BAYERN Abitur 1995 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_k : x \mapsto (2x+k)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}$$

mit $k > 0$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1. (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen. Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$. (4 BE)

   (b) Bestätigen Sie:

   $$f_k'(x) = -\frac{1}{k}(2x-k)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}} \quad \text{und} \quad f_k''(x) = \frac{1}{k^2}(2x-3k)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}$$

   Bestimmen Sie die Lage und Art des Extrempunktes von G_k. Zeigen Sie, dass G_k einen Wendepunkt hat, und geben Sie dessen Koordinaten an. (9 BE)

   (c) Weisen Sie nach, dass die Extrempunkte aller Graphen G_k auf einer Geraden liegen, und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an. (3 BE)

   (d) Zeigen Sie, dass die Wendetangenten aller Graphen der Schar zueinander parallel sind. (2 BE)

   (e) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente von G_2 und den Schnittpunkt dieser Wendetangente mit der x-Achse. (4 BE)

   (f) Zeichnen Sie die Graphen G_2 und G_4 unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm). (7 BE)

   (g) $P(p|0)$ ist ein Punkt der x-Achse. Für welche Werte von p gibt es eine Tangente von G_2 durch P? Anschauliche Überlegung am Graphen genügt. (3 BE)

2. Der Graph G_k und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein, das sich im 1. Quadranten ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass diesem Flächenstück für alle k ein endlicher Inhalt I_k zugeordnet werden kann. Geben Sie den Wert von I_k an. (8 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_k : x \mapsto x^{-k} \cdot \ln(x^2)$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Die Definitionsmenge von f_k wird mit $\mathbb{D}_k$ bezeichnet.

1. Zunächst wird $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}^+$ vorausgesetzt.
   (a) Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to 0$ und $x \to \infty$. (3 BE)
   (b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_k sowie die Lage und Art des Extrempunktes des Graphen von f_k.
   [Zur Kontrolle: $f_k'(x) = 2 \cdot x^{-k-1} \cdot (1 - k \ln x)$] (7 BE)
   (c) Zeigen Sie: Alle Graphen der Scharfunktionen f_k haben im gemeinsamen Schnittpunkt mit der x-Achse die gleiche Tangente. (4 BE)

2. Im Folgenden sei $\mathbb{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.
   (a) Untersuchen Sie G_k auf Symmetrie. (4 BE)
   (b) Berechnen Sie auf zwei Dezimalen die Werte $f_1(0,5)$, $f_1(4)$, $f_2(0,5)$, $f_2(4)$. Skizzieren Sie G_1 und G_2 unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in ein gemeinsames Koordinatensystem (Hochformat, Ursprung Blattmitte, Längeneinheit 2 cm). (8 BE)

3. Im Folgenden wird das bestimmte Integral $I = \int\limits_2^4 f_2(x)\, dx$ betrachtet.
   (a) Berechnen Sie für I und eine Zerlegung des Integrationsintervalls in vier gleich lange Teilintervalle die zugehörige Untersumme s und die zugehörige Obersumme S (auf drei Dezimalen gerundet).
   [Zur Kontrolle: $s = 0,458$; $S = 0,544$] (6 BE)
   (b) Berechnen Sie den exakten Wert von I. Um wieviel Prozent weicht der Mittelwert aus s und S vom exakten Wert von I ab?
   [zur Kontrolle: Eine Stammfunktion von f_2 auf $\mathbb{R}^+$ ist $x \mapsto -\frac{2}{x}(1+\ln x)$.] (8 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(12|1|4)$, $B(4|5|-4)$ und $C_k(k|4k-5|k+4)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C_k für alle $k \in \mathbb{R}$ ein Dreieck bilden. (3 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass C_k in der Symmetrieebene der Punkte A und B liegt. Welche Eigenschaft ergibt sich daraus für das Dreieck ABC_k? (5 BE)

   (c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte C_k liegen. Welche Beziehung haben die Richtung von g und die Richtung der Geraden AB zueinander? (3 BE)

   (d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_k minimal wird. Wie groß ist der Flächeninhalt in diesem Fall?
   [Teilergebnis: $k = 2$] (6 BE)

   (e) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABC_2C_0. (6 BE)

2. E_0 ist die Ebene, die die Punkte A, B und C_0 enthält.

   (a) Ermitteln Sie eine Gleichung von E_0 in Normalenform.
   [mögliches Ergebnis: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 = 0$] (3 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass sich die Ebene E_0 und die Gerade g aus Teilaufgabe 1.c unter einem Winkel von 45° schneiden. (3 BE)

   Für $k \neq 0$ ist F_k der Fußpunkt des Lotes von C_k auf E_0.

   (c) Berechnen Sie F_k. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F_k von C_0 und C_k gleich weit entfernt ist.
   [Teilergebnis: $F_k(2k|2k-5|-k+4)$] (6 BE)

   (d) Für welchen Wert von k ist der Fußpunkt F_k von C_0 und A gleich weit entfernt? Welche besondere geometrische Eigenschaft hat für dieses k der Fußpunkt F_k für die Pyramide ABC_0C_k? (5 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|-2|2)$ und $B(-1|2|0)$, die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ sowie}$$

die Ebenenschar $E_t : -x_1 + tx_2 + (2t+1)x_3 + 4 = 0$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben. C_λ sei ein beliebiger Punkt auf der Geraden g.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Geraden AB und g parallel, aber nicht identisch sind. (3 BE)

   (b) Für welche Werte von λ hat das Dreieck ABC_λ bei B einen stumpfen Winkel? (5 BE)

   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC_λ. (4 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass g mit keiner der Ebenen E_t einen Punkt gemeinsam hat. Bestimmen Sie – soweit vorhanden – die Schnittpunkte von E_t mit den Koordinatenachsen. (5 BE)

   (b) Alle Ebenen E_t besitzen einen gemeinsame Schnittgerade s (Nachweis nicht erforderlich). Geben Sie eine Gleichung von s in Parameterform an. (4 BE)

   (c) Es gibt genau eine Ebene F, die zwar die Schnittgerade s (vgl. Teilaufgabe 2.b) enthält, aber nicht zur Ebenenschar E_t gehört (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie eine Gleichung von F in Normalenform. (6 BE)

3. Die Ebene E_{-2} schließt mit den drei Koordinatenebenen eine Pyramide ein.

   (a) Berechnen Sie Oberfläche und Volumen dieser Pyramide. (7 BE)

   (b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden g mit den Koordinatenebenen und entscheiden Sie, ob g mit der Pyramide einen Punkt gemeinsam hat. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. Auf einer Industriemesse kommen die ersten 10 (unterscheidbaren) Besucher kurz nacheinander an und verteilen sich auf drei Kassen. Wie viele solcher Aufteilungen gibt es, wenn

   (a) sich jeder unabhängig von den anderen eine Kasse aussucht, (2 BE)

   (b) sich jeder an einer Kasse anstellt, an der möglichst wenig Personen vor ihm sind, und die Auswahl sonst beliebig erfolgt? (4 BE)

2. Ein Kassierer benötigt als Abfertigungszeit für einen Besucher, der das Eintrittsgeld passend hat, 15 Sekunden, sonst 25 Sekunden. Erfahrungsgemäß haben 40% der Messebesucher ihr Eintrittsgeld passend. Besucher B stellt sich an einer Kasse an, vor der schon 8 Personen anstehen.

   (a) Welche Abfertigungszeit erwartet man für diese acht Personen? (3 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass B nach spätestens 3 Minuten abgefertigt ist, wenn er sein Geld abgezählt bereithält? (6 BE)

3. Durch eine Umfrage soll der Anteil p der Fachbesucher unter allen Messebesuchern bestimmt werden. Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, damit man den Anteil p mit mindestens 80% Sicherheit bis auf eine Abweichung von weniger al $0,02$ ermitteln kann? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow. (5 BE)

4. 42% der Messebesucher sind Fachbesucher.

   (a) 20% der weiblichen und 55% der männlichen Messebesucher sind Fachbesucher.

      i. Wie hoch ist der Anteil der männlichen Besucher bei dieser Messe?

      ii. Ein zufällig ausgewählter Messebesucher ist ein Fachbesucher. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er männlich? (8 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 50 befragten Messebesuchern genau 42% Fachbesucher? (4 BE)

5. Für Aussteller ist die Messe auch deshalb interessant, weil durch Beratungsgespräche Verkaufsabschlüsse herbeigeführt werden können. In der Branche kalkuliert man, dass höchstens 15% der Beratungsgespräche zu einem Verkaufsabschluss führen. Ein Aussteller vermutet, dass er durch seine überzeugende Art mehr neue Kunden gewinnt. Von 280 Beratungsgesprächen erreicht er bei 55 einen Verkaufsabschluss. Kann er auf Grund dieses Ergebnisses die Nullhypothese: „Höchstens 15% meiner Gespräche führen zu einem Verkaufsabschluss" auf dem 5%-Niveau verwerfen? Geben Sie hierzu die Entscheidungsregel an und verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (8 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Bei einer Wahl bewerben sich die drei Parteien A, B und C.

1. Vor der Wahl ermittelt man die relative Häufigkeit der A-Wähler unter 1000 Bürgern. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass diese relative Häufigkeit vom unbekannten Anteil p der A-Wähler um weniger als $0,05$ abweicht. (4 BE)

2. Die Partei B will bei der Wahl mehr als 25% der Stimmen erreichen. Um zu entscheiden, ob dazu ein besonders harter Wahlkampf nötig ist, testet sie die Nullhypothese: „Der Anteil der B-Wähler ist höchstens 25%“ durch eine Umfrage bei 200 Wahlberechtigten.

   (a) Wie viele Personen müssen sich mindestens für die Partei B entscheiden, damit man die Nullhypothese auf Grund dieser Umfrage auf dem 2%-Niveau verwerfen kann? (5 BE)

   (b) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Partei B einen besonders harten Wahlkampf führt, obwohl sich schon 30% der Wähler für die Partei B entschieden haben? (3 BE)

3. Bestimmen Sie unter der Annahme eines Wähleranteils von 20% für die Partei C die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Partei C von 650 abgegebenen Briefwahlstimmen weniger als 120 erhält. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (5 BE)

4. Der Anteil der A-Wähler sei p. Aus der sehr großen Zahl von Stimmzetteln werden nacheineander zufällig zehn ausgewählt, die nur nach der jeweils angekreuzten Partei unterschieden werden.

   (a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit $P(p)$ dafür, dass genau zwei der Zettel A-Stimmzettel sind, aber keiner der beiden letzten. (3 BE)

   (b) Für welchen Wert von p wird die Wahrscheinlichkeit $P(p)$ aus Teilaufgabe 4a maximal? (5 BE)

   (c) Wie groß muss p mindestens sein, damit unter zehn Stimmzetteln mit wenigstens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein A-Stimmzettel ist? (5 BE)

5. Bei der Auszählung entfallen von zehn Wahlzetteln zwei auf die Partei A, drei auf B und fünf auf C. Auf wie viele Arten können diese Wahlzettel in einer Reihe angeordnet sein,

   (a) wenn man nur A, B und C unterscheidet, (2 BE)

   (b) wenn man nur A, B und C unterscheidet und außerdem die fünf C-Stimmzettel direkt nacheinander kommen, (3 BE)

   (c) wenn man nur A, B und C unterscheidet und außerdem weder der erste Stimmzettel noch der letzte Stimmzettel ein C-Stimmzettel ist? (5 BE)