Abiturprüfung 1998

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

BE

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f:\ x \mapsto \ln\frac{x+1}{6-|x|}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

6 1. Zeigen Sie: $D = \left]-\infty; -6\right[\cup \left]-1; 6\right[$

4 2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.

2 3. Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern von $\left]-1; 6\right[$.

7 4. a) Zeigen Sie, dass gilt: $f'(x) > 0$ für $x \in \left]-1; 6\right[\setminus \{0\}$.
Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} f'(x)$ und $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} f'(x)$.

$$\left[\text{Teilergebnis}: f'(x) = \frac{7}{(x+1)\cdot(6-x)} \text{ für } 0 < x < 6\right]$$

4 b) Untersuchen Sie, für welchen Wert von x der Term $(x + 1) \cdot (6 - x)$ ein lokales Extremum annimmt.
Begründen Sie (ohne Verwendung von f'') anhand des Terms $f'(x)$, dass G_f in $\left]0; 6\right[$ genau einen Wendepunkt W besitzt, und geben Sie die Koordinaten von W an.

5 5. Berechnen Sie $f(5)$ und $f'(2{,}5)$. Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Intervall $\left]-1; 6\right[$. Arbeiten Sie insbesondere die Ergebnisse der Grenzwertbetrachtungen aus Teilaufgabe 4a erkennbar ein (Längeneinheit 1 cm, Ursprung in Blattmitte).

4 6. a) Die Einschränkung von f auf $\left]-1; 0\right]$ wird mit g bezeichnet.
Begründen Sie, dass g eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt, und zeigen Sie, dass gilt: $g^{-1}(x) = -1 - \frac{5e^x}{e^x - 1}$

2 b) Zeichnen Sie den Graphen von g^{-1} in das Koordinatensystem von Aufgabe 5 ein.

6 7. Im dritten Quadranten wird durch die Koordinatenachsen, den Graphen von g und die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ ein Flächenstück begrenzt. Zeigen Sie, dass es einen endlichen Inhalt besitzt, und geben Sie diesen an.

40

BE	

II.

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{kx}{x^2 - k^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

3 1. a) Bestimmen Sie D_k und untersuchen Sie G_k auf Symmetrie und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

3 b) Geben Sie das Verhalten von f_k an den Rändern von D_k an.

4 2. a) Bestätigen Sie, dass gilt: $f_k'(x) = \frac{-k \cdot (x^2 + k^2)}{(x^2 - k^2)^2}$

Untersuchen Sie f_k auf Monotonie.

5 b) Zeigen Sie, dass der Ursprung der einzige Wendepunkt von G_k ist, und geben Sie eine Gleichung der Wendetangente t_k an.

4 c) Bestimmen Sie die Koordinaten aller weiteren Punkte von G_k, in denen die Tangenten parallel zu t_k verlaufen.

5 3. Zeichnen Sie G_2 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 1 cm).

4. Gegeben ist die Integralfunktion $F : x \mapsto \int_3^x f_2(t)\,dt$ mit $x \in \left]2; \infty\right[$.

2 a) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F umkehrbar ist.

6 b) Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von F und bestätigen Sie, dass für die Umkehrfunktion F^{-1} gilt: $F^{-1}(x) = \sqrt{5e^x + 4}$

5. Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto \frac{1}{x - 2}$ mit $x \in \left[0; 2\right[$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

3 a) Weisen Sie nach, dass für $0 \le x < 2$ gilt: $h(x) < f_2(x)$

5 b) Im vierten Quadranten liegt zwischen den Graphen G_2 und G_h ein Flächenstück. Zeigen Sie, dass dieses einen endlichen Inhalt besitzt, und geben Sie ihn an.

40

BE

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

Um den Bahnverkehr zu beschleunigen, werden von einem Bahnunternehmen neue Züge eingesetzt. Auf einer Strecke verkehren in einer Richtung täglich 9 Züge des alten Typs A und 3 Züge des neuen Typs B; jeder Zug fährt genau einmal am Tag. Die Züge sind nur hinsichtlich des Typs unterscheidbar. Züge vom Typ A haben die Pannenwahrscheinlichkeit 0,5 %, d. h., mit dieser Wahrscheinlichkeit tritt bei einer Fahrt eine Panne auf. Es wird angenommen, dass es bei einer Fahrt höchstens zu einer Panne kommt.

1. Wie viele verschiedene Zugfolgen gibt es an einem Tag für die 12 Züge, wenn

2 a) der erste Zug vom Typ B ist,

5 b) keine zwei Züge vom Typ B hintereinander fahren?

7 2. Ein Zug vom Typ A benötigt für eine pannenfreie Fahrt 40 Minuten, einer vom Typ B nur 35 Minuten. Eine Panne verlängert ausschließlich die betroffene Fahrt, und zwar um 10 Minuten. Das Bahnunternehmen stellt fest, dass die mittlere Fahrzeit auf der Strecke 39 Minuten beträgt. Berechnen Sie die Pannenwahrscheinlichkeit, die Züge vom Typ B demnach haben.

In der Einführungssphase haben Züge vom Typ B eine Pannenwahrscheinlichkeit von 8,5 %.

3. Die 9 Züge vom Typ A und die 3 Züge vom Typ B verkehren täglich in zufälliger Reihenfolge.

3 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss ein Fahrgast bei seiner Fahrt mit dem Auftreten einer Panne rechnen?

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei fünf Fahrten mehr als eine Panne auf ?

5 c) Auf einer Fahrt tritt keine Panne auf.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das eine Fahrt mit Typ B?

6 4. Untersuchen Sie für 3 aufeinander folgende Fahrten eines Zugs vom Typ B die Ereignisse C: „Höchstens eine Pannenfahrt“ und D: „Panne bei der zweiten Fahrt“ auf Unabhängigkeit.

8 5. Der Hersteller verbessert nun die Züge vom Typ B. Er behauptet, dass die Pannenwahrscheinlichkeit pro Fahrt jetzt nur noch höchstens 1 % beträgt. Die Behauptung des Herstellers (Nullhypothese) soll mit einem Signifikanztest auf dem 5 %-Signifikanzniveau überprüft werden. Dazu lässt das Unternehmen an 255 Werktagen eines Jahres bei allen 12 Fahrten am Tag nur noch Züge vom Typ B fahren und ermittelt die Anzahl der Pannenfahrten. Bestimmen Sie mit der Normalverteilung die Entscheidungsregel.

40

BE

IV.

In der Rinderpopulation eines Landes tragen 4 % der Rinder den Erreger der Seuche B in sich; diese werden im Folgenden als B-Rinder bezeichnet. Alle anderen Rinder werden im Folgenden als gesund bezeichnet. Äußerlich sind B-Rinder nicht von gesunden Rindern zu unterscheiden. Man kann von einem gleichmäßigen Durchseuchungsgrad innerhalb des Landes ausgehen. In Instituten kann durch Untersuchung der Zellflüssigkeit der B-Erreger zweifelsfrei nachgewiesen werden.

3 1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 100 Rindern mindestens zwei und weniger als sechs B-Rinder?

4 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Rindern mehr als 30 und weniger als 50 B-Rinder? Schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der Ungleichung von Tschebyschow ab.

4 c) Wie viele Rinder müssen in einem Institut mindestens untersucht werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens ein B-Rind entdeckt wird?

5 2. Ein Institut untersucht 3000 Rinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 100 dieser Rinder B-Rinder?
Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung.

6 3. Durch einen zweiseitigen Test auf dem 5 %-Signifikanzniveau soll mit einer Stichprobe von 200 Rindern der Prozentsatz für B-Rinder überprüft werden. Bestimmen Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich
$\overline{A} = \{0, ..., k_1\} \cup \{k_2, ..., 200\}$ so, dass die Hypothese $H_o : p_o = 0{,}04$ in jedem Teilbereich mit höchstens 2,5 % Wahrscheinlichkeit irrtümlich abgelehnt wird.

8 4. Die Rinderseuche wurde auch in ein Nachbarland eingeschleppt. Noch ist unbekannt, wie groß der Anteil p' der B-Rinder in dieser Rinderpopulation ist. Für eine groß angelegte Reihenuntersuchung mehrerer tausend Rinder zur Bestimmung von p' muss man sich zwischen zwei Methoden entscheiden. Es werden jeweils Gruppen von 20 Rindern untersucht; dabei wird zunächst jedem Rind Zellflüssigkeit entnommen.
Methode I: Es wird Zellflüssigkeit aller 20 Rinder vermischt und das Gemisch untersucht. Wird kein Hinweis auf B festgestellt, so sind keine weiteren Untersuchungen notwendig. Stellt man im Gemisch den Erreger der B-Seuche fest, werden die 20 Zellflüssigkeiten noch einzeln untersucht.
Methode II: Die 20 Proben von Zellflüssigkeit werden von vornherein einzeln untersucht.
Für welche Werte von p' sind bei Methode I weniger Zellflüssigkeitsuntersuchungen zu erwarten als bei Methode II?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	5. Im Institut wurden versehentlich fünf B-Rinder und sieben gesunde Rinder in einem Stall zusammen untergebracht. Um sie wieder zu trennen, werden sie der Reihe nach untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mit der 7. Untersuchung das letzte der fünf B-Rinder gefunden?
5	6. Ein von einem Tierarzt durchzuführender, einfacher Schnelltest erkennt 95 % der B-Rinder als solche. Irrtümlicherweise stuft dieser Schnelltest von den gesunden Rindern 15 % als B-Rinder ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Durchseuchungsgrad von 4 % ein durch den Schnelltest für gesund erklärtes Rind auch wirklich gesund ist.
40	

BE

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind gegeben:
Die Punkte A(1|5|-2), B(11|0|-2), C(5|8|-2),

die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und

die Ebenenschar $H_a: 3x_1 - 4x_2 + 5ax_3 + (17 - 15a) = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

3 1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist, und berechnen Sie die Längen seiner Katheten.

3 b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene G, in der A, B und C liegen, in Normalenform an. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat G?

2 c) Zeigen Sie, dass die Geraden h und g = AC echt parallel sind.

7 d) Berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h und bestimmen Sie die Punkte D und E auf h so, dass das Viereck ADEC ein Rechteck ist. Begründen Sie, dass dieses Rechteck senkrecht auf der Ebene G steht. [Teilergebnis: D(1|5|3)]

4 e) Die Punkte A, D, E, C und B bilden eine Pyramide. Fertigen Sie eine saubere Skizze an, in der diese Pyramide sowie die Ebene G und die Geraden g und h eingetragen sind.

3 f) Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide ADECB.

2 2. a) Zeigen Sie, dass h in jeder Ebene H_a liegt.

5 b) Wie muss a gewählt werden, damit H_a die Strecke [BC] schneidet?

5 c) Die Pyramide ADECB wird von der Ebene H_1 in einer Fläche Σ geschnitten. P ist der Schnittpunkt der Ebene H_1 und der Strecke [BC]. Kennzeichnen Sie Σ in der Skizze aus Teilaufgabe 1e. Bestimmen Sie dazu das Verhältnis, in dem P die Strecke [BC] teilt.

6 d) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Σ.

40

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(2|-1|0) und C(1|2|-11), die Geradenschar $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-t \\ -1+3t \\ -11t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda, t \in \mathbb{R}$

sowie die Ebene $E : x_1 + 4x_2 + x_3 + 2 = 0$ gegeben.

5 1. a) Wie liegen die Geraden g_t zueinander? Zeigen Sie, dass durch die Geradenschar g_t, $t \in \mathbb{R}$, die gleiche Punktmenge wie durch die Ebene E beschrieben wird.

2 b) Untersuchen Sie, ob eine Gerade g_t die x_1-Achse schneidet.

4 c) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf g_0 liegt. Bestimmen Sie ferner die Koordinaten des Punkts $B(b_1|b_2|b_3)$ auf der Geraden g_0 so, dass gilt: $\overline{AB} = 12$ und $b_1 < 0$. [Teilergebnis: B(-6|3|-8)]

3 d) Der Punkt C liegt in E (Nachweis nicht erforderlich). Auf welcher Geraden g_t liegt er?

4 e) Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden g_0 und g_1.

7 2. a) Begründen Sie, dass es einen Punkt D auf g_1 gibt, der zusammen mit den Punkten A, B und C ein achsensymmetrisches Trapez festlegt. Bestimmen Sie die Koordinaten von D und eine Gleichung der Symmetrieachse s dieses Trapezes ABCD.

3 b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes.

[zur Kontrolle: $45\sqrt{2}$]

3. Die Kugel k hat den Mittelpunkt M(-8|-3|0) und den Radius $r = 6\sqrt{2}$.

7 a) Begründen Sie, dass k die Ebene E schneidet. Wie groß ist der Radius des Schnittkreises?

5 b) ABCDS ist eine Pyramide, deren Spitze S auf der Kugel k liegt. Berechnen Sie das größtmögliche Volumen, das eine solche Pyramide haben kann.

40