BAYERN Abitur 1994 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierte Funktion

$$g : x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

Der zu g gehörende Graph heißt G_g.

1. (a) Geben Sie die Nullstelle von g an, untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen der Definitionsmenge, und geben Sie die Monotoniebereiche von g an. (4 BE)

   (b) Begründen Sie, dass g eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt, und geben Sie den Term $g^{-1}(x)$ an. Was folgt aus dem Ergebnis für die Symmetrie des Graphen G_g? (4 BE)

   (c) Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Berücksichtigung des Funktionswertes $g(2)$. Zeichnen Sie zusätzlich mit anderer Farbe den Graphen G_h der Funktion $h : x \mapsto |g(x)|$ mit $\mathbb{D}_h = \mathbb{D}_g$ ein (Längeneinheit 1 cm). (3 BE)

   (d) Der Graph G_h aus Teilaufgabe 1c zerlegt das Quadrat mit den Ecken $(0|0)$, $(1|0)$, $(1|1)$ und $(0|1)$ in zwei Teile. Bestimmen Sie den Inhalt der größeren Teilfläche. (5 BE)

2. Nun wird die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x}{2} + \ln|g(x)|$$

   mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ betrachtet. Der Graph von f heißt G_f.

   (a) Geben Sie $\mathbb{D}_f$ an, bestimmen Sie das Verhalten von f an den Grenzen von $\mathbb{D}_f$, und ermitteln Sie alle Geraden, die Asymptoten von G_f sind. (5 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass der Graph G_f symmetrisch zum Punkt $P(\frac{1}{2}|\frac{1}{4})$ ist. (5 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x(x-1)}$. (4 BE)

   (d) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f. (3 BE)

   (e) Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein neues Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) (5 BE)

   (f) Geben Sie eine integralfreie Darstellung der Integralfunktion

$$F : x \mapsto \int_2^x \left(f(t) - \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

   mit $\mathbb{D}_F =]1; \infty[$. (5 BE)

   (g) Untersuchen Sie das Verhalten von F an den Grenzen von $\mathbb{D}_F$, und deuten Sie beide Ergebnisse geometrisch. (7 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

mit der größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der zu f gehörende Graph heißt G_f.

1. (a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$, untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie und geben Sie die Nullstellen von f an. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie die Ableitung f' von f und geben Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f'}$ von f' an.

   [Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$]

   Ermitteln Sie ohne Benützung der zweiten Ableitung Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Untersuchen Sie das Verhalten von f' an den Rändern von $\mathbb{D}_{f'}$ und deuten Sie die Ergebnisse geometrisch. (8 BE)

   (c) Berechnen Sie $f(0,5)$, $f(0,9)$ und $f'(0)$. Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 5 cm). (5 BE)

2. (a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (5 BE)

   (b) Zeichnen Sie den Graphen der Relation $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ in das bereits angelegte Koordinatensystem. Welchen Inhalt hat die von diesem Graphen umschlossene Fläche? (4 BE)

3. Nun wird die Funktion

   $$g : x \mapsto \arcsin f(x)$$

   mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = [0;1]$ betrachtet. Der Graph von g heißt G_g.

   (a) Geben Sie die Wertemenge und die Nullstelle von g an. Begründen Sie ausführlich ohne Bezugnahme auf die erste Ableitung, dass g an der Stelle $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ein lokales Maximum hat, und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an. (5 BE)

   (b) Berechnen Sie $g'(x)$ und geben Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{g'}$ von g' an. Wie verhält sich g' an den Rändern von $\mathbb{D}_{g'}$? (8 BE)

   (c) Zeigen Sie, dass g in der Form

   $$g(x) = \begin{cases} 2 \cdot \arcsin x & \text{für} \quad x \in [0; \frac{\sqrt{2}}{2}] \\ 2 \cdot \arcsin(-x) + c & \text{für} \quad x \in]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1] \end{cases}$$

   mit $c \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann, und bestimmen Sie den Wert von c. (7 BE)

   (d) Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in das bereits angelegte Koordinatensystem. (5 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|0|4)$, $B(-2|5|1)$ und $C(2|10|4)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und dass bei B ein rechter Winkel vorliegt. (2 BE)

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, und geben Sie eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Normalenform an.
   [Teilergebnis: $E : 3x_1 - 4x_3 + 10 = 0$] (3 BE)

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $R(r_1|r_2|r_3)$ und $S(s_1|s_2|s_3)$ mit $r_3 < s_3$ so, dass $ABCDRS$ ein reguläres Oktaeder (vgl. Skizze) ist.
   [Teilergebnis: $R(5|5|0)$] (5 BE)

   (d) Berechnen Sie den Radius r der dem Oktaeder aus Teilaufgabe 1c einbeschriebenen Kugel. In welchem Punkt P berührt die Kugel die Seitenflächen BRC? (7 BE)

2. Zusätzlich zum Oktaeder aus Teilaufgabe 1c wird die Ebenenschar $F_t : tx_1 + (7t - 1)x_3 + (4 - 30t) = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$ betrachtet.

   (a) Zeigen Sie, dass jede Ebene der Schar die Gerade AC enthält. (2 BE)

   (b) Berechnen Sie diejenigen Werte von t, für die die Ebene F_t die Kante $[BR]$ des Oktaeders schneidet. (6 BE)

   (c) Jede Scharebene F_t schneidet das Oktaeder in einer Schnittfigur Σ_t. $\Sigma_{0,14}$ enthält die Mitte der Kante $[BR]$ (kein Nachweis erforderlich). Begründen Sie genau, dass es keine Schnittfigur Σ_t gibt, die einen kleineren Flächeninhalt als $\Sigma_{0,14}$ hat. (5 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A_t(2t+2|0|0)$ und $B_t(0|2+\frac{2}{t}|0)$ mit dem Parameter $t > 0$ sowie $C(0|0|3)$ und die Ebene $E : x_3 - 3 = 0$ gegeben.

1. (a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F_t in Normalenform, die den Punkt A_t und den Punkt B_t enthält und parallel zur x_3-Achse verläuft.
   [mögliches Ergebnis: $F_t : x_1 + tx_2 - 2 - 2t = 0$] (6 BE)

   (b) Bestimmen Sie t so, dass das Dreieck A_tB_tC gleichschenklig ist mit der Basis $[B_tC]$. (4 BE)

   (c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von F_t $(t \neq 2)$ mit F_2 und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. (7 BE)

2. Im Folgenden gelte $t = 2$.

   (a) Zeichnen Sie in ein Schrägbild des Koordinatensystems die Schnittgeraden der Ebene E und der Ebene F_2 mit den Koordinatenebenen sowie die Schnittgerade s_2 von E mit F_2 ein. (3 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes C^* von C bezüglich der Ebene F_2 und zeichnen Sie C^* in das Koordinatensystem ein.
   [zur Kontrolle: $C^*(2,4|4,8|3)$] (4 BE)

   (c) Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche, die die dreiseitige Pyramide $B_2C^*CA_2$ mit der Ebene F_2 bildet, und heben Sie diese Schnittfläche in der in Teilaufgabe 2a angelegten Zeichnung farbig hervor. (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

An einem Turnier nehmen 16 Mannschaften mit je 8 Spielern teil.

1. Für die Vorrunde werden vier Gruppen I, II, III und IV zu je vier Mannschaften ausgelost, wobei es innerhalb einer Gruppe nicht auf die Reihenfolge der Mannschaften ankommt.

   (a) Wie viele Möglichkeiten der Gruppeneinteilung gibt es? (3 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die beiden spielstärksten Mannschaften in dieselbe Gruppe gelost? (4 BE)

2. Nach dem Endspiel, in dem sich die Mannschaften A und B gegenüberstanden, werden auf gut Glück vier Spieler zu einer Dopingprobe ausgewählt. In der Mannschaft A sei ein Spieler, in B seien zwei Spieler gedopt. Für die Auswahl der Spieler zur Dopingprobe werden zwei verschiedene Verfahren diskutiert:

   V_1: In jeder Mannschaft werden zwei Spieler ausgelost.

   V_2: Aus allen 16 Spielern werden vier Spieler ausgelost.

   (a) Entscheiden Sie durch Rechnung, bei welchem Verfahren die Chance größer ist, genau zwei Dopingsünder zu ermitteln. (8 BE)

   (b) Bei einer Anwendung des Verfahrens V_1 werden genau zwei Dopingsünder überführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es die beiden aus der Mannschaft B? (5 BE)

3. In einer Veröffentlichung wird behauptet, dass mindestens 20% der an solchen Turnieren teilnehmenden Spieler gedopt seien. Zu Überprüfung werden 500 Spieler einer unangemeldeten Dopingprobe unterzogen. In welchem Bereich muss die Anzahl der dabei ertappten Dopingsünder liegen, damit man die Behauptung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% zurückweisen kann? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (7 BE)

4. Für das Endspiel des Turniers steht ein Stadion mit 20 000 Plätzen zur Verfügung. Die Eintrittskarten sind nicht an bestimmte Plätze gebunden. 8000 Eintrittskarten werden vorab an Sponsoren verteilt. Diese Karten werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 83% tatsächlich genutzt, unabhängig davon regulär gekaufte Eintrittskarten dagegen mit 95%. Um eine größere Anzahl von leeren Plätzen zu vermeiden, werden (neben den Sponsorenkarten) 14 000 reguläre Karten verkauft.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewählter Besucher des Endspiels eine Sponsorenkarte? (5 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 20 000 Plätze nicht ausreichen? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (8 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

1. (a) Auf dem Parkplatz A einer Autowerkstätte sollen die für den nächsten Tag angemeldeten 13 Fahrzeuge in zwei Reihen untergebracht werden. Die erste Reihe enthält sechs, die zweite sieben Stellplätze. Vier Autos mit normalem Kundendienst sollen in die erste Reihe, zwei Autos zur Aufrüstung mit Alarmanlagen in die zweite Reihe, mit den übrigen werden die restlichen Plätze in den beiden Reihen aufgefüllt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, unter diesen Vorgaben die Autos zu verteilen? (4 BE)

   (b) Der Parkplatz B ist für Betriebsangehörige reserviert. Die 20 Plätze in einer Reihe sind von 1 bis 20 numeriert. Auf einem der Plätze, der kein Randplatz ist, steht der Wagen des Chefs. In der Mittagspause verlassen sieben Angestellte den vollbesetzten Parkplatz mit ihren Autos. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Plätze neben dem Wagen des Chefs nicht mehr besetzt? (5 BE)

2. Eine Statistik über das letzte Jahr zeigt: Die in einem bestimmten Autotyp eingebauten Alarmanlagen lösten im Falle eines Einbruchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% Alarm aus. Bei 3% der Wagen, in die nicht eingebrochen wurde, stellte man einen Fehlalarm fest. Die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch in den betrachteten Wagentyp lag bei $1,5\%$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich ein Einbruch vorlag, falls Alarm ausgelöst wurde? (6 BE)

3. Die Herstellerfirma liefert Alarmanlagen, welche im Mittel zu 3% defekt sind.

   (a) Die Prüfabteilung der Autowerkstätte entnimmt zur Kontrolle aus jeder Lieferung n Geräte. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit in der Probe mit wenigstens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens ein defektes Gerät vorkommt? (Modell: Ziehen mit Zurücklegen) (4 BE)

   (b) Die Herstellerfirma liefert an einen Großhändler 500 Geräte. In welchem kleinsten Intervall symmetrisch um den Erwartungswert liegt mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der fehlerhaften Geräte? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (5 BE)

   (c) Für einen dringenden Terminauftrag benötigt die Werkstatt 500 fehlerlose Alarmanlagen. Wie viele Geräte müssen wenigstens bestellt werden, damit der Auftrag termingerecht mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mit fehlerlosen Anlagen ausgeführt werden kann? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (7 BE)

4. Für das Zentrallager der Autowerkstatt werden Anhängerkupplungen bestellt, von denen nach Angabe der Lieferfirma höchstens ein Fünftel Mängel aufweist. Die Prüfabteilung entscheidet sich für eine Rücksendung der Lieferung, falls bei einer Stichprobe von 20 Kupplungen mehr als acht Mängel zeigen. (Modell: Ziehen mit Zurücklegen)

   (a) Wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung, die der Angabe der Lieferfirma entspricht, fälschlicherweise zurückgeschickt wird? (4 BE)

   (b) Wie muss die Annahmeregel geändert werden, wenn bei gleichem Stichprobenumfang das Risiko, eine Sendung mit einem Viertel mangelhafter Anhängerkupplungen anzunehmen, kleiner als 10% werden soll? Stellen Sie kurz die Folgen dieser neuen Annahmeregel dar. (5 BE)