Abiturprüfung 1999

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

BE

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}$ mit der größtmöglichen Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(x \cdot \ln x) = 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.

6 1. a) Bestimmen Sie D_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Geben Sie auch alle Asymptoten an.

7 b) Bestätigen Sie: $f'(x) = -\frac{1+\ln(x+1)}{[(x+1)\cdot\ln(x+1)]^2}$

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunkts.

3 c) Geben Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt $(e-1 \mid \frac{1}{e})$ an.

6 d) Zeichnen Sie G_f und die Tangente t unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1 < x < 4$ [Längeneinheit 2 cm].

4 2. a) Begründen Sie allgemein, dass jede streng monotone Funktion umkehrbar ist. Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass jedoch nicht jede umkehrbare Funktion streng monoton ist.

3 b) Die Einschränkung f* von f auf $D^* = \mathbb{R}^+$ ist umkehrbar. Für die Umkehrfunktion g von f* lässt sich kein Funktionsterm g(x) angeben. Geben Sie trotzdem $g(\frac{1}{e})$ und $g'(\frac{1}{e})$ an.

3. Nun wird für $k > 0$ die Schar der Integralfunktionen $J_k: x \mapsto \int_k^x f(t)\,dt$ betrachtet.

1 a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_k von J_k an.

4 b) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von J_k.

6 c) Es gilt: $J_{e-1}(x) = \ln(\ln(x+1))$.

Lösen Sie die Gleichung

$$-J_{e-1}(\sqrt{e}-1) = J_{e-1}(x)$$

nach x auf und deuten Sie Ihr Ergebnis anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe 1d geometrisch.

40

BE	

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet.

6 1. a) Bestimmen Sie D_f und prüfen Sie, ob der Graph Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzt.
Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

7 b) Zeigen Sie: $f'(x) = -f(x) \cdot \dfrac{2x-1}{x^2}$

Ermitteln Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung Art und Lage des Extrempunkts von G_f.

5 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f, die den Ursprung enthält.

6 d) Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie des Grenzwerts $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = 0$ (Nachweis nicht verlangt) den Graphen G_f im Bereich $-3 < x < 3$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 2 cm. Zeichnen Sie auch die Tangente t ein.

2. Die Integralfunktion J ist definiert durch

$$J(x) = \int_{0,5}^{x} f(t)\,dt \quad \text{für } x > 0.$$

6 a) Begründen Sie ohne Berechnung der integralfreien Darstellung von J, weshalb folgende Aussagen zutreffen:
J ist streng monoton steigend.
J besitzt genau eine Nullstelle.
Der Graph von J hat genau einen Wendepunkt.

7 b) Ermitteln Sie nun eine integralfreie Darstellung von J(x). Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} J(x)$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} J(x)$ und geben Sie den Inhalt des Flächenstücks an, das sich im 1. Quadranten zwischen dem Graphen G_f und der x-Achse ins Unendliche erstreckt.

3 c) Skizzieren Sie den Graphen von J unter Verwendung aller Ergebnisse in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d.

40

BE

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

III.

1. Der Zugang zu einem Computer eines Netzwerks ist durch ein zehnstelliges Codewort gesichert. Jede Stelle des Codeworts wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus einem Vorrat von 64 Zeichen besetzt.

3 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht das Codewort aus lauter verschiedenen Zeichen?

3 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält das Codewort nur Zeichen aus einer bestimmten Teilmenge von 30 Zeichen?

4 c) Sind die Ereignisse aus a und b stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Ein Unternehmensberater setzt für die Zufallsgröße X: „Anzahl der täglichen Systemabstürze“ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung als Planungsgrundlage an:

X	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,67	0,25	0,05	0,03

4 a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X.

6 b) 365 Tage lang wird die Anzahl X der Systemabstürze pro Tag beobachtet. Bestimmen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall um den Erwartungswert von X, in dem das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der Anzahl der Abstürze pro Tag mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90 % liegen muss.

3 c) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}$ um weniger als ε vom Erwartungswert von X abweicht, gegen 1 geht, wenn die Zahl n der Beobachtungstage beliebig groß wird.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	3. Bei einer genaueren Untersuchung des Netzwerks stellt sich heraus, dass Abstürze unabhängig voneinander auftreten und zu 60 % auf reine Bedienungsfehler zurückzuführen sind.
6	a) Es werden die nächsten Abstürze beobachtet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist (1) frühestens der vierte, (2) spätestens der vierte Absturz auf einen reinen Bedienungsfehler zurückzuführen?
5	b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den nächsten 150 Abstürzen mehr als 100 durch reine Bedienungsfehler verursacht werden. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.
6	4. Das Personal wird einer Schulung unterzogen. Angeblich sind danach nur noch höchstens 40 % der Abstürze auf reine Bedienungsfehler zurückzuführen. Bei den nächsten 100 Systemabstürzen waren in 45 Fällen reine Bedienungsfehler die Ursache. Untersuchen Sie, ob man die Vermutung, dass nur noch höchstens 40 % der Abstürze auf reine Bedienungsfehler zurückzuführen sind, auf Grund dieses Testergebnisses auf dem Signifikanzniveau von 5 % ablehnen kann.
40	

BE

IV.

1. Ein Ferienhotel hat 4 Stockwerke mit je 40 Zimmern. Jedes Stockwerk besteht aus zwei einander gegenüberliegenden Zimmerreihen mit je 20 Zimmern.

2 a) Ein Kegelverein möchte 6 nebeneinander liegende Zimmer mieten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diesen Wunsch zu erfüllen, wenn im Hotel noch alle 160 Zimmer frei sind?

4 b) Vier Ehepaare bestellen jeweils ein Zimmer. Diese werden ihnen rein zufällig zugewiesen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle vier Zimmer im gleichen Stockwerk, wenn bis dahin nur sechs Zimmer im 4. Stockwerk vergeben sind?

5 2. 11 % aller Buchungen werden üblicherweise nicht wahrgenommen. Deshalb nimmt der Manager des Hotels 170 Buchungen für die 160 Zimmer an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt er Ärger durch Überbuchung?
Rechnen Sie mit der Normalverteilung als Näherung.

3. Im Hotelrestaurant bestellen die Gäste mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % das Tagesmenü.

4 a) Wie viele Gäste müssen das Hotelrestaurant mindestens besuchen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens einer dieser Gäste das Tagesmenü bestellt?

Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass 10 % der Gäste, die das Tagesmenü bestellen, und 70 % der übrigen Gäste das Essen mit einem Kaffee abschließen.

4 b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Gast keinen Kaffee trinkt.

3 c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trinken von 100 Gästen, die das Tagesmenü bestellen, mindestens drei mehr als erwartet einen Kaffee?

8 4. Der Anteil der Hausgäste unter den Restaurantbesuchern sei p. Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter vier zufällig ausgewählten Restaurantbesuchern ein oder zwei Hausgäste sind, maximal? (Rechnen Sie wie beim „Ziehen mit Zurücklegen“.)

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

5 5. Ein Kellner weiß aus langjähriger Erfahrung, dass die Gäste unabhängig voneinander im Mittel 5 DM Trinkgeld pro Abrechnung geben, wobei die Zufallsgröße T: „Trinkgeld pro Abrechnung“ eine Standardabweichung von 1,50 DM besitzt. An einem Abend werden 120 Abrechnungen gezählt.
Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow die Wahrscheinlichkeit ab, mit der das Trinkgeld an diesem Abend zwischen 570 DM und 630 DM liegt.

5 6. Wenn mindestens 4 % der Gäste mit dem Service unzufrieden sind, sollen Sonderschulungen für das Personal abgehalten werden.
200 Gäste werden zufällig ausgewählt und befragt.
Bei welcher Entscheidungsregel wird die Nullhypothese H_o: „Mindestens 4 % der Gäste sind unzufrieden“ mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irrtümlich abgelehnt?

40

BE

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(0|6|0)$, $D_k\left(\frac{3\sqrt{3}}{k}|3|0\right)$ und $S_k(2|2|k\sqrt{6})$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

1. Die Punkte O, A und D_k bestimmen die Ebene E, die Punkte O, A und S_k die Ebene F_k.

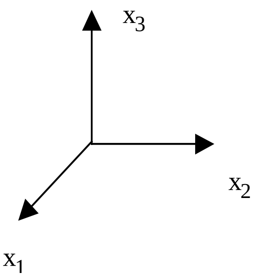
5 a) Stellen Sie je eine Gleichung von E und F_k in Normalenform auf.
[mögliches Teilergebnis: $F_k: k\sqrt{6}x_1 - 2x_3 = 0$]

4 b) Für welches k schneiden sich E und F_k unter einem Winkel von 60°?

2. Alle Punkte D_k liegen auf einer Geraden d, alle Punkte S_k auf einer Geraden s.

3 a) Geben Sie für d und s je eine Gleichung an.

4 b) Legen Sie ein Koordinatensystem an (vgl. Skizze).
Zeichnen Sie d und s ein und markieren Sie farbig die Teile dieser Geraden, die von den Punkten D_k bzw. S_k eingenommen werden.



4 3. a) O, A, D_k, S_k sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide P_k. Berechnen Sie ihr Volumen.

5 b) Zeigen Sie, dass das Dreieck OAD_k nur für k = 1 gleichseitig ist.

Im Folgenden sei k = 1.

6 4. a) Der Punkt $T(t_1|t_2|t_3)$, $t_3>0$, bildet mit O, A und D_1 ein reguläres Tetraeder. Bestimmen Sie die Koordinaten von T und zeichnen Sie das Tetraeder und die Pyramide P_1 in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 2b ein.

3 b) In welchem Punkt Q schneidet die Gerade TS_1 die Ebene E?
[zur Kontrolle: $Q(4-\sqrt{3}|1|0)$]

6 c) Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Punkt Q innerhalb des Dreiecks OAD_1 liegt.

40

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ die Geraden } h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu, a \in \mathbb{R},$$

sowie die Ebene $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 15 = 0$ gegeben.

3 1. a) Zeigen Sie, dass jede Gerade h_a mit der Ebene E höchstens einen Punkt gemeinsam hat.

3 b) Berechnen Sie den Schnittwinkel φ zwischen E und h_2 auf 0,1° genau.

3 2. a) Beweisen Sie, dass alle Geraden h_a windschief zu g sind.

4 b) Weisen Sie nach, dass alle Geraden h_a in der Ebene $H: 2x_2 - x_3 - 21 = 0$ liegen und diese Ebene H parallel zu g ist.

3 c) Es gibt eine Gerade h* in der Ebene H, die zwar durch den gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden h_a geht, aber nicht zur Schar der Geraden h_a gehört. Geben Sie eine Gleichung von h* an.

3 d) Zeigen Sie, dass der Abstand von g zu H den Betrag $6\sqrt{5}$ hat.

7 3. Berechnen Sie die Koordinaten der Fußpunkte des gemeinsamen Lots von g und h_2. [zur Kontrolle: $(8|-1|7)$, $(8|11|1)$]

4 4. a) K ist die kleinste Kugel, die g und h_2 als Tangenten hat. Bestimmen Sie den Radius R und den Mittelpunkt M von K.
[zur Kontrolle: $R = 3\sqrt{5}$, $M(8|5|4)$]

6 b) Zeigen Sie, dass die Ebene E die Kugel K schneidet, und berechnen Sie den Radius r des Schnittkreises k.

4 c) Dieser Schnittkreis k ist die Grundfläche eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinien Tangenten an die Kugel K sind. Bestimmen Sie die Höhe dieses Kegels.

40