Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2007/2008

Grundkurs Mathematik

CiMS-Schulen

14. Februar 2008, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer – Haupttermin

Diese Unterlagen sind <u>nicht</u> für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen <u>nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer</u>, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **240 Minuten.**
- Erlaubte Hilfsmittel: CAS-fähiger Rechner, Technikspezifische Benutzungsanleitung, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an BM 3 faxen!

Institut für Bildungsmonitoring
BM 3

Fax 42 79 67-006

Schulchiffre:

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Grundkurs **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: ________________

Unterschrift: ____________________________________

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **zwei Aufgaben** aus, davon eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet I** (Analysis) und eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet II** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) bzw. dem **Sachgebiet III** (Stochastik). Beide Aufgaben reichen Sie an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten beide Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen „Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur“ (S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 200 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 190	≥ 95 %	15
≥ 180	≥ 90 %	14
≥ 170	≥ 85 %	13
≥ 160	≥ 80 %	12
≥ 150	≥ 75 %	11
≥ 140	≥ 70 %	10
≥ 130	≥ 65 %	9
≥ 120	≥ 60 %	8

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 110	≥ 55 %	7
≥ 100	≥ 50 %	6
≥ 90	≥ 45 %	5
≥ 80	≥ 40 %	4
≥ 66	≥ 33 %	3
≥ 52	≥ 26 %	2
≥ 38	≥ 19 %	1
< 38	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht worden sind.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre		**BeBo EKo M**	
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)								BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	
								Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre			
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

BeBo ZKo M

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)								BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	
								Summe der BWE →	

Bewertungstext

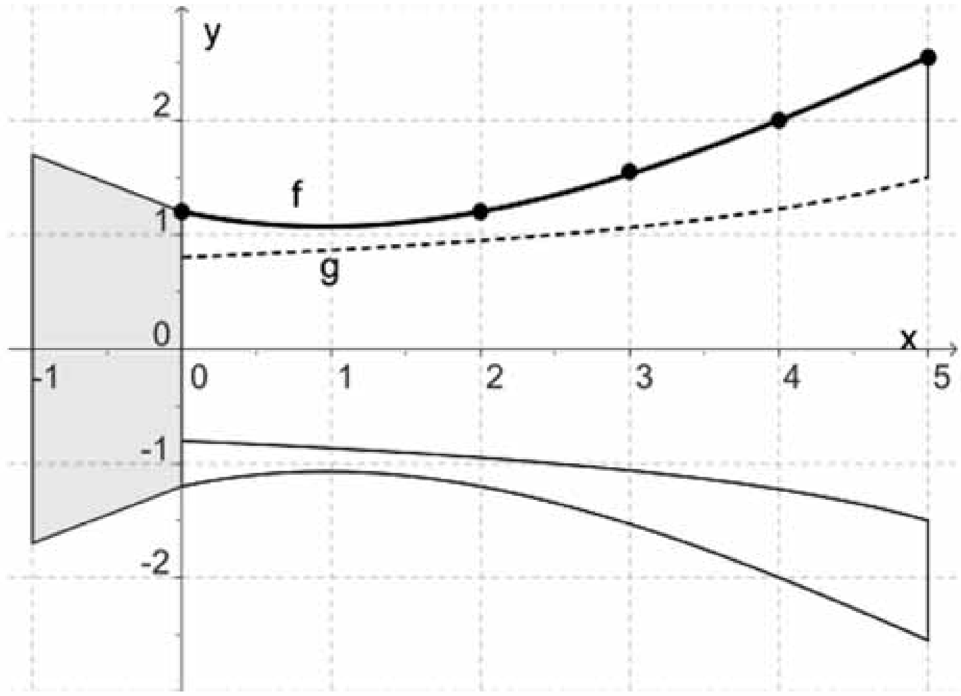
Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

ANALYSIS 1

I.1 Pflanzschalen

Eine Glashütte stellt Pflanzschalen her. Im Längsschnitt (gekippt) haben sie alle ungefähr die folgende Form.



Die einzelnen Modelle unterscheiden sich in der Breite und der Dicke.
Der obere Rand (im Längsschnitt rechts) ist parallel zur y-Achse geschliffen.
Der Boden der Schale ist ein Kegelstumpf.
Eine Einheit auf den Achsen entspricht einem Dezimeter in der Realität.

a) Anhand eines Modells soll eine Pflanzschale gefertigt werden. Für verschiedene Werte von x sind jeweils die Außenradien y der Wandung gemessen worden.

x in dm	0	2	3	4	5
y in dm	1,2	1,2	1,5	2,0	2,5

Berechnen Sie (ohne Benutzung von Regression) eine ganzrationale Funktion mit möglichst kleinem Grad, deren Graph alle 5 vorgegebenen Punkte enthält. **10 P**

Der Einfachheit halber wird im weiteren Verlauf der Aufgabe für die äußere Wandung (im Längsschnitt im Intervall [0; 5]) die Funktion f (dick gezeichnet) mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{100} \cdot x^3 + \frac{4}{25} \cdot x^2 - \frac{7}{25} \cdot x + \frac{6}{5}$$

benutzt. Die innere Funktion g (gestrichelt) ist erst einmal durch $g(x) = \sqrt{\frac{4,5}{7-x}}$ festgelegt.

b) Berechnen Sie den Innendurchmesser der Pflanzschale am Boden.

Berechnen Sie die in y-Richtung gemessene Wandstärke am oberen (in der Abbildung am rechten) Rand. **10 P**

c) Berechnen Sie unter der Verwendung der Ableitungsfunktion den kleinsten Außendurchmesser der Pflanzschale.

Bestimmen Sie auch die minimale in y-Richtung gemessene Wandstärke der Pflanzschale. Ermitteln Sie Ihr Ergebnis gerundet auf zwei Nachkommastellen. **15 P**

d) Berechnen Sie die Steigung der Funktion f an der Anschlussstelle zum kegelstumpfförmigen Boden.

Der Boden hat eine in x-Richtung gemessene Dicke von 1 dm. Er schließt sich knickfrei an den äußeren Rand der Wandung an.
Ermitteln Sie die Größe der Standfläche. **15 P**

e) Bestimmen Sie das Fassungsvermögen der Pflanzschale in Litern.

Bestimmen Sie die in x-Richtung gemessene Höhe, bis zu der die Pflanzschale gefüllt ist, wenn das Fassungsvermögen nur zur Hälfte genutzt wird.ist. **20 P**

f) Die Pflanzschale soll zur Erhöhung der Standfestigkeit verändert werden. Der Boden soll dasselbe Volumen und damit dieselbe Masse wie die Wandung haben.
Bestimmen Sie die dafür nötige (in x-Richtung gemessene) Dicke des Bodens. **15 P**
Hinweis: Falls Sie das Fassungsvermögen in Aufgabenteil e) nicht bestimmen konnten, verwenden Sie hier als Wert zum Weiterrechnen 20 Liter (dies ist nicht der korrekte Wert). Wenn Sie keine Kegelstumpfeigenschaften in Aufgabenteil d) bestimmen konnten, verwenden Sie als Information zum Weiterrechnen, dass das den Kegelstumpf berandende Geradenstück im Längsschnitt mit der Steigung –0,3 bei $y = 1{,}5$ auf den Graphen der Funktion f stößt (auch dies sind nicht die korrekten Werte).

g) In die Pflanzschale, deren Wandung durch die oben genannten Funktionen f und g beschrieben ist, wird ein gerader Stab von 8 dm Länge gestellt. Das untere Ende des Stabes rutscht am Boden an den Rand, sodass sich der Stab in einem zweiten Punkt an die innere Wandung lehnt.
Bestimmen Sie rechnerisch diesen Punkt. **10 P**

h) Für die inneren Funktionen (gestrichelt gezeichnet) kommen aus fertigungstechnischen Gründen nur monoton wachsende Funktionen g_a infrage. f bleibt unverändert.

Eine mögliche Funktionsgleichung ist: $g_a(x) = \sqrt{\dfrac{10}{(a-x)}}$.

Bestimmen Sie den Wert für a, sodass die in y-Richtung gemessene Wandstärke am Übergang zum Boden 0,3 dm beträgt. **5 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Allgemeiner Ansatz bei fünf Bedingungen: $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$. Die Bedingungen sind $h(0) = 1,2 \wedge h(2) = 1,2 \wedge h(3) = 1,5 \wedge h(4) = 2,0 \wedge h(5) = 2,5$. Die Lösung ist: $h(x) = -\frac{1}{150} \cdot x^4 + \frac{3}{50} \cdot x^3 - \frac{11}{150} \cdot x^2 - \frac{1}{25} \cdot x + \frac{6}{5}$.	10		
b)	Innendurchmesser: $2 \cdot g(0) \approx 1,60$. Der Innendurchmesser beträgt etwa 1,60 dm. Wandstärke: $f(5) - g(5) = 1,05$. Die Wandstärke beträgt 1,05 dm.	10		
c)	$f'(x) = -\frac{3}{100} \cdot x^2 + \frac{8}{25} \cdot x - \frac{7}{25}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0,962 \vee x \approx 9,705$. Nur die erste Nullstelle liegt im Definitionsbereich. Aus der Abbildung wird deutlich, dass es sich hier um ein Minimum handelt. $2 \cdot f(0,962) \approx 2,14$. Der minimale Außendurchmesser beträgt also ca. 2,14 dm. Die Differenz von f und g beschreibt die Wandstärke. Eine Möglichkeit besteht darin, die Ableitung der Wandstärkefunktion gleich null zu setzen: $(f-g)'(x) = 0$. Diese Gleichung ist exakt nicht lösbar. Als einzige numerische Lösung im Intervall [0;5] erhält man $x \approx 1,267$. Aus der Abbildung wird deutlich, dass es sich hier um ein Minimum handelt. Einsetzen liefert: $(f-g)(1,267) \approx 0,20$. Die minimale Wandstärke beträgt also ca. 20 mm. *Auch Lösungen mittels der automatisierten Bestimmung von Extrempunkten, dem Einsatz der Spurfunktion des Rechners, einer Wertetabelle u.Ä. sind in der zweiten Frage zulässig.*	5	10	
d)	Die Ableitung von f an der Stelle $x = 0$ ist: $f'(0) = -0,28$. Die den Kegelstumpf berandende Funktion ist dann k mit $k(x) = 1,2 - 0,28 \cdot x$. Der Radius und dann der Flächeninhalt ergeben sich zu: $k(-1) = 1,48;\ A = \pi \cdot \left(k(-1)\right)^2 \approx 6,881$. Die Standfläche ist ca. 6,88 dm² groß.	5	10	
e)	Das Fassungsvermögen entspricht dem Volumen des von g im Intervall [0;5] berandeten Rotationskörpers: $V = \pi \cdot \int_0^5 \left(g(x)\right)^2 dx = \ln\left(\frac{2401 \cdot \sqrt{14}}{32}\right) \cdot \pi \approx 17,711$. Das Fassungsvermögen der Pflanzschale ist also ca. 17,7 Liter. Die Füllhöhe für eine Füllung mit der Hälfte des Fassungsvermögens sei z, dann gilt:. $V_{\text{halb}} = \pi \cdot \int_0^z \left(g(x)\right)^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot 17,711$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Eine Lösung im Intervall [0;5] ist $z \approx 3{,}258$, eine möglicherweise vom Rechner angegebene zweite Lösung liegt außerhalb dieses Intervalls. Bei einer halben Füllung steht das Füllgut also ca. 3,26 dm hoch.		20	
f)	Das Volumen der Wandung ist das Volumen des Rotationskörpers von *f* abzüglich des Fassungsvermögens: $V_{\text{Wandung}} = \pi \cdot \int_0^5 \left(f(x)\right)^2 dx - V \approx 21{,}872$. Die Höhe des Bodens sei *z*, dann muss *z* folgende Bedingung erfüllen: $V_{\text{Boden}} = \pi \cdot \int_{-z}^{0} \left(k(x)\right)^2 dx \approx 21{,}872 \Leftrightarrow z \approx 2{,}729$. Der Boden ist also ca, 2,73 dm hoch. Verwendet man beide Ersatzlösungen, erhält man einen Wert von ca. 1,93 dm; verwendet man lediglich die Ersatzlösung für das Fassungsvermögen, erhält man ca. 2,53 dm; benutzt man nur die Ersatzlösung für die Kegelstumpfeigenschaften ergibt sich ca. 2,09 dm.			15
g)	Es wird im Folgenden die Steigung *m* einer Geraden durch die Punkte (0|–*g*(0)) und (5|*g*(5)) mit der Tangentensteigung *g*'(5) verglichen: $m = \frac{1}{5} \cdot \left(g(5) + \sqrt{\frac{4{,}5}{7}} \right) \approx 0{,}4604$ und $g'(5) = \frac{3}{8}$. Offenbar gilt $m > g'(5)$. Der Stab liegt an dem Punkt $(5 \mid g(5))$ also steiler als die Tangente. Die Steigung des Graphen von *g* ist wegen $g'(x) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{(7-x)^3}}$ stets positiv. Außerdem gilt $g''(x) = \frac{9}{8}\sqrt{\frac{2}{(7-x)^5}}$; auch dieser Ausdruck ist stets positiv, der Graph von *g* ist also linksgekrümmt. Die Ableitung wächst damit monoton, ist also in dem Intervall [0;5] nirgends größer als an der untersuchten Stelle *x* = 5. Somit ist der erste gemeinsame Punkt von Stab und Innenwand in (5|1,5) zu finden. Verschiedene Alternativen sind möglich: Alternative 1: Es wird der Berührpunkt mit dem Graphen der Funktion bestimmt: Die Gleichung der Geraden, die dem Stab entspricht, ist $st(x) = m \cdot x - \sqrt{\frac{4{,}5}{7}}$. Die Berührstelle sei *z*, es muss dann gelten: $g(z) = st(z) \wedge g'(z) = st'(z) = m$. Das CAS liefert als Berührstelle *z* = 5,25. Diese liegt außerhalb des Definitionsbereiches, somit liegt der Stab an der oberen Innenkante an. Alternative 2: Geht man davon aus, dass der gesuchte Punkt der Randpunkt ist, bestimmt man die Schnittpunkte der Geraden des Stabs mit dem Graphen von *g*. Ist *x* = 5 die einzige Schnittstelle im Intervall [0;5], so ist bewiesen, dass der Randpunkt tatsächlich der gesuchte Punkt ist.			10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$st(x) = \frac{g(5)+g(0)}{5} \cdot x - \frac{3\sqrt{14}}{14}$. Gleichsetzen $g(x) = st(x)$ liefert die Lösungen $x = 5$ oder $x \approx 5{,}4833$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Möglich sind auch Verwendungen von Wertetabellen oder das Arbeiten im Grafikfenster des Rechners.			
h)	Es gilt $f(0) = 1{,}2$, also ist die Bedingung, die an g_a gestellt wird: $g_a(0) = 0{,}9 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10}{a-0}} = 0{,}9 \Leftrightarrow a = \frac{1000}{81} \approx 12{,}3456789$. Damit die Wandstärke 0,3 dm beträgt, ist $a = \frac{1000}{81}$ zu wählen.		5	
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25

Analysis 2

I.2 Medikation

Nach der Verabreichung eines Medikamentes misst man die Konzentration c des im Blut vorhandenen Wirkstoffes (in Milligramm pro Liter) in Abhängigkeit von der Zeit x.

Wird das Medikament intravenös verabreicht (direkt in den Blutkreislauf gebracht), dann erhält man folgende Tabelle:

x in Stunden	0	1	2	3	4	5
c in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$	10,2	6,9		3,2		1,4

Tabelle 1
(Vgl. Anlage Abb.1)

a) Geben Sie durch exponentielle Regression eine Funktion f an, die den Abbau des Wirkstoffes entsprechend der Tabelle 1 näherungsweise beschreibt.

Hinweis: Haben Sie keine Funktion gefunden, können Sie mit der Ersatzfunktion $f: x \rightarrow 10{,}2 \cdot e^{-0{,}392 \cdot x}$ *weiterarbeiten.*

Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle und bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Konzentration des Wirkstoffes unter die Nachweisgrenze von $0{,}05\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ abgesunken ist. **15 P**

Wird das Medikament oral verabreicht (durch Schlucken einer Flüssigkeit oder von Tabletten), dann stellt man einen anderen Verlauf der Wirkstoffkonzentration c im Blut fest. Man misst:

x in Stunden	0	1	2	3	4,5 (Wendestelle)	5
c in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$	0	6	7,4	6,8		4

Tabelle 2
(Vgl. Anlage Abb.2)

b) Begründen Sie im Sachkontext den andersartigen Verlauf der Wirkstoffkonzentration und beschreiben Sie, welche Bedeutung in diesem Zusammenhang einer Wendestelle zukommt. **15 P**

Aus medizinischen Gründen liegt an der Stelle $x = 4{,}5$ eine solche Wendestelle vor.

c) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion g vom Grade 5, die durch obige Messpunkte der Tabelle 2 und dem Wendepunkt festgelegt ist und zeichnen Sie den Graphen in Abb. 2 ein. **15 P**

Hinweis: Haben Sie in c) kein Ergebnis erhalten, dann können Sie für die kommenden Aufgabenteile die folgende Funktion g verwenden. Dies ist <u>nicht</u> die in Teil c) gesuchte Funktion!

$$g : x \to \frac{1}{240} \cdot x^5 - \frac{23}{240} \cdot x^4 + \frac{217}{240} \cdot x^3 - \frac{1057}{240} \cdot x^2 + \frac{1151}{120} \cdot x .$$

d) Entscheiden Sie, ab welchem Zeitpunkt x^* der durch die Funktion g beschriebene Konzentrationsverlauf auf keinen Fall mehr korrekt beschrieben wird, und begründen Sie ihre Angabe. **5 P**

e) Bestimmen Sie eine knickfreie lineare Fortsetzung der Funktion g für die Zeit $x > 6$ Stunden und berechnen Sie

- den Zeitpunkt, wann nach dieser Modellannahme der linearen Fortsetzung der Wirkstoff vollständig abgebaut ist,
- die mittlere Konzentration des Medikaments bis zum vollständigen Abbau. **20 P**
  Hinweis: Haben Sie keine lineare Funktion gefunden, berechnen Sie die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 6 Stunden.

In der Medizin wird für die Beschreibung des obigen Vorgangs der oralen Einnahme eines Medikaments eine so genannte „Bateman-Funktion“ verwendet. Der Funktionsterm ist wie folgt aufgebaut:

$$b(x) = a \cdot x \cdot e^{-d \cdot x} \text{ mit } a > 0 \text{ und } d > 0 .$$

f) Für die Parameter $a = 10$ und $d = \frac{1}{2}$ beschreibt die Funktion b den obigen Sachverhalt der oralen Einnahme recht genau.
Ermitteln Sie mithilfe der Ableitungsfunktion die maximale Abweichung der Funktion g aus dem Aufgabenteil Teil c) von der Bateman-Funktion $b(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$ im Zeitintervall $0 \le x \le 6$ und geben Sie den Zeitpunkt minutengenau an. **20 P**

Um das Medikament in seiner Wirksamkeit zu verbessern, wird seine Zusammensetzung verändert. Die Konzentration des Medikamentes im Blut wird wieder durch $b(x) = a \cdot x \cdot e^{-d \cdot x}$ mit $a > 0$ und $d > 0$ beschrieben.
x ist wiederum die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $b(x)$ wird in der Einheit $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gemessen.
Bei dem verbesserten Medikament soll die Konzentration c genau zwei Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert erreichen und die mittlere Konzentration innerhalb der ersten sechs Stunden den Wert $c = 8 \ \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ nicht überschreiten.

g) Zeigen Sie, dass dieses nur für den Wert $d = \frac{1}{2}$ möglich ist und bestimmen Sie einen geeigneten Bereich für die Konstante a. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Medikation“

Abb. 1

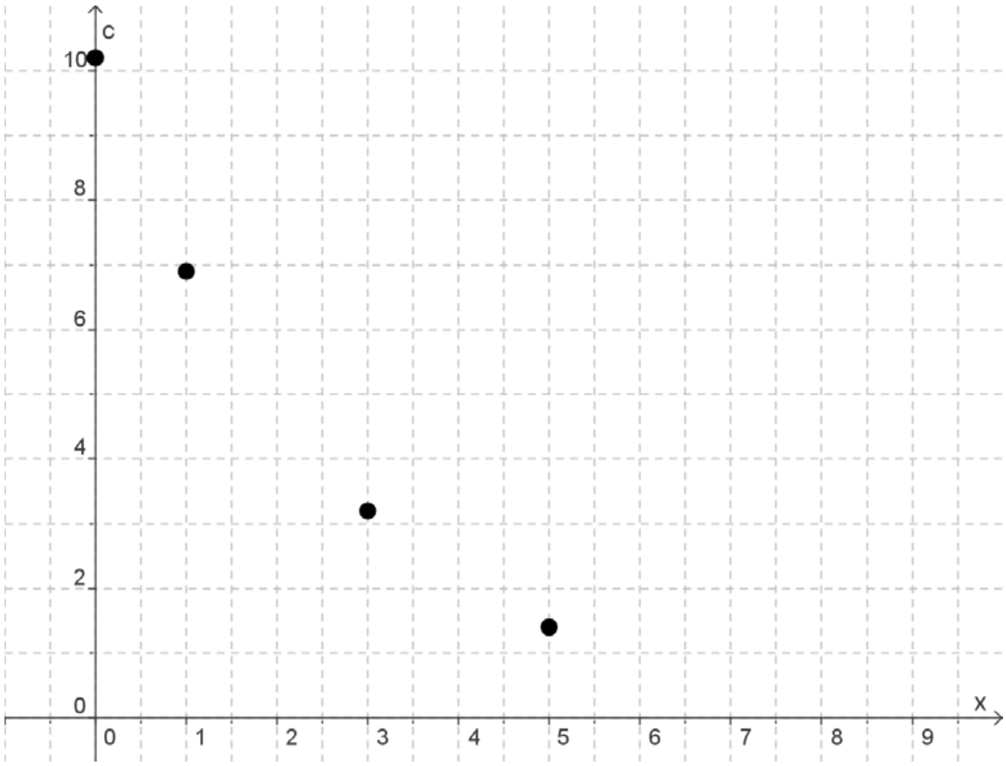
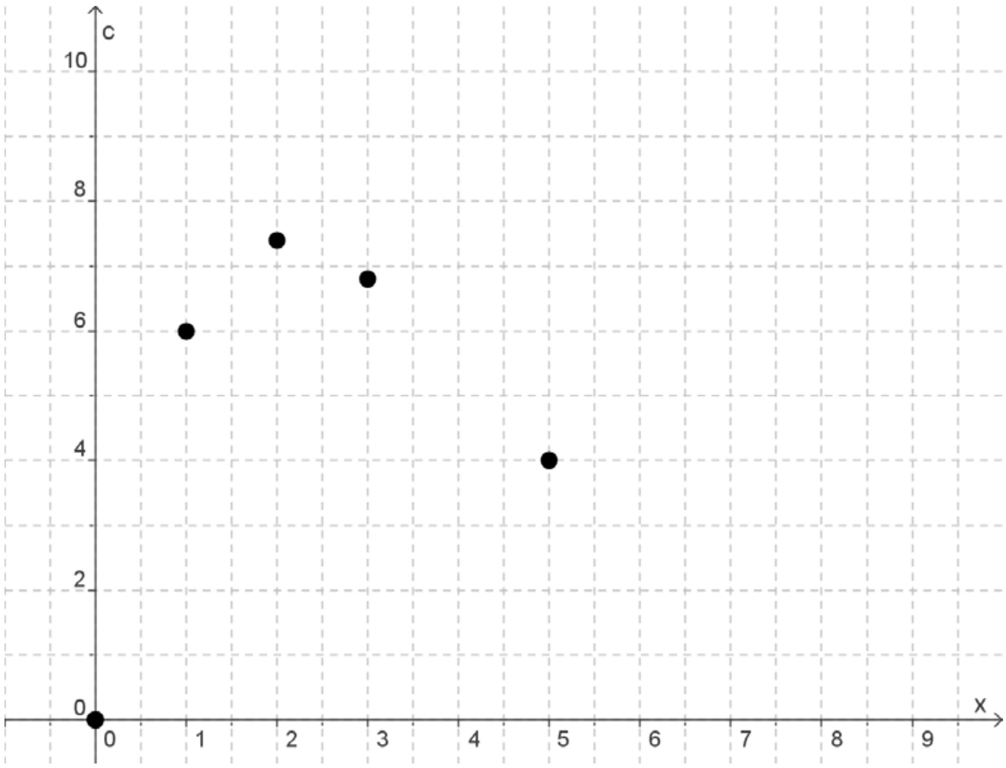
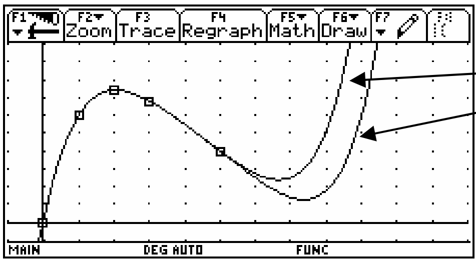


Abb. 2



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Die Werte werden in ein Datenblatt eingegeben und dann durch exponentielle Regression die gesuchte Funktion bestimmt: $f: x \to 10{,}27 \cdot 0{,}673^x$, Einsetzen: $f(2) = 4{,}65$ und $f(4) = 2{,}11$. Die Lösung der Gleichung $f(x) = 0{,}05$ liefert $x = 13{,}45$. Nach $13\frac{1}{2}$ Stunden ist der Wirkstoff nicht mehr nachweisbar. (Die Ersatzfunktion ergibt: $f(2) = 4{,}66$ und $f(4) = 2{,}13$. Die Lösung der Gleichung $f(x) = 0{,}05$ liefert $x = 13{,}57$.)	10	5	
b)	Der veränderte Verlauf ist dadurch zu erklären, dass der Wirkstoff sich zunächst im Magen befindet und nach und nach in das Blut gelangt. Daher ist die Konzentration zu Beginn der Messung gleich null und steigt dann an. Gleichzeitig wird der Wirkstoff im Blut abgebaut. Beim Maximum der Konzentration gleichen sich Aufnahme und Abbau aus; danach überwiegt der Abbau des Wirkstoffes bzw. nach dem Ende der Aufnahme erfolgt der Abbau exponentiell Teil a). Die Wendestelle der Funktion ist genau der Zeitpunkt, an dem die Konzentration am stärksten abnimmt (Maximum der Änderung), d. h. der Zeitpunkt des stärksten Wirkstoffabbaus.		10	5
c)	Es ist für eine allgemeine Funktion 5. Grades: $g: x \to a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$ das Gleichungssystem $g(0) = 0 \wedge g(1) = 6 \wedge g(2) = \frac{74}{10} \wedge g(3) = \frac{68}{10} \wedge g(5) = 4 \wedge g''\left(\frac{45}{10}\right) = 0$ zu lösen. Ergebnis: $g: x \to \frac{13}{2690} \cdot x^5 - \frac{111}{1076} \cdot x^4 + \frac{7517}{8070} \cdot x^3 - \frac{23913}{5380} \cdot x^2 + \frac{38783}{4035} \cdot x$ bzw. $g: x \to 0{,}0048 \cdot x^5 - 0{,}1032 \cdot x^4 + 0{,}9315 \cdot x^3 - 4{,}448 \cdot x^2 + 9{,}6117 \cdot x$.  obige Funktion g und die Alternativfunktion aus der Aufgabenstellung	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Dem Graphen entnimmt man, dass nach 6,66 Stunden (bzw. 7,36 Stunden) die Konzentration wieder zunimmt. Da dies nicht der Realität entspricht, ist die korrekte Beschreibung des Vorgangs durch die Funktion g bei einem Wert von $x^* > 6{,}66$ Stunden (bzw. $x^* > 7{,}36$ Stunden) auf keinem Fall mehr gegeben.		5	
e)	„Knickfrei“ bedeutet, dass durch die Steigung der Funktion g an der Stelle $x = 6$ die Steigung der Geraden festgelegt ist. Der lineare Verlauf wird dann durch die Gleichung $p(x) = g(6) + g'(6) \cdot (x-6)$ beschrieben. Einsetzen der Werte liefert: $p(x) = -\frac{3796}{4035} \cdot x + \frac{11277}{1345}$ $\left(= -\,0{,}94 \cdot x + 8{,}38\right)$. Die Nullstelle von p liegt bei 8,91, d. h., nach 8,91 Stunden ist das Medikament vollständig abgebaut. Die mittlere Konzentration wird durch das Integral $$\frac{1}{8{,}91} \cdot \left(\int_0^6 g(x)dx + \int_6^{8{,}91} p(x)dx \right)$$ beschrieben. Es liefert die mittlere Konzentration $c = 4{,}0\,\frac{mg}{l}$. (Für die Alternativfunktion aus Aufgabe c) ergibt sich: $p(x) = -\frac{169}{120} \cdot x + \frac{219}{20}$, $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}78$, $c = 4{,}4\,\frac{mg}{l}$. Ohne lineare Fortsetzung erhält man für g sowie für die Alternativfunktion $\frac{1}{6} \cdot \int_0^6 g(x)dx = 5{,}3$.)	5	10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Es ist das (absolute) Maximum des Abstands gesucht, d. h., die Ableitung der Funktion $k = g - b$ muss untersucht werden. Die Nullstellen der Ableitung erhält man (je nach CAS-System) als numerische Lösung: $x_{01} \approx 0{,}565,\ x_{02} \approx 3{,}232,\ x_{03} \approx 5{,}917$. Der betragsmäßig größte Wert von k liegt bei x_{03}: $\lvert k(x_{03})\rvert \approx 0{,}250$. Da an den Rändern die Funktionswerte $k(0)$ und $k(6)$ vom Betrage kleiner sind, beträgt der maximale Fehler $0{,}25\,\frac{mg}{l}$. Zeitpunkt: 5 Stunden 55 Minuten. (Für die Alternativfunktion erhält man ebenfalls über numerische Lösungen die Nullstellen: $x_{01} \approx 0{,}553,\ x_{02} \approx 3{,}363,\ x_{03} \approx 6{,}871$. x_{03} liegt außerhalb des betrachteten Intervalls, Der betragsmäßig größte Wert von k bei den beiden inneren Extremstellen liegt bei x_{02}: $\lvert k(x_{02})\rvert \approx 0{,}112$. An den Rändern sind die Funktionswerte $k(0) = 0$ und $k(6) \approx -0{,}247$. Also liegt das Extremum (am Rand) bei $x = 6$ und der maximale Fehler beträgt ungefähr $0{,}25\,\frac{mg}{l}$. Zeitpunkt: 5 Stunden.)	5	10	5
g)	Für die Funktion b ergibt sich: $b'(2) = 0 \Leftrightarrow a\cdot(2\cdot d - 1) = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}$. Die Ungleichung $\frac{1}{6}\cdot\int_0^6 b(x)dx \le 8$ hat als Ergebnis $a \le 14{,}98$. Damit ist für a der Bereich $0 < a \le 14{,}98$ sinnvoll.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA /AG 1

II.1 Technikpark

Im geplanten Technikpark in Wedel bei Hamburg soll u. a. die Navigation auf einem Schiff gestern und heute dargestellt werden. Das dazugehörige Gebäude soll an ein Schiff erinnern.

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Schiffes beschreiben durch die Eckpunkte

$$A_1(0\,|\,0\,|\,0),\ B_1(10\,|\,0\,|\,0),\ C_1(10\,|\,20\,|\,0) \text{ und } D_1(0\,|\,20\,|\,0)$$

und das Deck durch die Eckpunkte

$$A_2(-2\,|\,-4\,|\,8),\ B_2(12\,|\,-4\,|\,8),\ C_2(12\,|\,24\,|\,8) \text{ und } D_2(-2\,|\,24\,|\,8)$$

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Gebäudes in das Koordinatensystem in der Anlage. Dabei entspricht 1 LE im Koordinatensystem 1 m in der Wirklichkeit. **10 P**

b) An den vier nach unten führenden Hauskanten werden sich Regenrohre mit einem Durchmesser von 10 cm befinden. Oberhalb der Erde sollen sie mit blauer Farbe angestrichen werden. Die Rohre laufen direkt am Haus entlang, also z. B. von A_2 nach A_1. Für den Kauf der Farbe ist die Kenntnis des Oberflächeninhalts der Regenrohre notwendig.
Die Farbe kann nur in Einheiten für jeweils 1 m^2 gekauft werden. Bestimmen Sie, für wie viele Quadratmeter Farbe gekauft werden muss. **10 P**

Vor dem Gebäude soll ein 10 m hoher Mast aufgestellt werden. Auf der Seite $C_1\,D_1\,C_2\,D_2$ ist mithilfe des Schattens von der Mastspitze eine Information zum Sonnenstand geplant. Am 7. März hat ein Sonnenstrahl genau um 12 Uhr den Richtungsvektor $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) Zuerst war geplant, den Mast im Punkt $M(9\,|\,30\,|\,0)$ aufzustellen.
Leider fällt bei dieser Planung der Schatten der Mastspitze am 7. März zur Mittagszeit nicht auf das Gebäude, sondern auf die Erde.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt von der geplanten Mastspitze (auf der Erde).

Daraufhin wird geplant, den Mast im Punkt $M_{\text{neu}}(2\,|\,30\,|\,0)$ aufzustellen.
Bestimmen Sie nun den Schattenpunkt der Mastspitze am 7. März zur Mittagszeit auf der Seite $C_1\,D_1\,C_2\,D_2$.

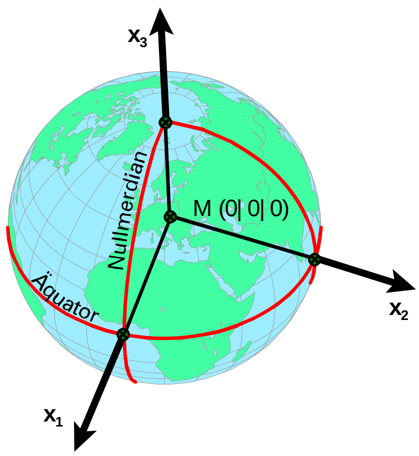
Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Schattens vom Mast (mit dem neuen Standpunkt) mit der Gebäudeunterkante ($\overline{C_1D_1}$) und zeichnen Sie den Mast zusammen mit dem gesamten Schatten in das Koordinatensystem der Anlage ein. **30 P**

d) Für die Darstellung der Navigation mithilfe der Sonne werden müssen die Einfallswinkel von Sonnenstrahlen bestimmt werden.

- Bestimmen Sie den Winkel, unter dem der Sonnenstrahl $\vec{s}_1$ am 7. März um 12 Uhr auf die Erdoberfläche trifft.
- Am 21. Juni hat die Sonne um 12 Uhr (ohne Berücksichtigung der Sommerzeit) ihren Höchststand und scheint im Technikpark unter einem Winkel von 60,8° auf die Erdoberfläche. Der entsprechende Richtungsvektor der Sonnenstrahlen werde mit $\vec{s}_m$ bezeichnet.
  Begründen Sie, dass sich $\vec{s}_m$ von $\vec{s}_1$ nur in der x_3-Komponente unterscheidet.
- Bestimmen Sie für den 21. Juni den entsprechenden Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\vec{s}_m$. **25 P**

Heutzutage wird die Navigation im Wesentlichen mit Hilfe von GPS o. Ä. durchgeführt.

Wir betrachten ***ein globales erdgebundenes*** recht-winkliges dreidimensionales Koordinatensystem (vgl. Abbildung rechts). Der Ursprung liegt im Erdmittelpunkt und der Erdradius beträgt 6 371 km.



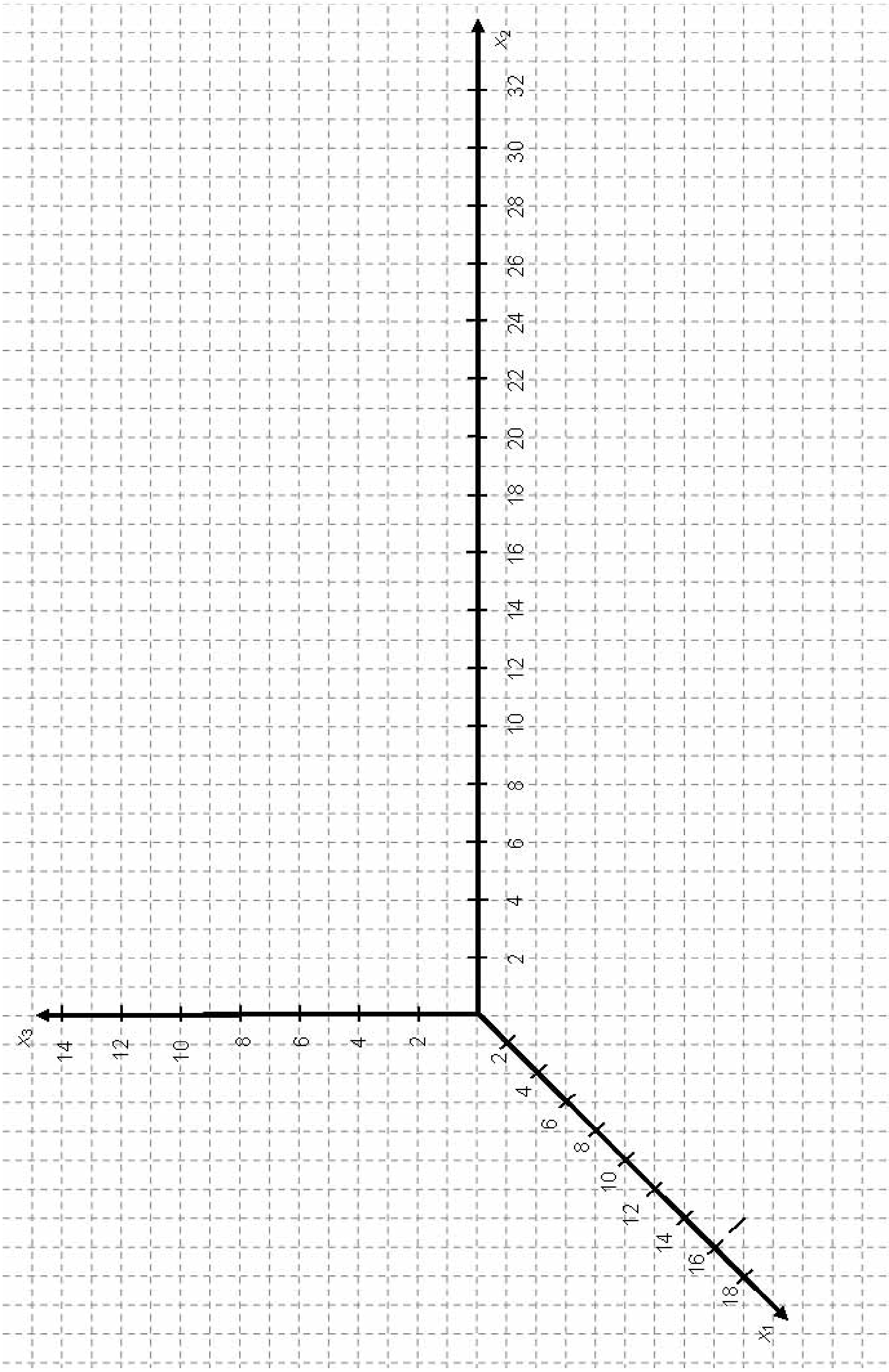
e) Am Technikpark empfängt man die Positionsdaten zusammen mit den Entfernungen von 4 GPS-Satelliten. Die entsprechenden Daten sind in der unten stehenden Tabelle aufgeführt. **Zur Vereinfachung der Aufgabenstellung sind einige Werte gerundet**. Alle Werte sind in der Einheit km angegeben.
Bestimmen Sie damit die Position des Technikparkes in rechtwinkligen und in geografischen Koordinaten. **20 P**

Satellit Nr.	Position	Entfernung
S_1	(10181|17634|17085)	21761,581
S_2	(15603|13100|17080)	20957,911
S_3	(25598|−8953|4615)	23884,752
S_4	(19934|11500|13300)	21152,880

f) Der Technikpark soll in Wedel bei Hamburg an der Elbe errichtet werden.
Begründen Sie, dass zur Positionsbestimmung des Technikparks (bzw. eines Schiffes auf der Elbe) die Informationen von drei Satelliten ausreichen. **5 P**

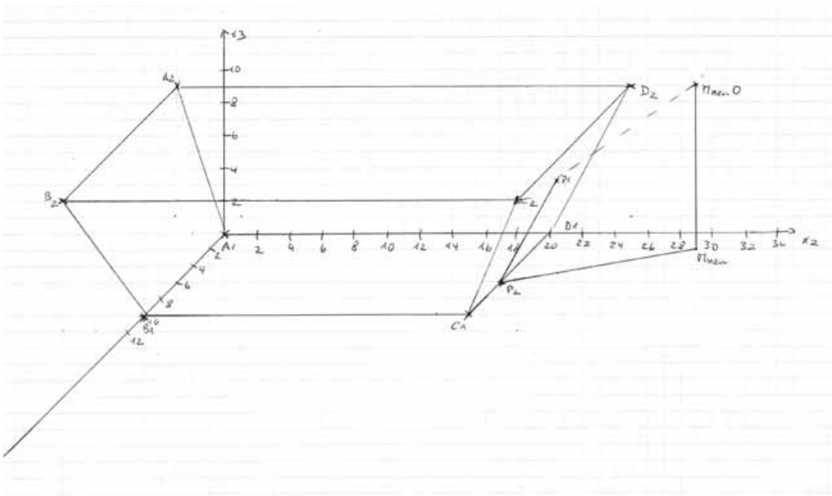
Anlage zur Aufgabe „Technikpark“

Code Nr: ______________________



Auf allen Koordinatenachsen soll gelten: 1 LE $\triangleq$ 1 m

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		10		
b)	Die Länge des Regenrohres zwischen A_1 und A_2 entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{A_1A_2}$, mithilfe des Betragsoperators erhält man $\left\vert\overrightarrow{A_1A_2}\right\vert = 2\cdot\sqrt{21} \approx 9{,}165151389$. Die Oberfläche der 4 Regenrohre erhält man aus $4\cdot 2\cdot\pi\cdot 0{,}05\cdot 4\cdot\sqrt{5} = \frac{8}{5}\sqrt{5}\cdot\pi \approx 11{,}51726891$. Man benötigt also blaue Farbe für 12 m^2.	10		
c)	• Die Mastspitze hat die Koordinaten $MO(9\,\vert\,30\,\vert\,10)$. In der Geradengleichung $\overline{MO} + k\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ ist $x_3 = 0$ zu setzen und nach k zu lösen. Als Lösung von $10-3k=0$ erhält man $k = \frac{10}{3}$ und damit ergibt sich als „Auftreffpunkt“ $P_3 = (\frac{47}{3}\,\vert\,\frac{40}{3}\,\vert\,0) \approx (15{,}7\,\vert\;13{,}3\,\vert\,0)$. • Es ist der Schnittpunkt der Ebene E durch die Punkte C_1, D_1 und C_2 mit der Geraden durch die Mastspitze $M_{neu}O(2\,\vert\,30\,\vert\,10)$ und dem Richtungsvektor s_1 zu bilden. $E = \overrightarrow{C_1} + k(\overrightarrow{C_2} - \overrightarrow{C_1}) + l(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{C_1})$ und $g = M_{neu}O + t\cdot s_1$ Mithilfe des solve-Befehls löst sich die Gleichung $g = E$ u. a. zu $t = \frac{10}{7}$ und man erhält als Schattenpunkt $P_1\left(\frac{34}{7}\,\vert\,\frac{160}{7}\,\vert\,\frac{40}{7}\right) \approx P(4{,}9\,\vert\,22{,}9\,\vert\,5{,}7)$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

• Aufgrund der Schräge der Wand ergibt sich die *x*-Koordinate des entsprechenden Punktes nicht als $\frac{34}{7}$, sondern hier muss der Schnittpunkt der Sonnenstrahlebene *SE* mit der Geraden g_2 durch C_1 und D_1 gebildet werden.
$SE = \overrightarrow{M_{neu}O} + t \cdot \vec{s_1} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g_2 = \overrightarrow{C_1} + k(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{C_2})$. $SE = g_2$ ist mit dem solve-Befehl zu lösen. Es ergibt sich z. B. $k = \frac{2}{5}$ und als Schnittpunkt erhält man $P_2(6\,|\,20\,|\,0)$. Für die Zeichnung: siehe Aufgabenteil 1.

</td><td>5</td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

• Die Erdoberfläche hat $e_3 = (0\,|\,0\,|\,1)$ als Normalenvektor. Dann berechnet sich der Winkel aus der Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{|e_3 \cdot s_1|}{|e_3| \cdot |s_1|} = \frac{3}{|s_1|}$. Die Gleichung kann man entweder mit Arcussinus oder dem solve-Befehl lösen. Man erhält
$\alpha \approx -209{,}1215680°$ oder $\alpha \approx 150{,}8784319°$ oder $\alpha \approx 29{,}12156807°$
Aus dem Kontext der Aufgabe kommt nur $\alpha \approx 29{,}1°$ in Frage.
Am 7. März trifft der Sonnenstrahl um 12 Uhr mit einem Winkel von $\alpha \approx 29{,}1°$ auf die Erde.
• Die Himmelsrichtung wird durch die x_1- und durch die x_2-Komponente festgelegt. Da die Sonne um 12 Uhr immer aus Süden scheint, bleiben diese beiden Komponenten unverändert, wenn man nur die Sonnenstrahlen beim Sonnenhöchststand betrachtet. Die x_3-Komponente gibt die Höhe des Sonnenstandes an.
• Der Richtungsvektor ändert sich nur in der x_3 – Komponente. Mit $\vec{s}_{\max} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -z \end{pmatrix}$ ist die Gleichung $\sin(60{,}8°) = \frac{|e_3 \cdot s_{\max}|}{|e_3| \cdot |s_{\max}|}$ zu lösen. Man erhält
$z = \sqrt{29}\cot(\frac{73\pi}{450}) \approx 9{,}6$.
Am 21. Juni um 12 Uhr mittags hat ein Sonnenstrahl etwa den Richtungsvektor $\vec{s}_{\max} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -9{,}6 \end{pmatrix}$.

</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Mit den Daten kann man 4 Kugelgleichungen aufstellen.
$k_1 = (x_1 - 10181)^2 + (x_2 - 17634)^2 + (x_3 - 17085)^2 = 21761{,}581^2$
$k_2 = (x_1 - 15603)^2 + (x_2 - 13100)^2 + (x_3 - 17080)^2 = 20957{,}911^2$
$k_3 = (x_1 - 25598)^2 + (x_2 + 8953)^2 + (x_3 - 4615)^2 = 23884{,}752^2$
$k_4 = (x_1 - 19934)^2 + (x_2 - 11500)^2 + (x_3 - 13300)^2 = 21152{,}88^2$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Zu lösen ist das Gleichungssystem $\left\{\begin{matrix} k_1 - k_2 \\ k_2 - k_3 \\ k_3 - k_4 \end{matrix}\right\}$. Als Lösung erhält man $(3728{,}599376 \mid 635{,}9965877 \mid 5126{,}705096)$. Die Umwandlung in geografische Koordinaten erfolgt über die Gleichungen $x_3 = 6371\,\sin(\varphi)$, wobei φ die geografische Breite angibt. Die Gleichung wird zu $\varphi \approx -233{,}5807078°$, $\varphi \approx 126{,}4192921°$ oder $\varphi \approx 53{,}58070784°$ gelöst. Da $-90° \le \varphi \le 90°$ gilt, kann nur $\varphi \approx 53{,}58070784°$ herauskommen. Aus $x_2 = 6371\,\sin(\lambda)\,\cos(\varphi)$ erhält man die Lösung. Zusammen mit der Lösung der Gleichung $x_3 = 6371\,\cos(\lambda)\,\cos(\varphi)$ oder aus der Kenntnis, dass der Technikpark in Wedel gebaut werden soll, erhält man $\lambda \approx 9{,}7°$. Insgesamt erhält man ungefähr die geografischen Koordinaten 53,6° Nord und 9,7° Ost.		20	
f)	Wedel hat in etwa die Meereshöhe null. Dann kann man die Erde als 4. Kugel ansehen, denn man weiß in diesem Fall, dass Wedel sich auf der Erdkugel mit dem Radius 6371 km befindet.		5	
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA /AG 2

II.2 Schwarzwild

Das Schwarzwild ist in vielen Teilen Europas seit geraumer Zeit auf dem Vormarsch und es häufen sich landwirtschaftliche Schäden. Verursacht wird dieses enorme Wachstum durch die hohe Fortpflanzungsleistung dieser Art. Unter günstigen Bedingungen, d. h. bei gutem Futterangebot, gebären beim Schwarzwild bereits die Frischlinge (Wildschweine im ersten Lebensjahr) zu einem hohen Anteil. Zusätzlich verringert sich ihre Sterblichkeit über die Wintermonate, und auch die Fruchtbarkeit der reifen Bachen (weibliche Wildschweine, älter als zwei Jahre) steigt. An diesem Punkt kommt der Mensch ins Spiel: Vor allem durch die Landwirtschaft, aber auch durch falsche Fütterung, werden ungewollt Nahrungsquellen für das Schwarzwild verfügbar gemacht. Damit kommt es zwangsläufig zu einem dramatischen Anwachsen der Bestände.

Im Folgenden werden nur weibliche Wildschweine betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt. Dabei gelte:

F_n	Anzahl der Frischlinge (höchstens ein Jahr alt) zum Zeitpunkt n
U_n	Anzahl der Überläuferbachen (älter als ein Jahr bis maximal zwei Jahre alt) zum Zeitpunkt n
B_n	Anzahl der reifen Bachen (älter als zwei Jahre) zum Zeitpunkt n
n	Zeit (gemessen in Jahren)

Eine Population zum Zeitpunkt n werde durch einen Vektor $\vec{v_n} = \begin{pmatrix} F_n \\ U_n \\ B_n \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Für eine Population gilt:
Die jährliche Geburtenrate bei Frischlingen beträgt 0,13, bei Überläuferbachen 0,56 und bei reifen Bachen 1,64.
Von den Frischlingen überleben jährlich 25 %, von den Überläuferbachen 56 % und von den reifen Bachen 58 %.
Übertragen Sie den folgenden noch unvollständigen Übergangsgraphen auf Ihr Bearbeitungsblatt und ergänzen Sie ihn so, dass die Entwicklung der Population dargestellt wird. **10 P**

Frischlinge	Überläuferbachen	reife Bachen

b) Seien $\overrightarrow{v_n}$ und $\overrightarrow{v_{n+1}}$ die Populationsvektoren zu den Zeitpunkten n bzw. $n + 1$. Mittels einer Übergangsmatrix A kann der folgende Modellzusammenhang formuliert werden: $\overrightarrow{v_{n+1}} = A \cdot \overrightarrow{v_n}$. Geben Sie an, welche der folgenden vier Matrizen für A zu wählen ist, sodass die in Aufgabenteil a) dargestellte Entwicklung beschrieben wird.

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \\ 0,13 & 0,56 & 1,64 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,58 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,58 & 0,56 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie für *eine* der drei *nicht* gewählten Matrizen, warum diese als Übergangsmatrix nicht infrage kommt. **15 P**

Die Werte aus Aufgabenteil a) beruhen auf Untersuchungen von Wildschweinpopulationen, die unter *ungünstigen* Bedingungen leben: Die Winter sind lang und streng, und nicht immer ist Futter vorhanden. Die folgenden Matrizen P und Q hingegen beschreiben die Entwicklung von Wildschweinpopulationen unter *gemäßigten* bzw. *guten* Lebensbedingungen.

$$P = \begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,62 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,94 & 1,93 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,61 \end{pmatrix}$$

c) Entscheiden Sie, welcher der beiden Matrizen P und Q *gemäßigte* Lebensbedingungen und welcher *gute* Lebensbedingungen für Wildschweine zugrunde liegen. **10 P**

d) Die Wildschweinpopulation setze sich zum Zeitpunkt $n = 1$ aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen.

- Berechnen Sie im Rahmen des Modells unter Verwendung der Matrix Q, wie viele Frischlinge, wie viele Überläuferbachen und wie viele reife Bachen zum Zeitpunkt $n = 2$ erwartet werden können.
- Bestimmen Sie auch, wie viele Frischlinge, wie viele Überläuferbachen und wie viele reife Bachen zum Zeitpunkt $n = 0$ vorhanden waren. **15 P**

e) Gehen Sie wie im Aufgabenteil d) davon aus, dass sich die Wildschweinpopulation zum Zeitpunkt $n = 1$ aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammensetzt. Bestimmen Sie im Rahmen des Modells unter Verwendung der Matrix Q, zu welchem Zeitpunkt zum ersten Mal ein Gesamtbestand von mehr als 220 Tieren zu erwarten ist.
Geben Sie diesen Gesamtbestand an. **10 P**

f) Durch bestimmte hormonelle Futterzusätze kann die Geburtenrate der reifen Bachen gesenkt werden. Untersuchen Sie im Rahmen des Modells mit Hilfe von Rechnerexperimenten sowohl für die Matrix P als auch für die Matrix Q, ob durch eine Senkung dieser Geburtenrate erreicht werden kann, dass

- die Wildschweinpopulation langfristig ausstirbt,
- sich die Wildschweinpopulation langfristig sowohl in ihrem Gesamtbestand als auch in ihrer Verteilung auf die Altersklassen stabilisiert, aber nicht ausstirbt.

Variieren Sie dazu den Wert für die Geburtenrate der reifen Bachen und dokumentieren Sie Ihre wesentlichen Ergebnisse auf Ihrem Bearbeitungsblatt in einer Tabelle wie der Untenstehenden. Interpretieren Sie Ihre Resultate. Verwenden Sie für Ihre Experimente jeweils eine Startpopulation bestehend aus 78 Frischlingen, 39 Überläuferbachen und 50 reifen Bachen.
Für den Fall, dass Sie eine Stabilisierung der Population erreichen können, ermitteln Sie den Wert der dazugehörigen Geburtenrate gerundet auf eine Nachkommastelle. **25 P**

Hinweise:
Aufgrund der Struktur der Matrizen P und Q tritt ein periodisches Populationsverhalten *nicht* ein.
Wählen Sie Ihre Zeitschritte so, dass die Rechenzeiten sinnvoll bleiben.

Matrix	Wert der Geburtenrate der reifen Bachen	Anzahl n der durchgeführten Zeitschritte	Populationsvektor nach n Zeitschritten

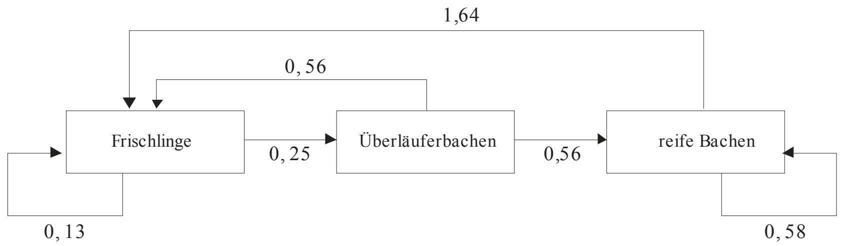
g) Eine andere Möglichkeit, eine Population zu begrenzen, ist der Abschuss. Dabei ist es wichtig zu beachten, dass Bachen in der Sozialstruktur von Wildschweingruppen eine wichtige Rolle spielen; ohne sie würden die Frischlinge keine Verhaltensorientierung bekommen. Deshalb dürfen nicht zu viele Bachen erlegt werden.

Im Folgenden soll eine durch die Matrix P beschriebene Populationsentwicklung betrachtet werden.

Die Wildschweinpopulation setze sich zum Zeitpunkt $n = 1$ wie im Aufgabenteil d) wieder aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen.

Bestimmen Sie einen Populationsbestand, auf den der ursprüngliche Bestand durch Abschuss reduziert werden müsste, sodass die Population im nächsten Jahr wiederum nur auf insgesamt 100 Tiere anwächst. In diesem neuen Populationsbestand sollen genau zehn alte Bachen und genau zehn Überläuferbachen vorkommen. **15 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 	10		
b)	Die dritte Matrix ist zu wählen. Für den zweiten Teil gibt es mehrere Begründungen, eine ist ausreichend. Beispiele werden im Folgenden genannt. Erste Matrix: Der Eintrag 0,13 in dieser Matrix bedeutet, dass 13 % der Frischlinge ohne Zwischenstadium sofort zu reifen Bachen werden. Das entspricht nicht dem Aufgabentext. Zweite Matrix: Der Eintrag 0,25 in dieser Matrix bedeutet, dass 25 % der Überläuferbachen zu reifen Bachen werden. Das entspricht nicht dem Aufgabentext, dort werden 56 % genannt. Vierte Matrix: Der Eintrag 0,56 in dieser Matrix bedeutet, dass 56 % der reifen Bachen überleben. Das entspricht nicht dem Aufgabentext, dort werden 58 % genannt.	5	10	
c)	Gute Lebensbedingungen führen zu höheren Fortpflanzungs- und Überlebensraten. Alle von null verschiedenen Elemente von *P* sind größer als die entsprechenden von *Q*. Also liegen *P gute* und *Q gemäßigte* Lebensbedingungen zugrunde.		10	
d)	$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,94 & 1,93 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,61 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70,03 \\ 30 \\ 21,87 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 22 \end{pmatrix}.$ Zum Zeitpunkt $n = 2$ ist mit ca. 70 Frischlingen, 30 Überläuferbachen und 22 reifen Bachen zu rechnen. $\begin{pmatrix} 0,26 & 0,94 & 1,93 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,61 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix}.$ Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 46 \\ 8\frac{932}{979} \\ 20\frac{520}{979} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 46 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}.$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Zum Zeitpunkt $n = 0$ ist mit ca. 46 Frischlingen, 9 Überläuferbachen und 21 reifen Bachen zu rechnen. *Runden Prüflinge immer <u>ab</u>, ist aus sachkontextualen Gründen kein Punktabzug vorzunehmen. Werden die Ergebnisse in den Antwortsätzen ungerundet notiert, wird nicht die volle Punktzahl gegeben.*	5	10	
e)	Durch sukzessives Multiplizieren mit der Matrix ausgehend vom gegebenen Startvektor erhält man folgende Werte: (see table below) Der Bestand zum Zeitpunkt $n = 4$ beträgt ca. 190 Tiere, der Bestand zum Zeitpunkt $n = 5$ beträgt ca. 236 Tiere. Damit ist zum Zeitpunkt $n = 5$ der Bestand erstmals größer als 220 Tiere. *Der Gesamtbestand nach dem Überschreiten der Grenze von 220 <u>muss</u>, der vor dem Erreichen dieser Grenze <u>sollte</u> dokumentiert werden. Wird hierbei nicht auf Ganze gerundet, kann nicht die volle Punktzahl gegeben werden (vgl. Anmerkung zur Lösung d). Die Darlegung der einzelnen Populationsvektoren ist nicht erforderlich.*	5	5	
f)	Durch sukzessives Multiplizieren mit der Matrix oder mittels der Multiplikation mit einer entsprechenden Matrixpotenz erhält man die folgende Tabelle: (see table below)			

Table for e):

n	1	2	3	4	5
$\vec{v}_n$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70{,}03 \\ 30 \\ 21{,}87 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 88{,}6169 \\ 35{,}015 \\ 28{,}3407 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 110{,}652045 \\ 44{,}30845 \\ 34{,}795327 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 137{,}57445581 \\ 55{,}3260225 \\ 43{,}37937447 \end{pmatrix}$

Table for f):

Matrix	Wert der Geburtenrate der reifen Bachen	Anzahl n der durchgeführten Zeitschritte	Populationsvektor nach n Zeitschritten
P	0	50	$\approx \begin{pmatrix} 36340241 \\ 14579702 \\ 12938423 \end{pmatrix}$
Q	0	50	$\approx \begin{pmatrix} 0{,}006 \\ 0{,}003 \\ 0{,}008 \end{pmatrix}$
Q	0,35	100	$\approx \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$
Q	0,45	100	$\approx \begin{pmatrix} 166 \\ 82 \\ 103 \end{pmatrix}$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Die Anzahl n der durchgeführten Zeitschritte kann je nach CAS-Typ variieren. Selbst wenn man den Wert der Geburtenrate in der Matrix P auf den minimal möglichen (nämlich 0) senkt, wächst die Population noch stark. Also ist durch eine Senkung der Geburtenraten der reifen Bachen weder ein Aussterben noch eine Stabilisierung der durch die Matrix P beschriebenen Population zu erreichen. Setzt man den Wert der Geburtenrate in der Matrix Q auf den minimal möglichen (nämlich 0), ist ein Aussterben der Modellpopulation zu beobachten. Bei einem Wert von 0,35 ist noch ein Rückgang der Population zu erkennen; bei einem Wert von 0,45 hingegen lässt sich bereits ein Wachstum erkennen. Bei einer Geburtenrate von ca. 0,4 ist daher mit einer stabilen Populationsentwicklung zu rechnen. *Für die Angabe der Näherung mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle ist – etwa wie oben gezeigt – experimentell zu belegen, dass der Wert in dem Intervall [0,35; 0,45[liegt. (Der genaue Wert ist 0,4212.)* *Der Nachweis, dass im Intervall [0,35; 0,45[<u>tatsächlich</u> eine Geburtenrate existiert, die zu einer Stabilisierung führt, ist nicht erforderlich. Die skizzierte Plausibilitätsbetrachtung reicht aus.* *Die Anzahl der durchgeführten Zeitschritte muss jeweils so gewählt werden, dass die Tendenz deutlich wird.* *Verwendet ein Prüfling einen anderen als den vorgeschlagenen experimentellen Zugang (etwa über die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems) und argumentiert auf dieser Basis vollständig und korrekt, so ist die volle Punktzahl zu geben.*		15	10
g)	Sei t die Anzahl der den Abschuss überlebenden Frischlinge und x, y, z der jeweilige Altersklassenbestand nach Abschuss und Erholung. Dann ist anzusetzen: $P \cdot \begin{pmatrix} t \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x + y + z = 100$. Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt sich u. a.. Somit ist der Abschuss so durchzuführen, dass 10 alte Bachen, 10 Überläuferbachen und ca. 43 Frischlinge übrig bleiben.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Stochastik 1

III.1 Sicherheitssystem

In der Firma Gammamobil sollen die Produktionsabläufe automatisch überwacht werden.
Zuerst betrachten wir die Firma Betasecure, die die Überwachungsgeräte herstellt, und gleichzeitig deren Zulieferfirma Alfatronic, die die verwendeten elektronischen Bauteile für die Geräte herstellt.

a) Ein Überwachungsgerät besteht aus 30 Bauteilen ($T_1, \ldots, T_{30}$). Das Überwachungsgerät ist nur dann funktionstüchtig, wenn alle 30 Bauteile einwandfrei arbeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht funktioniert, beträgt nach dem Zusammenbau für jedes einzelne Bauteil 2 %. Diese 30 Ausfallereignisse werden dabei als stochastisch unabhängig voneinander betrachtet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eines solches Überwachungsgerät nicht funktioniert. **10 P**

b) Die Ausfallwahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil a) ist sehr hoch. Deshalb will Betasecure ein verbessertes Überwachungsgerät entwickeln.
Dazu soll der Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit p, dass ein bestimmtes einzelnes Bauteil nicht funktioniert und der Wahrscheinlichkeit $A(p)$, dass das zusammengebaute Gerät nicht funktioniert, als Funktion untersucht werden. Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung lautet:
$A(p) = 1-(1-p)^{30}$
Ermitteln Sie nun eine Wertetabelle dieses Zusammenhanges:

p	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1	0,2
$A(p)$							

Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion im Bereich $0 \le p \le 0{,}2$.
Die Wahrscheinlichkeit $A(p)$ (Gerät funktioniert nicht) für ein verbessertes Überwachungsgerät soll höchstens 5 % sein. Bestimmen Sie grafisch, tabellarisch oder rechnerisch, wie groß p – gerundet auf drei Nachkommastellen – höchstens sein darf. **10 P**

c) Die Fehler der Überwachungsgeräte entstehen in der Firma Betasecure beim Zusammenbau der Bauteile, aber auch, weil die Zulieferfirma Alfatronic fehlerhafte Bauteile liefert.
Alfatronic sichert zwar zu, dass der Ausschussanteil (Anteil an unbrauchbaren Teilen) höchstens 1 % beträgt, doch die belieferte Firma Betasecure richtet trotzdem eine eigene Qualitätskontrolle ein.
Da es zu teuer ist, bei jeder Lieferung alle Bauteile zu überprüfen, soll immer nur ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei ist geplant, jeweils nur eine Stichprobe von 50 Stück zu prüfen. Da es Betasecure vor allem darauf ankommt sicherzustellen, dass die zugesicherte Ausschussquote von höchstens 1 % eingehalten wird, wählt sie als Nullhypothese die Annahme, dass diese Zusicherung **nicht erfüllt** ist, um diese dann möglichst mit einem signifikanten Ergebnis (5 % -Niveau) zu verwerfen. Wenn dies der Fall ist, soll die Lieferung akzeptiert werden.

- Begründen Sie, dass so für die Anzahl X der unbrauchbaren Teile kein passender Verwerfungsbereich angegeben werden kann, weil die Stichprobengröße dazu zu klein ist.
- Bestimmen Sie die Mindestgröße der Stichprobe mit dem dann zugehörigen Verwerfungsbereich, damit das Verfahren doch – wie geplant – durchgeführt werden kann. **10 P**

d) Nach dem Zusammenbau wird bei Betasecure jedes Überwachungsgerät noch dreimal unabhängig voneinander kontrolliert. Ein fehlerhaftes Gerät wird bei jeder Einzelkontrolle mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 entdeckt.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein fehlerhaftes Gerät bei der Gesamtkontrolle nicht entdeckt wird.
- Bestimmen Sie auch die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 fehlerhaften Geräten alle entdeckt werden. **20 P**

Betrachten Sie jetzt den eigentlichen Produktionsablauf in der Firma Gammamobil, den die Überwachungsgeräte überwachen sollen. Unterstellen Sie dabei, dass die Überwachungsgeräte funktionstüchtig sind.

e) Erfahrungen haben gezeigt, dass bei 1000 Produktionsabläufen durchschnittlich 20 Störungen auftreten.
Bei den Überwachungsgeräten kann es dennoch mit Wahrscheinlichkeit 0,5 % vorkommen, dass ein Produktionsablauf ein Warnsignal erzeugt, wenn gar keine Störung vorliegt.
Es kann auch mit Wahrscheinlichkeit 1% vorkommen, dass kein Warnsignal erzeugt wird, wenn eine Störung vorliegt.

Bestätigen Sie (z. B. mithilfe eines Baumdiagramms), dass die Wahrscheinlichkeit,

i) dass ein Produktionsablauf durch ein Alarmsignal unterbrochen wird, ungefähr 2,5 % beträgt,

ii) dass im Falle eines Alarms gar keine Störung im Produktionsablauf vorliegt, ungefähr 20 % beträgt,

iii) dass ein Produktionsablauf gestört abläuft und das Überwachungsgerät diese Störung nicht entdeckt, ungefähr $\frac{1}{5000}$ beträgt. **30 P**

Die drei Ergebnisse geben Anlass zum Nachdenken: Sehr erfreulich ist das Ergebnis von iii), sehr unerfreulich das Ergebnis von ii). Bei Alarm wird nämlich der ganze Produktionsablauf gestoppt, was aufwendig und kostenintensiv ist. Das passiert zwar relativ selten (2,5 %), bedeutet aber dann ziemlich oft Fehlalarm (20 %).

Deshalb werden versuchsweise drei der Überwachungsgeräte gleichzeitig eingesetzt, und es wird nur dann Alarm ausgelöst, wenn mindestens zwei der Geräte eine Störung anzeigen.

f) Bestimmen Sie die beiden in e) betrachteten Wahrscheinlichkeiten ii) und iii) erneut.
Die Wahrscheinlichkeit, dass im Falle eines ungestörten Produktionsablaufs ein Alarm auftritt, soll nun variabel sein und wird mit μ bezeichnet.
Stellen Sie die Abhängigkeit als Funktion von μ dar und bestimmen Sie die Werte von μ, für die die Funktionswerte (d. h. die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms) unter 1% liegen.
Interpretieren Sie das Ergebnis. **20 P**

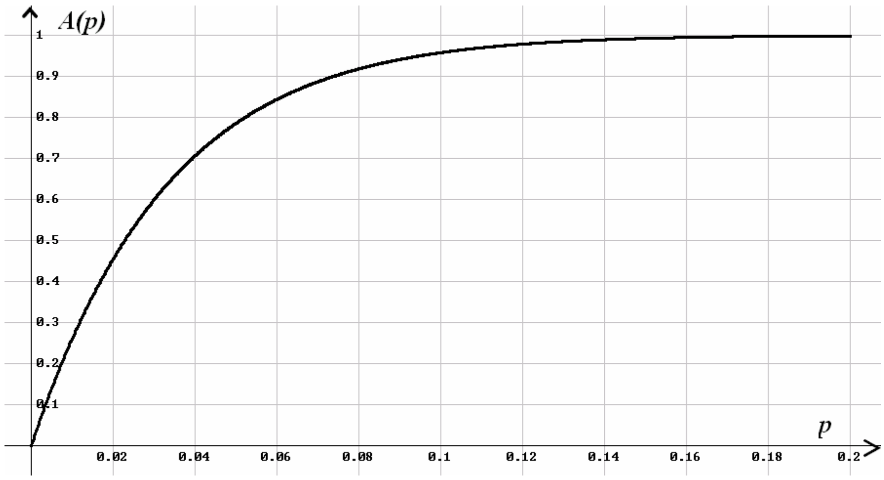
Erwartungshorizont

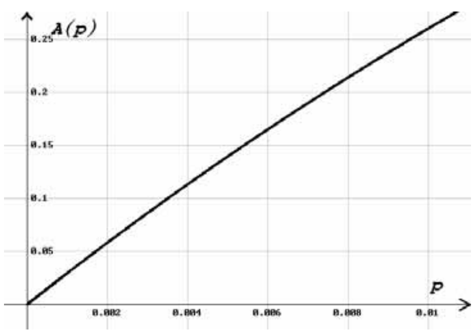
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Ein Einzelgerät fällt aus, wenn mindestens ein Teil ausfällt. Dies ist das Gegenereignis dazu, dass kein Teil ausfällt. Wegen der Unabhängigkeit fällt kein Teil mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}98^{30}$ aus. Die Komplementärwahrscheinlichkeit ergibt: $p\left(A_E\right)=1-0{,}98^{30}\approx 45\,\%$.	10		

b) Die Wertetabelle

p	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1	0,2
$A(p)$	0	0,26	0,45	0,60	0,79	0,96	1,00

mit folgendem (sinnvollen Ausschnitt des) Graphen:





Für $p \approx 0{,}0017 = 1{,}7$ ‰ gilt

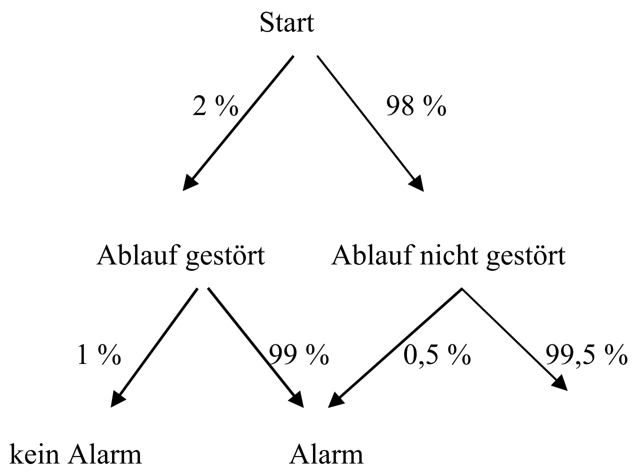
$A(p) = 5$ %. Dies kann der Grafik entnommen werden oder durch Lösen der Gleichung $A(p) = 0{,}05$. Im letzten Falle empfiehlt es sich $1-p$ durch q zu substituieren:

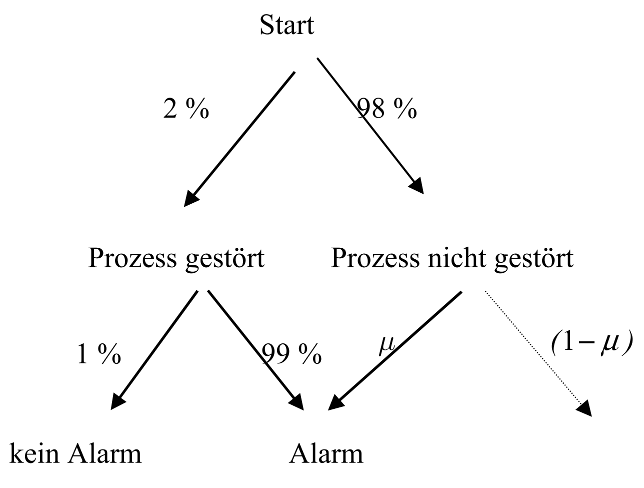
$$1-q^{30}=0{,}05$$
$$q^{30}=0{,}95$$
$$q\approx 0{,}9983 \Leftrightarrow p\approx 0{,}0017\,.$$

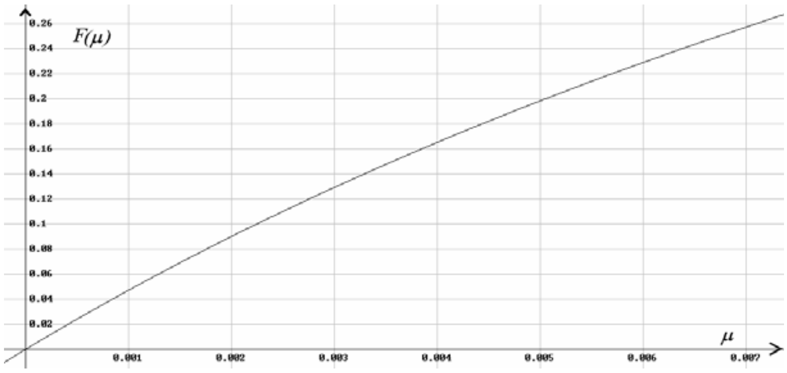
p muss also äußerst gering sein, was einen hohen Produktionsaufwand bedeutet.

Bewertung b): II: 10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	• Die Anzahl X der fehlerhaften Bauteile in der Stichprobe ist 50-p-binomialverteilt. Die Nullhypothese lautet: $p > 0{,}01$. Kleine Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei $\{X \le K\}$ der gesuchte Ablehnungsbereich. Für den Fehler erster Art gilt: $\alpha = P(X \le K \mid H_0) \le P(X \le K \mid p = 0{,}01) = \sum_{i=0}^{K} B(50;\, 0{,}01;\, i)$. Es ist also der größte Wert von K gesucht, für den der rechte Term und damit α noch ≤ 5 % ist. Aber bereits für $K = 0$ erhält man: $B(50; 0{,}01; 0) = 0{,}99^{50} \approx 60\%$! Das heißt: Selbst wenn man die Lieferung nur annehmen würde (H_0 ablehnen würde), wenn <u>alle</u> 50 geprüften Teile in Ordnung sind, kann man nur garantieren, dass $\alpha \le 60\%$. • Man erkennt aus dieser Argumentation auch, was zu tun ist, nämlich die Stichprobengröße n so groß zu wählen, dass $0{,}99^n \le 5\%$. Dazu müsste n größer als 298 sein (das kann durch Probieren oder Logarithmieren gefunden werden), und man dürfte die Lieferung dann auch nur akzeptieren, wenn alle Bauteile in Ordnung sind, d.h. der Ablehnungsbereich ist $\{X = 0\}$.			10
d)	• Ein fehlerhaftes Gerät wird nicht entdeckt, wenn alle drei Testverfahren es nicht entdecken, also mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}1^3 = 0{,}001 = 0{,}1\%$.		10	
	• Ein fehlerhaftes Gerät wird also mit 99,9 % Wahrscheinlichkeit entdeckt, alle 100 fehlerhaften Geräte werden also mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}999^{100} \approx 0{,}904... \approx 90\,\%$ entdeckt.		10	
e)	i) Mit einem Baumdiagramm oder dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.			



	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Es gilt also $P(„\text{Alarm}“) = 0{,}02\cdot 0{,}99 + 0{,}98\cdot 0{,}005 \approx 2{,}5\%$.	10		
	ii) Mithilfe des Satzes von Bayes lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmen (im Nenner steht dabei das Ergebnis aus i)): St : = Störung im Ablauf. A : = Alarmreaktion des Überwachungssystems. $p\left(\overline{St}\mid A\right)=\frac{p\left(\overline{St}\right)\cdot p\left(A\mid\overline{St}\right)}{p(A)}=\frac{0{,}98\cdot 0{,}005}{0{,}02\cdot 0{,}99+0{,}98\cdot 0{,}005}\approx 20\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Störung vorliegt, obwohl das Gerät Alarm gibt, beträgt tatsächlich ca. 20 %!		10	
	iii) $P(St\cap\overline{A}) = P(St)\cdot P(A\mid St) = 0{,}02\cdot 0{,}01 = 0{,}0002 = \frac{1}{5000}$. (Im obigen Baumdiagramm ist das der Pfad „zweimal links“).	10		
f)	Es müssen die Werte auf der zweiten Stufe rechts durch Variable ersetzt werden.  Mit diesen neuen Daten wiederholen wir die Rechnung zu (2) aus e) : $p\left(\overline{ST}\mid A\right)= F(\mu) = \frac{0{,}98\cdot\mu}{0{,}02\cdot 0.99+0{,}98\cdot\mu}$. Man erkennt für $\mu = 0{,}005$ das Ergebnis aus e) wieder. Mit $\mu \approx 0{,}02\% = \frac{1}{5000}$ könnte man das Ergebnis, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgelöster Alarm ein Fehlalarm ist, unter 1 % bekommen. Das erfordert aber eine extreme Qualität des Überwachungssystems.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
			10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Stochastik 2

III.2 „Schwarzfahrer“

Nach Angaben des HVV beträgt der Anteil der „Schwarzfahrer“, das sind Fahrgäste, die keinen gültigen Fahrschein vorzeigen können, am gesamten Fahrgastaufkommen etwa 3 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle „Berliner Tor“ in eine Bahn der Linie U3 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste im Wagen.

An der Haltestelle „Hauptbahnhof Süd“ steigen sie um in einen Zug der Linie U1, in dem sie weitere 18 Fahrgäste kontrollieren.

Es soll vereinfachend angenommen werden, dass die Anzahl der Schwarzfahrer bei den Kontrollen binomialverteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- die Kontrolleure bei beiden Kontrollen zusammen genau 2 Schwarzfahrer ermitteln.
- die Kontrolleure bei den Kontrollen mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure erst in der Linie U1 auf den ersten Schwarzfahrer treffen. **20 P**

b) Berechnen Sie, wie viele Schwarzfahrer die Kontrolleure bei ihrer oben beschriebenen Kontrolle erwarten können. **5 P**

c) Bestimmen Sie, wie viele Fahrgäste überprüft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % mindestens ein Schwarzfahrer ermittelt wird. **15 P**

Genaue Untersuchungen zeigen, dass die Anteile der Schwarzfahrer in den verschiedenen Linien deutlich unterschiedlich sind. In der Linie U3 sind 2 % Schwarzfahrern zu erwarten, in der Linie U1 dagegen 4 %.

d) Bestimmen Sie aufgrund dieser genaueren Informationen noch einmal die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei der oben beschriebenen Kontrolle mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.
Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) und geben Sie Gründe für die Abweichung an. **10 P**

e) Der HVV geht davon aus, dass 10 % der Schwarzfahrer erwischt werden. Ein erwischter Schwarzfahrer muss 40 € erhöhtes Beförderungsentgelt zahlen. Besitzt er eine Zeitkarte, die er nur zu Hause vergessen hat, muss er diese innerhalb einer Woche vorzeigen und zahlt dann nur eine Bearbeitungsgebühr von 5 €. Dieser Fall trifft etwa bei der Hälfte der erwischten Schwarzfahrer zu. Gehen Sie davon aus, dass jeder nicht erwischte Schwarzfahrer im Durchschnitt entgangene Einnahmen von 3 € verursacht.
Untersuchen Sie, ob das erhöhte Beförderungsentgelt angehoben werden muss, um die erwarteten Verluste, die durch die Schwarzfahrer entstehen, auszugleichen. Die Kosten, die die Entlohnung der Kontrolleure verursacht, sollen hier unberücksichtigt bleiben.
Berechnen Sie gegebenenfalls ein erhöhtes Beförderungsentgelt, bei dem Kostendeckung zu erwarten ist. **20 P**

f) Bei dem HVV gibt es auch Überlegungen, „zwei Fliegen mit einer Klappe zu schlagen", nämlich

- einerseits die Einnahmenseite durch Anhebung des „erhöhten Beförderungsentgelts" zu verbessern und
- andererseits die Schwarzfahrerquote durch diese gezielte Abschreckung zu senken**.**

Ein Planer macht folgende Modellannahme:
Die Anhebung des „erhöhten Beförderungsentgelts" von 40 € um z € führt zu einer Abnahme der ursprünglichen Schwarzfahrerquote von 3 % um $0{,}1 \cdot z$ Prozentpunkte. (Eine Erhöhung um z. B. 4 € würde so die Schwarzfahrerquote auf 2,6 % senken.)

Bestimmen Sie den Wert, für das „erhöhte Beförderungsgeld", bei dem die Bilanz für den HVV am besten wäre. Gehen Sie dabei z. B. von 100 000 Fahrten eines Tages aus.

Beurteilen Sie das Ergebnis. **10 P**

g) Nach einer erheblichen Preiserhöhung befürchtet der HVV, dass der durchschnittliche Anteil der Schwarzfahrer deutlich über 3 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu untersuchen, wird eine Großkontrolle durchgeführt, bei der 10 000 Fahrgäste kontrolliert werden.
Der HVV ist unsicher, bei welchen Ergebnissen der Großkontrolle er die oben genannten Befürchtungen als statistisch begründet ansehen sollte. Geben Sie eine Entscheidungshilfe an und begründen Sie diese. **20 P**

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zufallsgröße X: Anzahl der Schwarzfahrer unter den 43 kontrollierten Fahrgästen. X ist binomialverteilt mit $B_{n,p,k} = B_{43,\,0{,}03,\,x}$.

• Genau 2 Schwarzfahrer werden erwischt mit der Wahrscheinlichkeit
$B_{43,\,0{,}03,\,2} = \binom{43}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{41} \approx 0{,}233... \approx 23\,\%$.

• mindestens 1 Schwarzfahrer wird erwischt mit der Wahrscheinlichkeit
$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}97^{43} \approx 0{,}73... \approx 73\,\%$.

Der erste ermittelte Schwarzfahrer sitzt in der Linie U1 mit der Wahrscheinlichkeit: $B_{25;0{,}03;0} \cdot \left(1 - B_{18;0{,}03;0}\right) \approx 0{,}197 \approx 20\,\%$.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Erwartungswert ist $E = n \cdot p = 43 \cdot 0{,}03 = 1{,}29$.
Die Kontrolleure müssen mit ungefähr einem Schwarzfahrer rechnen.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Hier gilt $1 - p(X = 0) \approx 0{,}9$. Einsetzen der Werte ergibt:
$1 - 0{,}97^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}97^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq 75{,}6$.
Um mit 90 %-iger Sicherheit einen Schwarzfahrer zu erwischen, müssen mindestens 76 Fahrgäste kontrolliert werden.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Hier hilft wie in a) das Gegenereignis: $1 - 0{,}98^{25} \cdot 0{,}96^{18} \approx 0{,}711$.
Diese Wahrscheinlichkeit ist deutlich niedriger als im Aufgabenteil a) (73 %). Der Grund liegt in der unterschiedlichen Anzahl der kontrollierten Fahrgäste in den beiden Linien. In der Linie U3 sind es ¼ mehr als in der Linie U1. Somit wirkt sich der geringere Anteil an Schwarzfahrern in der U3 stärker aus als der höhere Anteil in der U1.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>G bezeichnet die erwarteten Einnahmen des HVV pro Schwarzfahrt. Die Situation wird durch folgende Tabelle dargestellt:
<table>
<tr><td>G in €</td><td>–3</td><td>5</td><td>37</td></tr>
<tr><td>$P(G)$</td><td>0,9</td><td>0,05</td><td>0,05</td></tr>
</table>
Der Erwartungswert von G ist:
$E(G) = 0{,}05 \cdot 37\,€ + 0{,}05 \cdot 5\,€ - 0{,}9 \cdot 3\,€ = -0{,}6\,€$.
Pro Schwarzfahrer entsteht dem HVV also durchschnittlich ein Verlust von 0,60 €.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Keine Verluste entstehen, wenn $E(G) = 0$ ist. Um das zu erreichen, setzen wir für das erhöhte Beförderungsgeld die Variable x ein und lösen die Gleichung: $0 = 0{,}05 \cdot (x - 3) + 0{,}05 \cdot 5 - 0{,}9 \cdot 3$ $0{,}05 \cdot x = 2{,}7 - 2 \cdot 0{,}05$ $x = 52$. Das erhöhte Beförderungsgeld muss also auf 52 € erhöht werden, damit keine Verluste entstehen.	5	15	
f)	Der Anteil der Schwarzfahrten an den 100 000 Fahrten beträgt $\frac{(3 - 0{,}1 \cdot x)}{100} \cdot 100.000$ G bezeichnet wieder die Einnahmen des HVV pro Schwarzfahrer. Die Situation wird durch folgende Tabelle dargestellt: G in € | –3 | 5 | 37+z $P(G)$ | 0,9 | 0,05 | 0,05 Der Erwartungswert von G ist: $E(G) = 0{,}05 \cdot (37 + z)\ € + 0{,}05 \cdot 5\ € - 0{,}9 \cdot 3\ €$ $= 0{,}05 \cdot (42 + z)\,€ - 0{,}9 \cdot 3\,€ = \frac{(z - 12)}{20}$ Die erwarteten Gesamteinnahmen als Funktion von z betragen also: $g(z) = 100.000 \cdot \frac{(3 - 0{,}1 \cdot z)}{100} \cdot \frac{(z - 12)}{20}$ $= -5 \cdot (z - 12) \cdot (z - 30)$ Der Graph dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel, also dem Maximum bei $z = 21$ und dem Funktionswert 405. Bei einem „erhöhten Beförderungsentgelt“ von 61 € wäre in dem betrachteten Modell also die „Bilanz“ für den HVV am besten. Das wäre allerdings eine ziemliche Abzocke, denn in diesem Modell würde bei $z = 30$ keiner mehr schwarzfahren, was zumindest aus der Perspektive der Nichtschwarzfahrer gerechter wäre und was dem HVV keine „unverdienten“ Einnahmen brächte.			10
g)	Getestet werden könnte die Nullhypothese: „Der Anteil der Schwarzfahrer liegt unverändert bei 3 % oder weniger.“ Bei einem Anteil der Schwarzfahrer von 3 % nehmen für die Kontrolle von 10000 Fahrgästen der Erwartungswert und die Standardabweichung folgende Werte an: $E = n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}03 = 300$. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} \approx 17$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Bei der Kontrolle wäre bei einem unveränderten Anteil an Schwarzfahrern mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % die Anzahl der Schwarzfahrer kleiner als 335. Liegt die erhobene Zahl der Schwarzfahrer über 334, so könnte man die Hypothese, dass auch nach der Fahrpreiserhöhung die Quote der Schwarzfahrer weniger oder gleich 3 % beträgt, auf dem 2 %-Niveau signifikant verwerfen. *Bemerkung: Natürlich können hier auch andere Signifikanzniveaus (z. B. 5 % oder 1 %) betrachtet werden.*		5	15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25