums. Deuten Sie Ihr Ergebnis raumgeometrisch. (6 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene E mit der Gleichung $4x_1 - x_2 - x_3 + 8 = 0$, die Gerade g durch die Punkte $A(3|0|2)$ und $B(3|-1|3)$ sowie der Punkt $S(5|-1,5|2,5)$ gegeben.

1. (a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Koordinatensystems mit allen gegebenen Stücken, wobei die Ebene E durch ihre Spurgeraden veranschaulicht werden soll. (4 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass g parallel zu E und dass die Gerade SB ein Lot auf E ist. (3 BE)

2. Die Gerade $g = AB$ wird durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum S auf die in E liegende Gerade $g' = A'B'$ abgebildet; dabei sind A' und B' die Bildpunkte von A und B.

   (a) Berechnen Sie die Koordinaten von A'.
   [zur Kontrolle: $A'(-1|3|1)$] (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung von g'. Zeichnen sie B' und g' in die Skizze ein. (3 BE)

   (c) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $[AA']$? (2 BE)

3. F ist diejenige Ebene, die g enthält und zu E parallel ist.

   (a) Stellen Sie eine Normalengleichung von F auf. (2 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $C(4|1|5)$ in F liegt, dass BC auf g senkrecht steht und dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ hat. (4 BE)

   (c) Das Bild des Punktes C bei der in Aufgabe 2 beschriebenen zentrischen Streckung sei C'. Bestimmen Sie ohne Berechnung der Koordinaten von C' den Inhalt der Pyramide $A'B'C'S$. Begründen Sie Ihr Vorgehen. (8 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. Anton, Barbara, Christa und Dietmar nehmen an einem Schützenfest teil. Sie treffen in der angegebenen Reihenfolge mit den Wahrscheinlichkeiten $0,8$; $0,6$; $0,5$ und $0,4$ ins Schwarze einer Scheibe.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt Anton bei 12 Schüssen

      i. mindestens 10 Treffer,

      ii. genau 10 Treffer, die unmittelbar aufeinanderfolgen? (7 BE)

   (b) Barbara schießt solange auf eine Scheibe, bis sie zum erstenmal ins Schwarze trifft, höchstens aber 4mal. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Schüsse und den Erwartungswert für die Anzahl der Treffer. (8 BE)

   (c) Anton, Barbara, Christa und Dietmar schießen gleichzeitig einmal auf eine Scheibe. Insgesamt werden dabei 3 Treffer erzielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt einer davon von Christa? (7 BE)

2. Bei jedem Schützenfest findet ein Wettbewerb mit 112 Teilnehmern statt. Jeder Teilnehmer zahlt 50 DM Startgeld und gibt eine bestimmte Anzahl von Schüssen auf eine Scheibe ab. Erfahrungsgemäß erzielt ein Schütze dabei mit der Wahrscheinlichkeit 10% ausschließlich Treffer. In diesem Fall erhält er einen Preis von 400 DM. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Startgelder zur Auszahlung aller Preise nicht ausreichen? Näherung mit der Normalverteilung! (8 BE)

3. Dietmar kauft sich ein neues Gewehr. Er glaubt, damit eine höhere Treffsicherheit als bisher zu erreichen. Um dies zu prüfen, schießt er mehrmals nacheinander auf eine Scheibe.

   (a) Wie oft müsste er mindestens schießen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die relative Häufigkeit der Treffer von der neuen, unbekannten Treffsicherheit um weniger als $0,02$ abweicht, mindestens 90% beträgt? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow! (6 BE)

   (b) Tatsächlich schießt Dietmar nur 100mal. Er will das neue Gewehr für besser als das alte einstufen, wenn er mindestens 48 Treffer erzielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält er das neue Gewehr irrtümlich für besser als das alte, mit dem er eine Treffsicherheit von $0,4$ hatte? (4 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Ein Golfball eines bestimmten Herstellers wird von den Spielern mit einer Wahrscheinlichkeit von 8% als unbrauchbar eingestuft.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Schachtel mit 12 Golfbällen mindestens 10 brauchbare Bälle sind? (5 BE)

2. In einer Schachtel mit 12 Golfbällen befinden sich 3 unbrauchbare. Ein Spieler greift zufällig 4 Bälle aus dieser Schachtel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er dabei höchstens einen unbrauchbaren Ball entnimmt? (5 BE)

3. Vor einem Golfturnier werden die vom Hersteller gelieferten Bälle kontrolliert. Dabei werden 4% der brauchbaren und 97% der unbrauchbaren Bälle ausgesondert.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Kontrolle ein Ball richtig beurteilt? (4 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesonderter Ball unbrauchbar? (4 BE)

4. Ein Abnehmer von Golfbällen vermutet, dass der Anteil unbrauchbarer Bälle über 8% gestiegen ist. Um diese Vermutung zu testen, untersucht er 500 Bälle. Ab welcher möglichst klein gewählten Anzahl unbrauchbarer Bälle kann er seine Vermutung annehmen, wenn er dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% in Kauf nehmen will? Näherung mit der Normalverteilung! (9 BE)

5. Bei der Produktion von Golfbällen schwankt der Balldurchmesser um den Erwartungswert $43,00$ mm. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Durchmesser eines beliebig herausgegriffenen Balls weniger als $2,00$ mm vom Erwartungswert abweicht, soll mindestens 90% betragen. Schätzen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ab, wie groß die Standardabweichung hierfür höchstens sein darf. (6 BE)

6. Erfahrungsgemäß werden im Mittel 5% der vom Hersteller ausgelieferten Bälle aufgrund von Mängeln zurückgegeben. Für jeden zurückgegebenen Ball entsteht dem Hersteller ein Verlust von $0,80$ DM, für jeden nicht zurückgegebenen ein Gewinn von $1,20$ DM. Wit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt der Hersteller bei einer Lieferung von 200 Bällen einen Gesamtgewinn von mindestens 210 DM? (7 BE)