BAYERN Abitur 1993 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Durch

$$f_k : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 + k^2}{x}\right)$$

mit $k > 0$ ist eine Schar von Funktionen mit jeweils maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$ gegeben. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1. (a) Geben Sie $\mathbb{D}_k$ an und untersuchen Sie das Verhalten von G_k an den Grenzen von $\mathbb{D}_k$. (3 BE)

   (b) Ermitteln Sie die Nullstellen von f_k (Fallunterscheidung!). (5 BE)

2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_k und geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_k an.

   Auf welcher Ortskurve c liegen die Extrempunkte?

   [Zur Kontrolle: $f_k'(x) = \dfrac{x^2 - k^2}{x(x^2 + k^2)}$] (9 BE)

3. Zeigen Sie, dass $f_k(x) - \ln x > 0$ gilt, und berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty}(f_k(x) - \ln x)$. Deuten Sie beides geometrisch. (5 BE)

4. Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse für $k = 1$ und $k = \frac{1}{2}$ die Graphen G_k im Bereich $0 < x \leq 4$ in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 4 cm). Zeichnen Sie auch den Graphen von $x \to \ln x$ und die Ortskurve c aus Teilaufgabe 2 ein. (8 BE)

5. (a) Begründen Sie, dass die Einschränkung von f_k auf das Intervall $[k; \infty[$ eine Umkehrfunktion g_k hat. Geben Sie die Definitionsmenge von g_k an. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie $g_k'(\ln \frac{5k}{2})$, ohne die Umkehrfunktion explizit zu ermitteln. (7 BE)

6. (a) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f_1. Beginnen Sie mit partieller Integration.

   [Zur Kontrolle: eine mögliche Stammfunktion ist

   $x \mapsto 2 \cdot \arctan(x) + x \cdot \ln\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right) - x$.] (6 BE)

   (b) Berechnen Sie $\int\limits_1^\infty (f_1(x) - \ln x)\, \mathrm{d}x$, und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden:

   $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. (4 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktionen

$$f_k : x \mapsto x \cdot (k - \sqrt{x})$$

mit $k > 0$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit der x-Achse sowie das Verhalten von $f_k(x)$ an den Grenzen der Definitionsmenge. (3 BE)

   (b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_k und bestimmen Sie die Extrempunkte von G_k nach Lage und Art. Berechnen Sie auch $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_k'(x)$. (7 BE)

   (c) Zeichnen Sie G_3 im Bereich $0 \leq x \leq 12$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Tangenten in den Nullstellen (Längeneinheit 1 cm). (4 BE)

   Die beiden Tangenten an G_k im Ursprung O und im Schnittpunkt N von G_k mit der positiven x-Achse schneiden sich im Punkt A.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt J des Dreiecks ONA in Abhängigkeit von k.

   [Zur Kontrolle: $J = \frac{1}{6}k^5$] (7 BE)

3. Auf G_k wird ein Punkt $P(r|s)$ mit $0 < r < k^2$ gewählt. Seine senkrechte Projektion auf die x-Achse heisst Q.

   (a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P bei festem k so, dass das Fünfeck $OPQNA$ einen extremalen Inhalt hat. Für die Art des Extremums genügt eine anschauliche Begründung. (9 BE)

   (b) Untersuchen Sie, ob der Inhalt des Fünfecks $OPQNA$ bei festem r und veränderlichem k $(0 < r < k^2)$ ein relatives Extremum annehmen kann. (6 BE)

4. Die Funktion f_3 ist in $\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion einer Funktion g. Bestimmen Sie mit möglichst wenig Rechenaufwand diejenigen Werte von $t \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: $\int\limits_t^x g(z)\,\mathrm{d}z > f_3(x)$. (4 BE)

5. Untersucht wird nun die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $h_k : x \mapsto \arctan f_k(x)$.

   (a) Zeigen Sie, dass f_k und h_k gleiche Nullstellen und gleiche Extremstellen besitzen. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} h_k(x)$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} h_k'(x)$. (6 BE)

   (b) Berechnen Sie $h_3(4)$, und skizzieren Sie den Graphen von h_3 unter Verwendung aller Ergebnisse in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1c. (4 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Ebene E durch die Punkte $A(4|5|0)$, $B(0|1|-2)$ und $C(6|-5|7)$ bestimmt. Weiterhin sind drei parallele Geraden g, h und k mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben, wobei $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$ gilt.

1. (a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform und zeigen Sie, dass die Geraden g und h in der Ebene F mit der Gleichung $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$ liegen.
   [Mögliches Ergebnis: $E: -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3 = 0$] (5 BE)

   (b) Zeigen Sie: Die Geraden g, h und k sind Lotgeraden von E, und E ist Lotebene von F. (3 BE)

   (c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes C von der Ebene F und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (4 BE)

   (d) Fertigen Sie eine Zeichnung an (z. B. gemäß nebenstehender Skizze, Ursprung in Blattmitte, Einheit 1 cm), aus der die Lagebeziehungen der bisher genannten geometrischen Elemente hervorgehen. Es ist hilfreich, die Zeichnung im folgenden zu ergänzen. (5 BE)

   (e) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche eines geraden Prismas, dessen Seitenkanten auf den Geraden g, h und k liegen. Die Deckfläche $A_1B_1C_1$ liegt in der Ebene E_1. Geben Sie eine Gleichung von E_1 in Normalenform an, wenn der Ursprung zwischen E_1 und E liegt und E_1 von E den Abstand 9 hat. (5 BE)

2. Durch den Punkt $A_2(2|6|2) \in g$ wird eine zu E parallele Ebene E_2 gelegt.

   (a) Die Ebene E_2 schneidet die Gerade h im Punkt B_2. Berechnen Sie B_2. (3 BE)

   (b) Die Ebene durch die Punkte C, A_2 und B_2 zerlegt das Prisma aus Teilaufgabe 1e in zwei Körper, nämlich in die vierseitige Pyramide AA_2B_2BC und einen Restkörper. Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper des Prismas. (5 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die drei Ebenen
$E : 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 = 0$, $F : x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 15 = 0$,
$G : x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$ und der Punkt $A(1|0|2)$ gegeben.

1. (a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F in Parameterform.

   [Mögliches Ergebnis: $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$] (4 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass der Punkt A in E und in G liegt und dass G eine Lotebene der beiden anderen Ebenen ist. (4 BE)

   (c) Der Punkt A wird an der Geraden s gespiegelt. Der Bildpunkt wird mit C, der Schnittpunkt von AC und s mit Z bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten von Z und C.

   [Zur Kontrolle: $Z(1|0{,}5|3)$, $C(1|1|4)$] (5 BE)

   (d) In der Ebene F legen zwei Punkte B und D eine Gerade d fest. Die Punkte B und D können so gewählt werden, dass $ABCD$ ein Rechteck ist, das in einer Lotebene von s liegt. Berechnen Sie die Koordinaten von B und D. (Hinweis: Eine Skizze kann hilfreich sein.)

   [mögliches Ergebnis: $B(2|1|3)$, $D(0|0|3)$] (8 BE)

2. Die Punkte A, B, C und D werden nun mit einem beliebigen Punkt T ($T \neq Z$) auf der Geraden s verbunden: Es entsteht die Pyramide $ABCDT$ mit der Spitze T.

   (a) Begründen Sie, dass $ABCDT$ stets eine gerade Pyramide ist, d. h. dass alle von T ausgehenden Kanten gleich lang sind. (3 BE)

   (b) Wie groß sind die auf Grad gerundeten Winkel zwischen den Seitenflächen und der Grundfläche $ABCD$, wenn alle Eckpunkte der Pyramide von Z gleiche Entfernung haben? (Hinweis: Die Berechnung der Koordinaten von T ist nicht erforderlich.) (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Ein Theater hat 200 Plätze. Man weiß aus Erfahrung, dass bei einer Aufführung ein Platz mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% verkauft wird.

1. Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Ereignisse unabhängig sind.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die nächsten Aufführung mindestens 185 Plätze verkauft? (2 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei den drei folgenden Vorstellungen mindestens noch einmal mit diesem guten Besuch von wenigstens 185 Personen rechnen? (3 BE)

2. Zehn bereundete Ehepaare setzen sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst. Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn

   (a) sich die Personen beliebig setzen, (2 BE)

   (b) die Ehepartner nebeneinander sitzen, (3 BE)

   (c) die Frauen nebeneinander sitzen? (3 BE)

3. Im Programmheft sind im Mittel zwei Druckfehler auf drei Seiten. Berechnen Sie mit der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass auf der dritten Seite mindestens zwei Druckfehler sind. (4 BE)

4. Erfahrungsgemäß kaufen 40% der Besucher ein Programmheft.

   (a) Die Direktion legt für die 200 Besucher einer ausverkauften Vorstellung 90 Hefte bereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Programmheft übrig? (3 BE)

   (b) Wie viele Hefte müssen wenigstens bereitliegen, damit man mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit die zu erwartende Nachfrage nach einem Programmheft bei 200 Besuchern befriedigen kann? (3 BE)

5. Eine Vorstellung wird von Erwachsenen und Jugendlichen besucht. 60% der Erwachsenen und 20% der Jugendlichen kaufen ein Programmheft.

   (a) Wie groß ist der Anteil der Jugendlichen unter den Besuchern, wenn 40% der Besucher ein Programmheft kaufen? (4 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Käufer eines Programmhefts ein Jugendlicher ist? (4 BE)

6. Die Theaterleitung will das Kaufinteresse für ihr Programmheft überprüfen. Dazu soll das Verhalten der nächsten 800 Erwachsenen beobachtet werden. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

   (a) Geben Sie die Entscheidungsregel der Theaterleitung für ihre Nullhypothese H_0: „Mindestens 60% der Erwachsenen kaufen ein Programmheft“ auf dem 5%-Signifikanzniveau an. (6 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht die Theaterleitung irrtümlich davon aus, dass noch mindestens 60% der Erwachsenen das Programmheft kaufen, obwohl die Kaufbereitschaft auf 55% gesunken ist? (3 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

1. Ein „City-Zug“ besteht aus 10 Waggons: 4 Wagen der Touristenklasse (T), 3 Wagen der ersten Klasse (E), 2 Großraumwagen (G) sowie 1 Speisewagen (S). Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Zug zusammenzustellen, wenn nur nach den Kategorien T, E, G und S unterschieden wird und

   (a) sonst keine Vorgaben zu beachten sind, (2 BE)

   (b) die Großraumwaggons am Anfang und am Ende des Zuges stehen und der Speisewagen 5. oder 6. Wagen sein soll? (3 BE)

2. Die meisten Reisenden lassen sich einen Platz reservieren. Dabei kommt es in $0,5\%$ der Reservierungen zu Problemen. Verwenden Sie bei den folgenden beiden Teilaufgaben die Näherung durch die Poisson-Verteilung.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es bei 600 Reservierungen zu mehr als 4 Problemfällen? (3 BE)

   (b) Ab wie vielen Reservierungen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Problemfall auftritt, größer als 90%? (5 BE)

3. Durch eine Umfrage soll der Anteil der Kunden ermittelt werden, die mit dem Reservierungssystem unzufrieden sind. Bestimmen Sie mit der Tschebyschow-Ungleichung die Mindestzahl von Personen, die befragt werden müssen, damit man mit einer Sicherheit von mindestens 95% den gesuchten Anteil mit einer Abweichung von höchstens 5 Prozentpunkten erhalten kann. (5 BE)

4. Auf Grund langjähriger Beobachtungen weiß man, dass 1% der Bahnkunden ohne gültigen Fahrausweis fährt. Ein Kontrolleur erkennt einen Schwarzfahrer (SF) mit 95% und einen Kunden, der eine gültige Fahrkarte hat, mit 98% Sicherheit.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde, der falsch eingeschätzt wird, ein Schwarzfahrer? (4 BE)

   (b) Mit p wird der Anteil der Reisenden mit gültigem Fahrausweis, die als solche erkannt werden, bezeichnet. Der Wert p hat sich so geändert, dass die Ereignisse SF: „Der Kunde ist Schwarzfahrer“ und R: „Der Kunde wird richtig eingeschätzt“ unabhängig sind. Bestimmen Sie den Wert von p. (4 BE)

   (c) Ein Zug ist mit 200 Fahrgästen besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Personen mehr als erwartet ohne gültigen Fahrausweis fahren? (3 BE)

5. Die Nullhypothese „Mindestens 70% aller Geschäftsreisen unter 400 km werden mit dem Zug zurückgelegt“ soll durch eine Umfrage unter 600 Geschäftsleuten gestestet werden.

   (a) Bestimmen Sie den Annahmebereich der Nullhypothese, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht über 5% liegt. Näherung mit der Normalverteilung! (6 BE)

   (b) Wie groß ist bei der Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 5a die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der fragliche Anteil nur 65% beträgt? Näherung mit der Normalverteilung! (3 BE)

   (c) Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben 5a und 5b die OC-Kurve für diesen Test. (2 BE)