Beispielabitur

MATHEMATIK

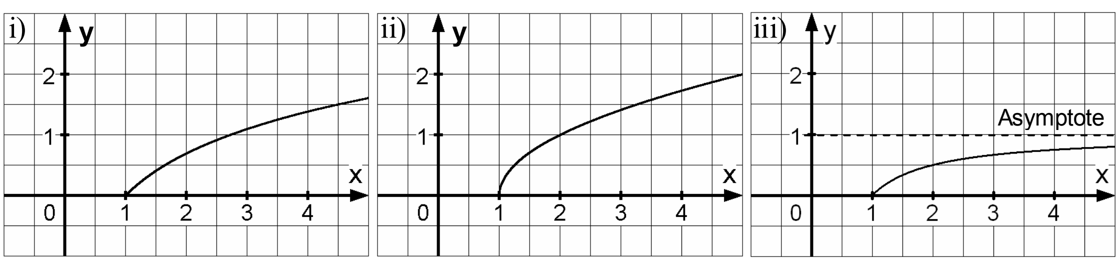
Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
M1, M2 und M3 zur Bearbeitung aus.

M1. ANALYSIS

AI – Teil 1

BE	
3	1. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f: x \mapsto (e^x - 2) \cdot (x^3 - 2x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.
6	2. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x-2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Geben Sie D_f an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$.
3	3. Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f an, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: • Der Graph von f berührt an der Stelle $x = 1$ die x-Achse. • f hat $x = 3$ als Polstelle.
3	4. Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion der Funktion $f: x \mapsto \ln(2x)$, $D_f = \mathbb{R}^+$.
5	5. Für $x \geq 1$ sind die Funktionen mit den folgenden Termen gegeben: $f(x) = \sqrt{x-a}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = -\frac{1}{x} + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Ordnen Sie die Funktionen den nachfolgenden Graphen zu und bestimmen Sie die Parameter a und b. Erklären Sie Ihr Vorgehen.



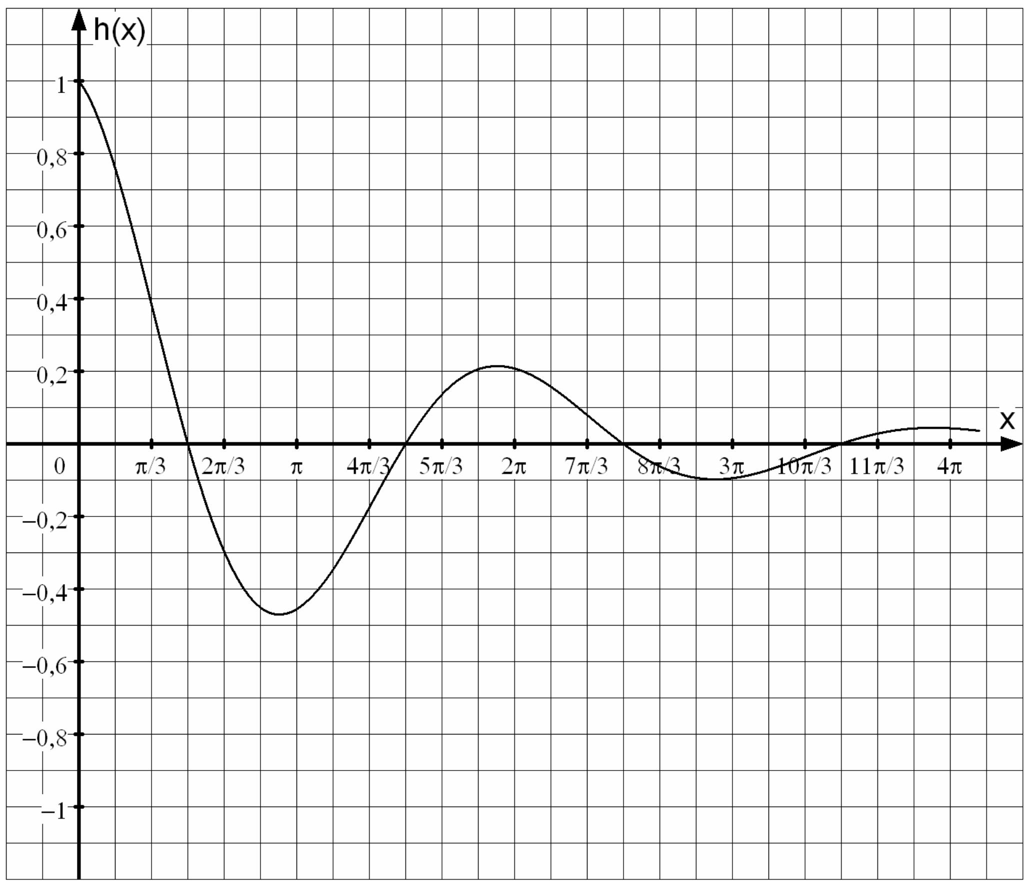
(Fortsetzung nächste Seite)

BE	**AI – Teil 2**
	6. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
2	a) Zeichnen Sie den Graphen G_f in ein Koordinatensystem.
6	b) Dem Flächenstück, das G_f mit der x-Achse einschließt, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Rechteckseite auf der x-Achse liegt. Berechnen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt A eines solchen Rechtecks. [Ergebnis: $A = \frac{16}{9}\sqrt{3}$]
5	c) Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächenstücks, das G_f mit der x-Achse einschließt, vom Rechteck maximalen Flächeninhalts aus Teilaufgabe 6b bedeckt werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

7. Gegeben sind die Funktionen $g: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x}$, $D_g = \mathbb{R}$, und $h: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$, $D_h = \mathbb{R}$. Der Graph von h ist für $x \geq 0$ im nachfolgenden Diagramm dargestellt.



8 a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und geben Sie das Verhalten von g für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.
Berechnen Sie die Funktionswerte $g(0)$, $g(\pi)$, $g(2\pi)$, $g(3\pi)$ und $g(4\pi)$ und zeichnen Sie damit die Graphen von g und von $-g$ in obiges Koordinatensystem ein.

3 b) Die Funktion h entsteht aus der Kosinusfunktion $x \mapsto \cos x$, $D = \mathbb{R}$, durch Multiplikation mit der Funktion g. Beschreiben Sie, inwiefern sich der Graph von h aufgrund dieser Multiplikation vom Graph der Kosinusfunktion unterscheidet. Gehen Sie dabei auch auf die Nullstellen von h und die Funktionswerte $h(n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	c) Berechnen Sie den Term $h'(x)$ der ersten Ableitung von h und weisen Sie nach, dass für Extremstellen von h gilt: $\tan x = -0{,}25$. Zeigen Sie damit, dass die Extremstellen von h gegenüber den Extremstellen der Kosinusfunktion verschoben sind.
4	d) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen I und II wahr oder falsch sind, und machen Sie Ihre Antworten plausibel: I. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ II. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$
3	e) Die Funktion $H: x \mapsto \frac{16}{17} e^{-\frac{1}{4}x} (\sin x - \frac{1}{4} \cos x)$, $D_H = \mathbb{R}$, ist Stammfunktion von h. Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\int_0^{2\pi} h(x)\,dx$ positiv ist, und deuten Sie diesen Zusammenhang am Graph von h.
3	f) Es gibt Werte a > 0, für die $\int_0^{a} h(x)\,dx$ negativ ist. Geben Sie einen solchen Wert an und begründen Sie Ihre Wahl ohne Rechnung.
60	

BE	AII – Teil 1
5	1. Geben Sie für die Funktionen mit den folgenden Termen jeweils die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen. $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $f_2(x) = \sqrt{x-1}$, $f_3(x) = \ln(x-1)$
5	2. Es gibt genau eine Tangente an den Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, deren Neigungswinkel gegen die x-Achse 135° beträgt. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente.
	3. Der Graph einer auf $\mathbb{R}$ definierten, integrierbaren Funktion f sei punktsymmetrisch zum Ursprung.
3	a) Begründen Sie allgemein, dass dann für alle $a > 0$ gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
4	b) Wählen Sie selbst eine Funktion f, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und bestätigen Sie für dieses f die Aussage aus Teilaufgabe 3a, indem Sie das Integral für die gewählte Funktion f mithilfe einer Stammfunktion berechnen.
3	4. Welcher der angegebenen Terme nähert die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x} + x + 1$ für große Werte von x am besten? Machen Sie Ihre Antwort plausibel. (i) $\frac{1}{x}$ (ii) x (iii) $x+1$ (iv) $\frac{1}{x}+1$ (v) $\frac{1}{x}+x$

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

AII – Teil 2

5. Die Funktion $f: t \mapsto 3(1-e^{-t})-t$ wird im Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}_0^+$ betrachtet. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

10 a) Bestimmen Sie das Verhalten von f an den Grenzen von D_f.
Zeigen Sie, dass G_f genau einen Hochpunkt besitzt, und berechnen Sie dessen Koordinaten.
Berechnen Sie f(3) und skizzieren Sie G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse.
[Zur Kontrolle: Hochpunkt an der Stelle $t = \ln 3$]

3 b) Im Intervall [2; 3] besitzt f genau eine Nullstelle a. Führen Sie mit dem Startwert 3 den ersten Schritt des Newton-Verfahrens zur näherungsweisen Berechnung von a durch.
Man erhält dadurch a auf zwei Dezimalen genau.
[Ergebnis: $a \approx 2{,}82$]

5 c) Berechnen Sie mithilfe des Näherungswerts aus Teilaufgabe 5b den Inhalt des Flächenstücks, das G_f im I. Quadranten mit der t-Achse einschließt.

5 d) Betrachtet wird die Funktion $F: x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt,\ D_F = D_f$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von F in der Nähe des Punktes $N\left(a \mid F(a)\right)$. Begründen Sie Ihre Ausführungen.
Welche Bedeutung hat das Ergebnis der Teilaufgabe 5c für die Funktion F?

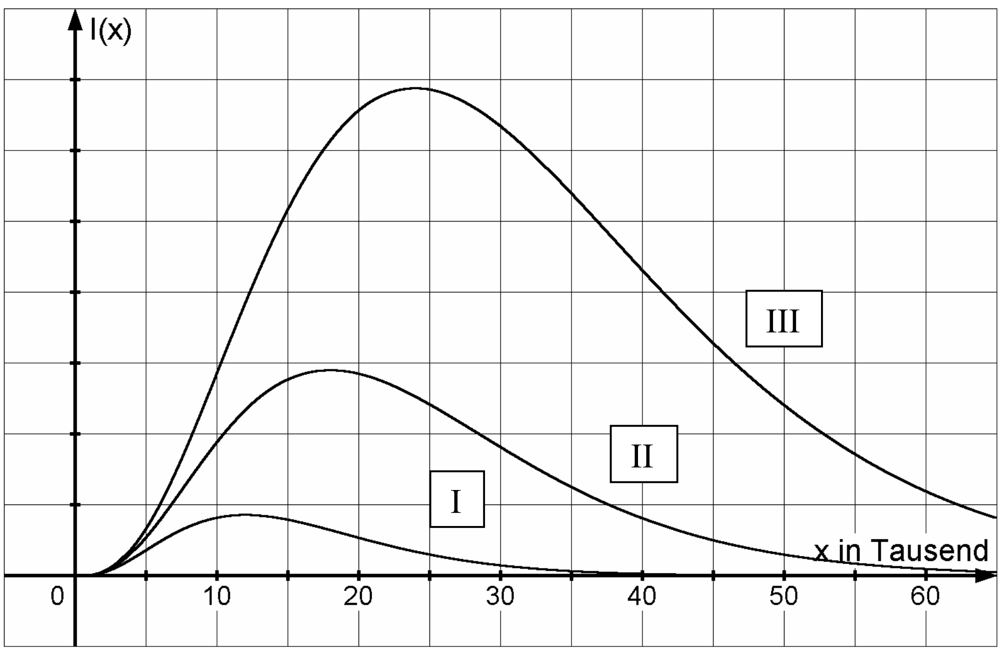
(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6. Jeder Körper sendet elektromagnetische Strahlung unterschiedlicher Frequenzen aus. Die Intensität der Strahlung hängt von der Frequenz der Strahlung ab. Im Idealfall gilt nach Max Planck für diese Intensität bei einem Körper der Temperatur T:

$$I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}\ ,\ D_{I_T} = \mathbb{R}^+.$$

Dabei entspricht x bis auf eine Konstante der Frequenz der Strahlung und der Parameter T (Temperatur in Kelvin) ist positiv.
Die Graphik zeigt die zu drei Werten des Parameters T gehörenden Graphen von I_T.
Jede Scharfunktion I_T hat genau eine Maximalstelle x_{max}.



In den folgenden Teilaufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

3 a) Weisen Sie am Funktionsterm nach, dass $I_T(x)$ stets positiv ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6 b) Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung der Funktion I_T gilt:

$$I'_T(x) = \frac{x^2 e^{\frac{x}{T}}\left[3\left(1-e^{-\frac{x}{T}}\right) - \frac{x}{T}\right]}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2}.$$

Vergleichen Sie diesen Term mit dem der Funktion f aus Aufgabe 5 und zeigen Sie, dass für die Maximalstelle x_{max} von I_T gilt: $\frac{x_{max}}{T} = a$, wobei a die positive Nullstelle von f ist.

5 c) Unsere Sonne liefert maximale Intensität für $x_{max} = 17 \cdot 10^3$ (gelbgrüner Farbbereich). Welche Oberflächentemperatur ergibt sich hieraus für die Sonne?
Ordnen Sie die gezeichneten Graphen der Funktionsschar I_T den Temperaturen $T_1 = 4000$ Kelvin, $T_2 = 6000$ Kelvin und $T_3 = 8000$ Kelvin zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

3 d) Ein Körper der Temperatur T liefert für x_{max} die Intensität $I_T(x_{max})$. Begründen Sie, dass sich $I_T(x_{max})$ verachtfacht, wenn ein Körper mit doppelt so hoher Temperatur betrachtet wird.

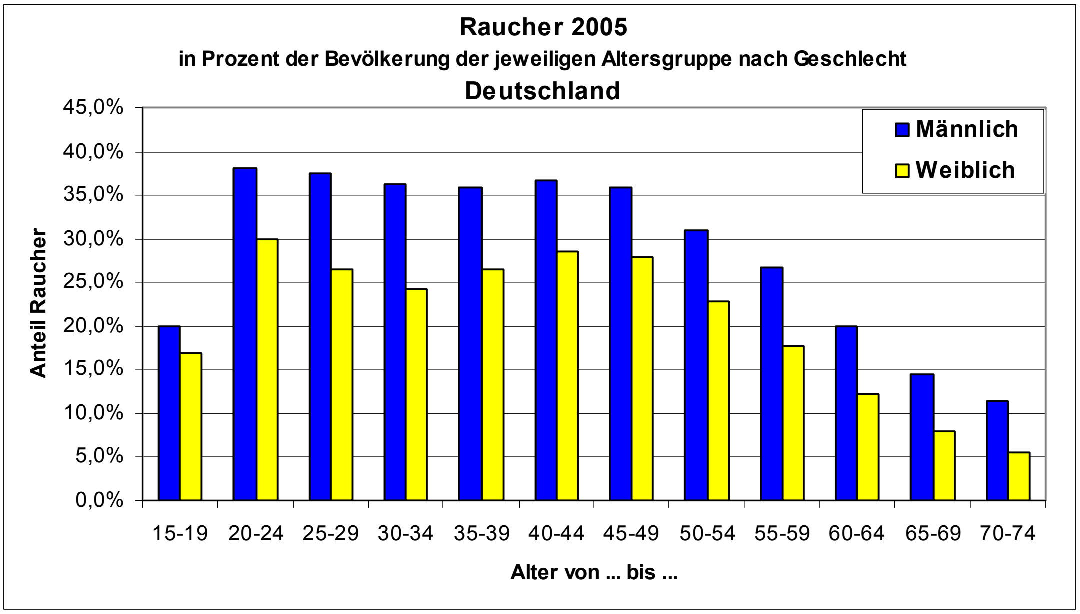
60

M2. STOCHASTIK

BE

SI.

Folgendes Diagramm zeigt Daten zum Rauchverhalten in bestimmten Altersgruppen, die das Statistische Bundesamt im Rahmen einer repräsentativen statistischen Erhebung, dem Mikrozensus 2005, veröffentlicht hat.



Dem Diagramm kann man beispielsweise entnehmen, dass 36 % der 35-39-jährigen Männer rauchen. Somit kann im Folgenden davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mann aus dieser Altersgruppe raucht, 36 % beträgt.

2 1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter 20-24-jähriger Mann Nichtraucher?

2 b) Wie viel Prozent der Bevölkerung in der Altersgruppe der 20-24-Jährigen rauchen, wenn man davon ausgeht, dass in dieser Altersgruppe gleich viele Frauen und Männer sind?

3 c) In einem Zeitungsartikel steht, dass 2005 die Anzahl rauchender Männer im Alter von 40 bis 44 Jahren mit 1,3 Millionen größer war als die entsprechende Anzahl bei den 20-24-Jährigen mit 0,9 Millionen. Erläutern Sie, inwiefern die Zeitungsmeldung mit dem obigen Diagramm in Einklang stehen kann.

4 2. Vier Frauen wurden zufällig ausgewählt. Zwei gehören zur Altergruppe der 20-24-Jährigen und je eine zur Gruppe der 15-19-Jährigen bzw. 60-64-Jährigen Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter ihnen mindestens eine Raucherin ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Zehn 20-24-jährige Frauen wurden zufällig ausgewählt.

4 a) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse A: „Unter ihnen sind genau drei Raucherinnen“ und B: „Unter ihnen sind höchstens vier Raucherinnen“.

5 b) Ein Skeptiker meint, dass die Raucherrate unter den 20-24-jährigen Frauen höher als 0,3 ist. Er testet die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}3$, wobei p die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass eine 20-24-jährige Frau raucht. Er stellt jeder der 10 ausgewählten Frauen die Frage „Sind Sie Raucherin?“ und erhält folgendes Antwortprotokoll: „ja – nein – ja – nein – ja – ja – nein – nein – nein – ja“. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis der Befragung die Meinung des Skeptikers auf einem Signifikanzniveau von 5 % stützt.

4. Zehn Raucher entschließen sich zu einer Entwöhnungskur. Zwei von ihnen sind starke Raucher, d. h. ihr Zigarettenkonsum übersteigt 20 Zigaretten pro Tag. Die Erfolgschancen der Behandlung liegen bei einem starken Raucher bei 60 %, bei einem nicht starken Raucher bei 70 %.

2 a) Wählen Sie die beiden Terme aus, welche die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass bei genau fünf der acht nicht starken Raucher die Entwöhnung erfolgreich ist.

(i) $\binom{8}{3}\cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^5$ (ii) $0{,}7^5 \cdot 0{,}3^3$ (iii) $1-\binom{8}{3}\cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^5$

(iv) $\binom{8}{5}\cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^3$ (v) $\binom{8}{5}\cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^3$ (vi) $\binom{8}{3}\cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^5$

5 b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Entwöhnung bei mindestens neun Personen der ganzen Gruppe Erfolg hat.

3 c) Im Verlauf der Behandlung wird ein Medikament getestet, das die Entwöhnung unterstützen soll. Fünf zufällig ausgewählte Gruppenmitglieder bekommen das Medikament, die anderen ein Placebo. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden starken Raucher das Medikament bekommen.

30

BE

SII.

1. Graphologen beschäftigen sich mit der Analyse von Handschriften. Ein Graphologe bewirbt sich um eine Stelle. Der Personalchef der betreffenden Firma möchte ihn testen und legt ihm dazu Schriftproben vor. Jede Schriftprobe stammt entweder von einer entscheidungsfreudigen oder einer zögerlichen Person. Dies wird dem Bewerber mitgeteilt.

5 a) Man plant, den Bewerber einzustellen, wenn er bei mehr als zwei Drittel von zwölf vorgelegten Schriftproben richtig entscheidet. Begründen Sie, dass der Bewerber die Stelle mit mehr als 7 % Wahrscheinlichkeit bekommen würde, wenn er nur rät.

Dem Personalchef ist es zu riskant, dass ein nur ratender Bewerber die Stelle mit mehr als 7 % Wahrscheinlichkeit bekommt. Er fordert, den Test so zu modifizieren, dass die Einstellungschance eines nur ratenden Bewerbers unter 3 % gedrückt wird. Man entscheidet sich, die Anzahl vorgelegter Schriftproben auf 30 zu erhöhen und bei mehr als zwei Drittel eine richtige Entscheidung zu verlangen.

3 b) Zeigen Sie, dass bei dem modifizierten Testverfahren die Forderung des Personalchefs erfüllt wird.

3 c) Der Graphologe interessiert sich anders als der Personalchef mehr dafür, dass seine Fähigkeiten fälschlicherweise nicht erkannt werden. Er schätzt, dass er bei jeder einzelnen Schriftprobe mit 75 % Wahrscheinlichkeit richtig entscheidet. Bestimmen Sie, wie hoch in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit ist, dass er bei dem modifizierten Test als ratend eingestuft wird.

2 d) Das modifizierte Testverfahren kann als einseitiger Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau 3 % gedeutet werden. Geben Sie die zugehörige Nullhypothese und den Ablehnungsbereich an.

2. Man liest gelegentlich, dass eine nach rechts geneigte Handschrift einen Hinweis auf Aufgeschlossenheit darstellt. In einer Abteilung mit 50 Angestellten gelten 35 als aufgeschlossen. 40 % der als aufgeschlossen geltenden Angestellten haben eine Handschrift, die nicht nach rechts geneigt ist. Weiter ist bei 6 Angestellten, die nicht als aufgeschlossen gelten, die Handschrift nach rechts geneigt.
Die Ereignisse R: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter hat eine nach rechts geneigte Handschrift“ und A: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter gilt als aufgeschlossen“ sollen auf stochastische Abhängigkeit untersucht werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
4	a) Stellen Sie die beschriebene Situation in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm oder in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.
2	b) Begründen Sie, dass die Ereignisse A und R stochastisch abhängig sind.
2	c) Von den im Vortext gegebenen Zahlenwerten soll nur der Prozentsatz 40 % so abgeändert werden, dass die Ereignisse R und A stochastisch unabhängig sind. Geben Sie den geänderten Wert an.
	3. Es ist bekannt, dass 25 % aller Unternehmen bei Neueinstellungen ein graphologisches Gutachten, d. h. eine Analyse der Handschrift des Bewerbers, zu Rate ziehen. Ein Stellensuchender bewirbt sich bei 20 Firmen.
2	a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf dieser Unternehmen ein graphologisches Gutachten einholen.
3	b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner als der zugehörige Erwartungswert ist.
4	c) Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als ihr Erwartungswert ist, beträgt höchstens 50 %.“
30	

M3. GEOMETRIE

BE

GI.

1. In einem kartesischen Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse zeigt in Richtung Osten, die x_2-Achse in Richtung Norden, die Längeneinheit ist 1 km.

   Ein Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt $P(-10|0|0)$ längs der Geraden $g_1\colon\ \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$, auf.

   Flugzeug F_2 fliegt entlang der Geraden $g_2\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$.

3 a) Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der F_1 fliegt und begründen Sie, dass F_2 eine konstante Flughöhe hält.

4 b) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 gegen die Horizontale.

3 c) F_1 überfliegt in einer Höhe von 6 km eine Radarstation im Punkt Z der x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten von Z.

[Ergebnis: $Z(20|30|0)$]

5 d) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge senkrecht schneiden.
Legen Sie dar, dass daraus auch bei unveränderten Flugbahnen nicht zwingend eine Kollision der beiden Flugzeuge folgt.

2 e) Der Richtungsvektor von g_2 beschreibt die konstante Geschwindigkeit des Flugzeugs F_2 in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters μ an.

6 f) Das Radar in Z erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 im Überwachungsbereich des Radars.

3 2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(2|3|-1)$ von der Ebene $E\colon\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$.

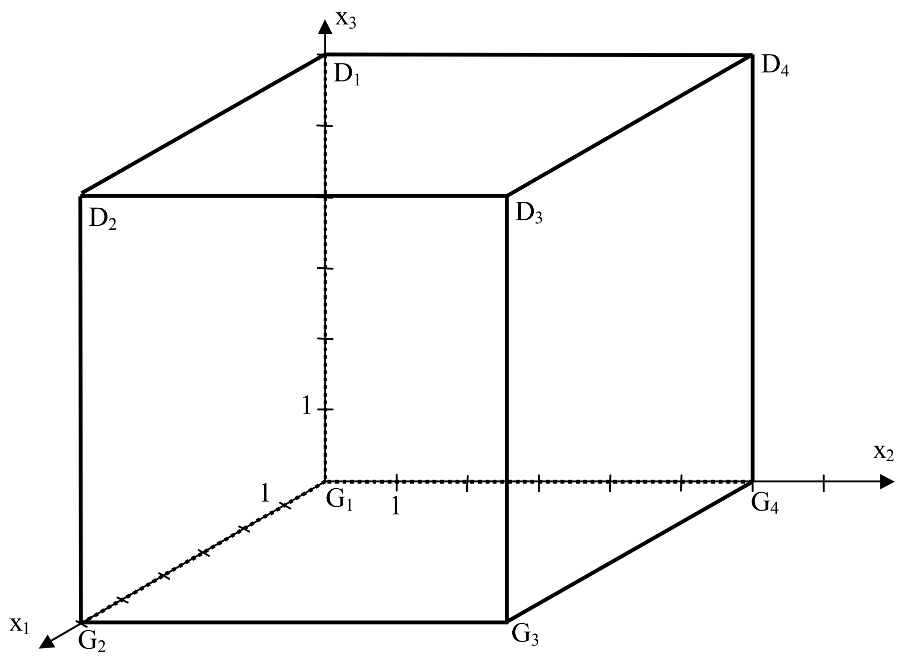
4 3. Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC, das sich durch einen Punkt D zu einem Drachenviereck ABCD ergänzen lässt.
Beschreiben Sie eine Abfolge von Schritten zur rechnerischen Ermittlung der Koordinaten von D.

30

BE

GII.

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel W der Kantenlänge 6 gegeben. Die Eckpunkte $G_1(0|0|0)$ und $D_3(6|6|6)$ legen eine Raumdiagonale fest.



5 a) Bestimmen Sie in Koordinatenform eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte D_1, G_2 und D_3 verläuft, und zeichnen Sie die Schnittfigur der Ebene E mit dem Würfel W ein.
[mögliches Ergebnis: E: $x_1 - x_2 + x_3 = 6$]

4 b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die E vom Würfel W abschneidet.
Wieviel Prozent des Würfelvolumens nimmt die Pyramide ein?

4 c) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene E gegen die Grundfläche $G_1G_2G_3G_4$.
Geben Sie drei Eckpunkte des Würfels W an, die eine Ebene so festlegen, dass sie mit der Grundfläche einen 45°-Winkel einschließt.

3 d) Zeigen Sie, dass die Ebene F mit der Gleichung F: $x_1 - x_2 + x_3 = 3$ parallel zu E mit Abstand $\sqrt{3}$ ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
10	e) Die Ebene F schneidet den Würfel W in einem regulären Sechseck. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene F mit der x_1- und der x_3-Koordinatenachse und bestätigen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke $[G_2G_3]$ auf F liegt. Zeichnen Sie alle sechs Schnittpunkte der Ebene F mit Kanten des Würfels sowie den Rand der sechseckigen Schnittfigur ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt des betrachteten Sechsecks.
4	f) Alle Ebenen parallel zu F werden durch Gleichungen der Form $x_1 - x_2 + x_3 = a$, mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Geben Sie an, welche Arten von Figuren als Schnitt einer solchen Ebene mit dem Würfel W auftreten. Geben Sie die Menge aller Werte von a an, für die die Schnittfigur ein Sechseck ist.
30	