BAYERN Abitur 1996 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_k : x \mapsto \frac{1}{x \cdot (k - \ln x)^2}$$

mit $k \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$. Der zu f_k gehörige Graph wird mit G_k bezeichnet.

1. (a) Begründen Sie, dass $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}^+ \setminus \{e^k\}$ ist. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Rändern von $\mathbb{D}_k$.
   Hinweis: $\lim\limits_{x \stackrel{>}{\to} 0} x \cdot (\ln x)^n = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ kann verwendet werden. (6 BE)

   (b) Zeigen Sie: $f_k'(x) = \dfrac{2 - k + \ln x}{x^2 \cdot (k - \ln x)^3}$.
   Bestimmen Sie Koordinaten und Art des Extrempunkts von f_k und geben Sie das Monotonieverhalten von f_k an. (10 BE)

   (c) Berechnen Sie $f_1(e^2)$, $f_1(1)$ und $f_1'(1)$. Zeichnen Sie G_1 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm). (6 BE)

2. Jeder Graph G_k hat genau eine Tangente t_k, die durch den Ursprung geht.

   (a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für t_k und zeichnen Sie t_1 in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein.
   [Ergebnis: $t_k : x \mapsto e^{2-2k} \cdot x$] (7 BE)

   (b) Die Tangente t_k bildet mit der x-Achse und der Geraden $x = e^k$ ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von k ist. (2 BE)

3. (a) Bestimmen Sie mittels einer geeigneten Substitution eine Stammfunktion F_k von f_k.
   [mögliches Ergebnis: $F_k(x) = \dfrac{1}{k - \ln x}$] (4 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass die uneigentlichen Integrale

   $$\int_0^{\frac{e}{2}} f_1(t)\, dt \quad \text{und} \quad \int_{2e}^{\infty} f_1(t)\, dt$$

   existieren und gleich sind. (5 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Ihr Graph wird mit G bezeichnent.

1. (a) Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Begründen Sie, dass f stetig ist. (3 BE)

   (b) Bestimmen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$ und zeigen Sie damit, dass f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Koordinaten und Art des Extrempunkts.
   [Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$ für $x > 0$] (8 BE)

   (c) Berechnen Sie $f(1)$ und $f(-1)$, und zeichnen Sie G unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm). (5 BE)

2. Die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}_0^+$ wird mit g bezeichnet.

   (a) Begründen Sie, dass g umkehrbar ist, bestimmen Sie den Funktionsterm $g^{-1}(x)$ und geben Sie Definitions- und Wertemenge von g^{-1} an. (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie den Grenzwert der ersten Ableitung von g^{-1} bei rechtsseitiger Annäherung an die Stelle $x = \frac{1}{2}$, ohne den Term $g^{-1}(x)$ zu differenzieren. (3 BE)

   (c) Zeichnen Sie den Graphen von g^{-1} unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1c ein. (3 BE)

3. Nun wird die in ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ betrachtet.

   (a) Begründen Sie, ohne die Integration auszuführen, folgende Eigenschaften von F: F ist differenzierbar, F besitzt genau eine Nullstelle, der Graph von F weist keine horizontale Tangenten auf und hat den Ursprung als Wendepunkt. (6 BE)

   (b) Bestimmen Sie nun einen integralfreie Darstellung von $F(x)$ für $x \geq 0$. (3 BE)

   (c) Untersuchen Sie, ob das für $x \geq 0$ zwischen G und der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ gelegene Flächenstück einen endlichen Inhalt besitzt. (5 BE)

Analytische Geometrie I

1. (a) Wann heißen n Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ linear unabhängig? (2 BE)

   (b) In einem vierdimensionalen reellen Vektorraum gelten zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ die Beziehungen $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_4$ und $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linear abhängig sind. (4 BE)

   Gegeben ist ein kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$.

2. Geben Sie eine Normalenform der Ebene E an, die die Richtungsvekotren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   hat und den Punkt $P(3|-2|2)$ enthält.

   [mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 12 = 0$] (4 BE)

3. Die Ebene E aus Aufgabe 2 begrenzt mit den drei Koordinatenebenen eine dreiseitige Pyramide Λ.

   (a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken von Λ und fertigen Sie ein Schrägbild an. (4 BE)

   (b) Die Kante von Λ, die auf der x_2-Achse liegt, und die ihr gegebüberliegende Kante legen zwei Geraden fest, die zueinander windschief sind. Berechnen Sie den Abstand dieser Geraden. (7 BE)

   (c) Bestimmen Sie den Punkt R, der von den Ecken von Λ gleiche Entfernung hat. Begründen Sie durch Rechnung, dass R außerhalb von Λ liegt.
   [Ergebnis: $R(3|-3|6)$] (6 BE)

   (d) Bestimmen Sie den Parameter s so, dass der Punkt $S(s|-s|s)$ von allen vier Seitenflächen von Λ gleichen Abstand hat und im Innern von Λ liegt.
   [Ergebnis: $s = 1,5$] (7 BE)

   (e) Um den Punkt R kann eine Kugel K_1 gelegt werden, welche die vier Eckpunkte von Λ enthält. Um den Punkt S kann eine Kugel K_2 gelegt werden, welche die vier Seitenflächen von Λ berührt. Berechnen Sie den kleinsten Abstand (auf zwei Dezimalen genau), den zwei Punkte $C \in K_1$ und $D \in K_2$ haben können. (6 BE)

Analytische Geometrie II

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die beiden Geradenscharen g_t und h_t

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ 2+5t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

1. (a) Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar g_t zueinander parallel sind und dass alle Geraden der Schar h_t einen gemeinsamen Punkt haben. (2 BE)

   (b) Die Ebene G enthält alle Geraden g_t. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in Normalenform. Welche besondere Lage hat die Ebene G im Koordinatensystem?
   [mögliches Ergebnis: $G : 3x_1 - x_3 = 0$] (5 BE)

   (c) Weisen Sie nach, dass alle Geraden h_t in der Ebene $H : 3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$ liegen. (3 BE)

   (d) G und H schneiden sich in einer Geraden s. Ermitteln Sie eine Gleichung von s.
   [zur Kontrolle: $s = g_6$] (5 BE)

   Im Folgenden bezeichnen G und H die in Teilaufgabe 1 definierten Ebenen. Die Ebene $F : 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ enthält die Geraden g_2 und h_2 (Nachweis nicht erforderlich).

2. (a) Welche gegenseitige Lage haben die Geraden g_2 und h_2? (3 BE)

   (b) Berechnen Sie den Abstand von g_2 und h_2. (5 BE)

   (c) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen der Ebenen F, G und H sowie ihrer Schnittgeraden zueinander hervorgehen. (4 BE)

3. (a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Ebenen F, G und H gemeinsamen Lotebenen haben, und geben Sie eine Gleichung derjenigen Lotebene L in Normalenform an, die den Ursprung enthält. (5 BE)

   (b) Die drei Ebenen F, G und H schneiden aus L ein Dreieck heraus. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt, und entscheiden Sie, ob der Ursprung innerhalb, außerhalb oder auf dem Rand des Dreiecks liegt. (8 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Die Fernsehsendung „Sport TV“ berichtet über das Sportgeschehen.

1. Bei „Sport-TV“ treten Bildstörungen mit 4% Wahrscheinlichkeit auf. Ist das Bild gestört, dann kommt es mit 60% Wahrscheinlichkeit auch noch zu Tonstörungen. Ist das Bild einwandfrei, dann ist auch der Ton mit 90% Wahrscheinlichkeit in Ordnung. Verwenden Sie folgende Bezeichnungen:

   B: „Bei ‚Sport-TV‘ treten Bildstörungen auf“,

   T: „Bei ‚Sport-TV‘ treten Tonstörungen auf“.

   (a) Untersuchen Sie B und T auf stochastische Unabhängigkeit. (5 BE)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist? (3 BE)

   (c) Falls das Bild nicht gestört ist, tritt das Ereignis Z: „Ein Zuschauer schaltet während der Sendung um“ höchstens mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ein. Welchen größtmöglichen Wert kann die Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ annehmen? (5 BE)

2. Vier Studiogäste und zwei Moderatoren setzen sich auf sechs Stühle, die im Studio in einem Halbkreis aufgestellt sind. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der möglichen Sitzordnungen, wenn alle Personen unterschieden werden und folgendes gilt:

   (a) Die Moderatoren nehmen auf den beiden mittleren Stühlen Platz. (3 BE)

   (b) Die beiden Moderatoren sitzen beliebig, aber nicht nebeneinander. (5 BE)

3. Im Studio ist ein Basketballkorb aufgebaut. Ein Studiogast treffe mit einer Wahrscheinlichkeit p in den Korb. Wie groß muss p mindestens sein, damit der Gast bei 6 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens einmal trifft? (6 BE)

4. Der Sender möchte die Einschaltquote mit einer Sicherheit von 90% auf 2 Prozentpunkte genau erfahren. Bestimmen Sie mit der Tschebyschow-Ungleichung die Mindestzahl von Personen, die man befragen muss. (4 BE)

5. Der Sender braucht 400 neue, einwandfreie Magnetbänder. Erfahrungsgemäß sind 2% der gelieferten Bänder schadhaft. Wie viele Bänder müssen mindestens bestellt werden, damit mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit wenigstens 400 einwandfreie Bänder darunter sind? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (9 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

In einem Spielsalon git es zwei Sorten von Laplace-Oktaedern. Typ I hat auf den acht Seiten die Ziffern 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, Typ II ist mit den Ziffern 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 beschriftet. Als geworfen gilt die Ziffer, die oben liegt.

1. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten p_{I} bzw. p_{II}, mit drei Oktaedern vom Typ I bzw. mit drei Oktaedern vom Typ II drei gleiche Ziffern zu werfen?
   [Ergebnis: $p_{\mathrm{I}} = 18\%$, $p_{\mathrm{II}} = 12{,}1\%$] (4 BE)

2. In einer Urne liegen fünf Oktaeder vom Typ I und drei vom Typ II. Bei einem Spiel werden drei Oktaeder gleichzeitig rein zufällig aus der Urne herausgegriffen und geworfen. Gewonnen ist das Spiel, wenn bei drei Oktaedern des gleichen Typs drei gleiche Ziffern fallen.

   (a) Anton spielt einmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er?
   [Ergebnis: $P(\text{Gewinn}) = 3{,}4\%$] (5 BE)

   (b) Bernd spielt einmal und verliert. Wie groß ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass er drei Oktaeder vom Typ I aus der Urne gegriffen hat? (7 BE)

   (c) Mit welcher Zahl von Gewinnen kann man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens rechnen, wenn das Spiel 1000mal gespielt wird? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. (7 BE)

3. Acht Oktaeder des Typ I werden geworfen und anschließend in einer Reihe angeordnet. Es entsteht eine achtstellige Zahl.

   (a) Wie viele solche Zahlen sind möglich? (2 BE)

   (b) Bei wie vielen Zahlen ergibt die Quersumme die Zahl 22? (4 BE)

4. Eine Firma liefert Oktaeder vom Typ II und versichert, dass bei jedem Oktaeder alle Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit fallen. Der Inhaber der Spielsalons prüft eines der Oktaeder, indem er es n-mal wirft und die Anzahl der geworfenen Dreier betrachtet. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Angabe der Lieferfirma zutrifft.

   (a) Das Oktaeder wird 1000mal geworfen. Um welche Zahl a muss die Anzahl der geworfenen von der Zahl der zu erwartenden Dreier mindestens abweichen, wenn die Wahrscheinlichkeit für diese Abweichung unter 25% bleiben soll? Verwenden Sie die Tschebyschow-Ungleichung. (5 BE)

   (b) Das Oktaeder wird 200mal geworfen. Der Inhaber des Spielsalons lehnt die Behauptung der Lieferfirma nicht ab, wenn die Zahl der geworfenen Dreier in einem möglichst kleinen, symmetrisch um den Erwartungswert gelegenen Bereich enthalten ist, der so festgelegt ist, dass sich der Inhaber mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrt. Ermitteln Sie diesen Bereich. (6 BE)