BAYERN Abitur 1997 Mathematik Leistungskurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funtionen

$$f_k : x \mapsto \frac{1 + k \cdot \ln x}{x}$$

mit $k \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.
Hinweis: Im Folgenden dürfen die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x \ln x) = 0$ ohne Beweis verwendet werden.

1. (a) Zeigen Sie, dass $e^{-\frac{1}{k}}$ Nullstelle von f_k ist. Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Rändern des Definitionsbereichs. (3 BE)

   (b) Weisen Sie nach, dass G_k den Hochpunkt $H_k(x_H|y_H)$ mit $x_H = e^{1-\frac{1}{k}}$ und $y_H = k \cdot e^{\frac{1}{k}-1}$ besitzt. Zeigen Sie, dass H_1 auf allen Graphen G_k liegt. (8 BE)

   (c) Berechne Sie $f_k(e)$ für $k = \frac{1}{2}$ und $k = 2$. Zeichnen Sie die Graphen $G_{\frac{1}{2}}$ und G_2 unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm). (7 BE)

2. (a) Welche Werte nimmt x_H aus Teilaufgabe 1b für $k \in \mathbb{R}^+$ an? Begründen Sie Ihre Antwort. (6 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für y_H aus Teilaufgabe 1b gilt:

   $$y_H = \frac{1}{x_H \cdot (1 - \ln x_H)}$$

   Wie verhält sich y_H für $x_H \overset{>}{\to} 0$ und für $x_H \overset{<}{\to} e$? (5 BE)

   (c) Skizzieren Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse die Kurve K, auf der die Hochpunkte H_k liegen, in das Koordinatensystem vom Teilaufgabe 1c. (3 BE)

3. Bestimmen Sie k so, dass der Inhalt des endlichen Flächenstücks, das vom Graphen G_k, der x-Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird, den Wert 1 hat. (8 BE)

Infinitesimalrechnung II

Hinweis: Im Folgenden dürfen die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x \ln x) = 0$ ohne Beweis verwendet werden.

1. Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs $\mathbb{D}_f$. Geben Sie an, ob f in $x = 0$ stetig ergänzt werden kann. (5 BE)

(b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f. Untersuchen Sie das Verhalten der Ableitungsfunktion f' für $x \overset{>}{\to} 0$. Substituieren Sie dazu $\frac{1}{x}$ durch z. (5 BE)

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. (3 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^n}$, wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist. G_n ist der Graph von f_n.

2. (a) Alle Graphen G_n haben zwei gemeinsame Punkte (Nachweis nicht erforderlich). Geben Sie deren Koordinaten an. (2 BE)

(b) Untersuchen Sie gegebenenfalls mittels Fallunterscheidung das Verhalten von f_n für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$. Für welche n ist G_n symmetrisch zur y-Achse? (5 BE)

(c) Zeigen Sie, dass jeder Graph G_n einen Punkt mit waagrechter Tangente hat. Bestimmen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung die Art dieses Punktes in Abhängigkeit von n. (6 BE)

(d) Berechnen Sie $f_2(\frac{1}{2})$, $f_3(-1)$ und $f_3(\frac{1}{2})$, und zeichnen Sie in einem neuen Koordinatensystem G_2 und G_3 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm). (5 BE)

3. Der Graph G_2 rotiert um die y-Achse. Der entstehende, sich ins Unendliche erstreckende Rotationskörper wird mit einer zur y-Achse senkrechten Ebene geschnitten, die vom Ursprung den Abstand y $(0 < y \leq 1)$ hat. Der Inhalt der Schnittfläche ist $A(y)$.

(a) Zeigen Sie, dass $A(y) = -\pi \cdot \ln y$ ist. (4 BE)

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 A(y)\,\mathrm{d}y$. Deuten Sie das Ergebnis geometrisch. (5 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist für jeden Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ durch $E_t : 2x_1 - tx_2 + 4x_3 = 0$ und $H_t : x_2 = t$ je eine Ebene festgelegt.

1. (a) Welche Ebene E_t enthält den Punkt $Q(-3,2|-4|5,6)$? (1 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen E_t in einer gemeinsamen Geraden s schneiden, und geben Sie eine Gleichung von s in Parameterform an. (5 BE)

   (c) Für welches t sind E_t und H_t zueinander senkrecht? (2 BE)

   (d) Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebenen H_t im Koordinatensystem haben. (1 BE)

2. (a) Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g_t von E_t und H_t.

   [Ergebnis: $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$]

   Welchen Winkel (auf 1° genau) schließt die Gerade g_t mit der Ebene $x_1 = 0$ ein? (7 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass durch g_0 und die x_2-Achse die Ebene E_0 eindeutig festgelegt ist. Zeigen Sie ferner, dass alle Geraden g_t, $t \neq 0$, auf derselben Seite von E_0 liegen. (7 BE)

   (c) Berechnen Sie den Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3-Ebene. Zeigen Sie, dass die Punkte S_t auf einer Parabel in der x_2x_3-Ebene liegen. (5 BE)

   (d) Legen Sie ein Koordinatensystem an (siehe Skizze). Zeichnen Sie die Geraden g_{-4}, g_{-2}, g_0, g_2 und die in Teilaufgabe 2.c beschriebene Kurve ein. (5 BE)

3. Es gibt ein Quadrat, von dem 2 Seiten auf Geraden der durch g_t bestimmten Parallelenschar liegen und das die Ecken $O(0|0|0)$ und Q (siehe Teilaufgabe 1.a) besitzt (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats. (7 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(0|0|-4)$, $B(4|0|0)$ und $C_t(t-8|t|t-8)$, $t \in \mathbb{R}$, gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, und C_t für jedes t ein Dreieck bestimmen und dass dieses Dreieck den Flächeninhalt $2 \cdot \sqrt{2t^2+16}$ hat. (4 BE)

   (b) Geben Sie an, für welchen Wert von t der Flächeninhalt minimal wird. Erläutern Sie, wie man mit diesem Ergebnis ermitteln kann, für welchen der Punkte C_t der Abstand von der Geraden AB minimal ist. Geben Sie auch diesen minimalen Abstand an. (5 BE)

2. (a) Die Punkte A, B und C_t liegen in einer Ebene E_t. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene E_t in Normalform auf.
   [mögliches Ergebnis für E_t: $tx_1 + 4x_2 - tx_3 = 0$] (4 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Ebenen E_t und E_{t^*} genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn gilt: $t \cdot t^* = -8$. Zu welcher Ebene der Schar existiert keine senkrechte Ebene in der Schar? (3 BE)

   (c) Zwei zueinander senkrechte Ebenen E_t und E_{t^*} schneiden die x_2-Achse in den Punkten S_t und S_{t^*}. Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{S_tS_{t^*}}$, und ermitteln Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, für welche Werte von t diese Streckenlänge minimal wird. (7 BE)

3. (a) Die Mittelpunkte aller Kugeln durch die Punkte A, B und den Ursprung O liegen auf einer Geraden (Nachweis nicht erforderlich). Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden in Parameterform an. Für welche beiden Mittelpunkte beträgt der Kugelradius $\sqrt{24}$? (7 BE)

   (b) A, B, O und C_t ($t \neq 0$) bilden eine Pyramide. Bestimmen Sie C_t so, dass die Kugel mit Mittelpunkt $M_1(2|4|-2)$ und Radius $\sqrt{24}$ Umkugel dieser Pyramide ist. (6 BE)

   (c) Berechen Sie das Volumen der Pyramide $ABOC_8$. (4 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

1. Auf einem Flughafen werden die aufgegebenen Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück das Ziel München hat, sei p.

   (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstükken mindestens eines nicht den Zielflughafen München hat, sei $93,75\%$. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit p.
   [Ergebnis: $p = 0,25$] (3 BE)

   (b) Nun werden 10 aufeinanderfolgende Gepäckstücke betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   E_1: „Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel."
   E_2: „Das zehnte Gepäckstück ist das dritte nach München."
   E_3: „Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel und liegen direkt hintereinander."
   E_4: „Genau drei Gepäckstücke haben München als Ziel, wobei mindestens zwei dieser drei direkt hintereinander liegen." (9 BE)

   (c) 1% der Gepäckstücke werden fehlgeleitet; von den fehlgeleiteten Gepäckstücken haben 20% das Ziel München. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird demnach ein Gepäckstück, das das Ziel München hat, richtig weitergeleitet? (5 BE)

2. Das Gepäck wird mit einem Strichcode auf Papieraufklebern gekennzeichnet, mit dessen Hilfe der Zielflughafen ermittelt wird. Diese Ermittlung schlägt in $11,5\%$ der Fälle fehl, da mindestens einer der voneinander unabhängigen Fehler A („Papier zerknittert") oder B („Papier verschmutzt") auftritt.

   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn bekannt ist, dass der Fehler B eine Wahrscheinlichkeit von $8,5\%$ hat. (6 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt nur einer der Fehler A oder B auf? (2 BE)

3. Einer Fluggesellschaft wird ein Lesegerät für das Sortieren des Gepäcks auf der Basis von Mikrochips angeboten, das eine Quote von weniger als 1% an Lesefehlern verspricht. Die Fluggesellschaft testet ihre Vermutung H_0 „Die Quote bei den Lesefehlern ist mindestens 1%" auf dem 2%-Signifikanzniveau an 3000 mit Mikrochips gekennzeichneten Gepäckstücken. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für diesen Test (Rechnung mit der Normalverteilung als Näherung). (9 BE)

4. Aus langjähriger Erfahrung weiß man bei einer Fluggesellschaft, dass Gepäckstücke ein durchschnittliches Gewicht von 18 kg bei einer Standardabweichung von 5 kg besitzen. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass bei 300 aufgegebene Gepäckstücken das Gesamtgewicht zwischen 4800 kg und 6000 kg liegt. Für die Berechnung darf angenommen werden, dass das Gewicht der Gepäckstücke voneinander unabhängig ist. (6 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

1. Ein Kunde eines Kaufhauses benutzt mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% die hauseigene Tiefgarage. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% bleibt ein Kunde länger als 30 Minuten im Kaufhaus (Langzeitbesucher). Die Ereignisse T: „Tiefgaragenbenutzer“ und L: „Langzeitbesucher“ seien stochastisch unabhängig.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebiger Kunde weder Tiefgaragenbenutzer noch Langzeitbesucher? (2 BE)

   (b) An einer Kasse stehen drei Kunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens einer davon ein Tiefgaragenbenutzer und nicht gleichzeitig Langzeitbesucher? (3 BE)

   (c) In der Tiefgarage sind noch 16 Plätze frei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese freien Plätze für die nächsten 20 Kunden des Kaufhauses reichen? (3 BE)

2. Das Kaufhaus will einen Restaurantbetrieb einrichten.

   (a) In einer Umfrage unter 200 Kunden soll die Zahl k derjenigen ermittelt werden, die Interesse an dem Angebot haben. Bestimmen Sie unter Verwendung der Ungleichung von Tschebyschow einen möglichst kleinen Bereich, in dem k mit einer Wahrscheinlichkeit von mindesten 90% liegen wird, falls tatsächlich $\frac{1}{3}$ aller Kunden an dem Angebot interessiert ist. (6 BE)

   (b) Wie groß müsste der Anteil der Restaurantnutzer unter allen Kaufhauskunden mindestens sein, damit von 50 zufällig ausgewählten Kunden des Kaufhauses mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens einer das Restaurant aufsucht? (4 BE)

3. (a) Mit einer elektronischen Anlage wird am Ausgang überprüft, ob ein Kunde unbezahlte Kleidungsstücke bei sich führt. Bei Kaufhausdieben spricht die Anlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% an, allerdings auch bei ehrlichen Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von 1%. 40% der Verdachtsfälle erweisen sich als gerechtfertigt. Wie groß ist demnach der Anteil der Diebe unter allen Kunden? (6 BE)

   (b) Durch Verbesserungsmaßnahmen soll der Anteil von 40% der überführten Diebe unter den verdächtigen Kunden erhöht werden. Wie viele Diebe müssen mindestens unter 256 Verdachtsfällen sein, damit die Behauptung, dass die Verbesserungsmaßnahmen keine Erhöhung des besagten Anteils erbringen, auf dem Signifikanzniveau 5% abgelehnt werden kann? Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung. (8 BE)

4. In der Endausscheidung einer Modenschau werden 9 Modellkleider des Kaufhauses hintereinander vorgeführt.

   (a) Wie viele möglichen Reihenfolgen gibt es hierfür, wenn zwischen den drei Modellkleidern des Designers Liegerwiese keine anderen Kleider präsentiert werden sollen? (3 BE)

   (b) Jedes Mitglied einer vierköpfigen Jury gibt seine Stimme dem Kleid, das ihm am besten gefällt. Wie viele verschiedene Stimmenverteilungen sind möglich, wenn man nur nach der Stimmenzahl unterscheidet, die jedes Kleid erhält? (5 BE)