Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2004/2005

02. Februar 2005

Grundkurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, Technische Gymnasien

Aufgabensatz - HAUPTTERMIN

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind <u>nicht</u> für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines
2 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
3 Hinweise zum Korrekturverfahren
4 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen <u>nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer</u>, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **270 Minuten** einschließlich Lesezeit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sieben** Aufgaben – **I.1, I.2, I.3** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

3 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Nach der Erstkorrektur werden die Schülerarbeiten komplett kopiert.
- Die Kopien verbleiben zusammen mit den Bewertungsbögen in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen <u>durchgängig</u> anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen im formalen Bereich nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

4 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte	Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 285	≥ 95 %	15	≥ 165	≥ 55 %	7
≥ 270	≥ 90 %	14	≥ 150	≥ 50 %	6
≥ 255	≥ 85 %	13	≥ 135	≥ 45 %	5
≥ 240	≥ 80 %	12	≥ 120	≥ 40 %	4
≥ 225	≥ 75 %	11	≥ 99	≥ 33 %	3
≥ 210	≥ 70 %	10	≥ 78	≥ 26 %	2
≥ 195	≥ 65 %	9	≥ 57	≥ 19 %	1
≥ 180	≥ 60 %	8	< 57	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2005

Bewertungsbogen Erstkorrektur

BeBo EKo M

Schulchiffre			
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK / GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Abiturprüfung 2005

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre		**BeBo ZKo M**	
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK / GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE ➔	

Bewertungstext

Notenpunkte ➔	

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

ANALYSIS 1

I.1 Drei ganzrationale Funktionen

Gegeben sind zwei ganzrationale Funktionen f und g mit

$$f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 \quad \text{und} \quad g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^3 \ \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

sowie ihre grafische Darstellung (s. Anlage).

a) Geben Sie an, welcher Graph zu welcher Funktion gehört. Begründen Sie Ihre Angabe.

b) Bestimmen Sie rechnerisch für g die Extrempunkte und die Wendepunkte.
Geben Sie die Gleichungen der Wendetangenten an.

c) Ermitteln Sie das Maß der Fläche, die von den beiden Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird.

d) Gegeben ist nun eine dritte Funktion h mit $h(x) = 0{,}5x^4 - \frac{4}{3}x^3$.

Bestimmen Sie die Nullstellen von h.
Skizzieren Sie in der Anlage den ungefähren Verlauf des Graphen von h für $x \geq 0$ mit Hilfe der Nullstellen und folgender Angaben:
h hat einen Tiefpunkt in $T(2\,|-2{,}\overline{6})$ und zwei Wendepunkte in $W_1(0\,|\,0)$ und $W_2(1{,}\overline{3}\,|-1{,}58..)$.

e) Die Tiefpunkte der Funktionen f, g und h sind $T_f(\frac{3}{2}\,|-\frac{27}{32})$, $T_g(3\,|-\frac{27}{2})$ und $T_h(2\,|-\frac{8}{3})$.

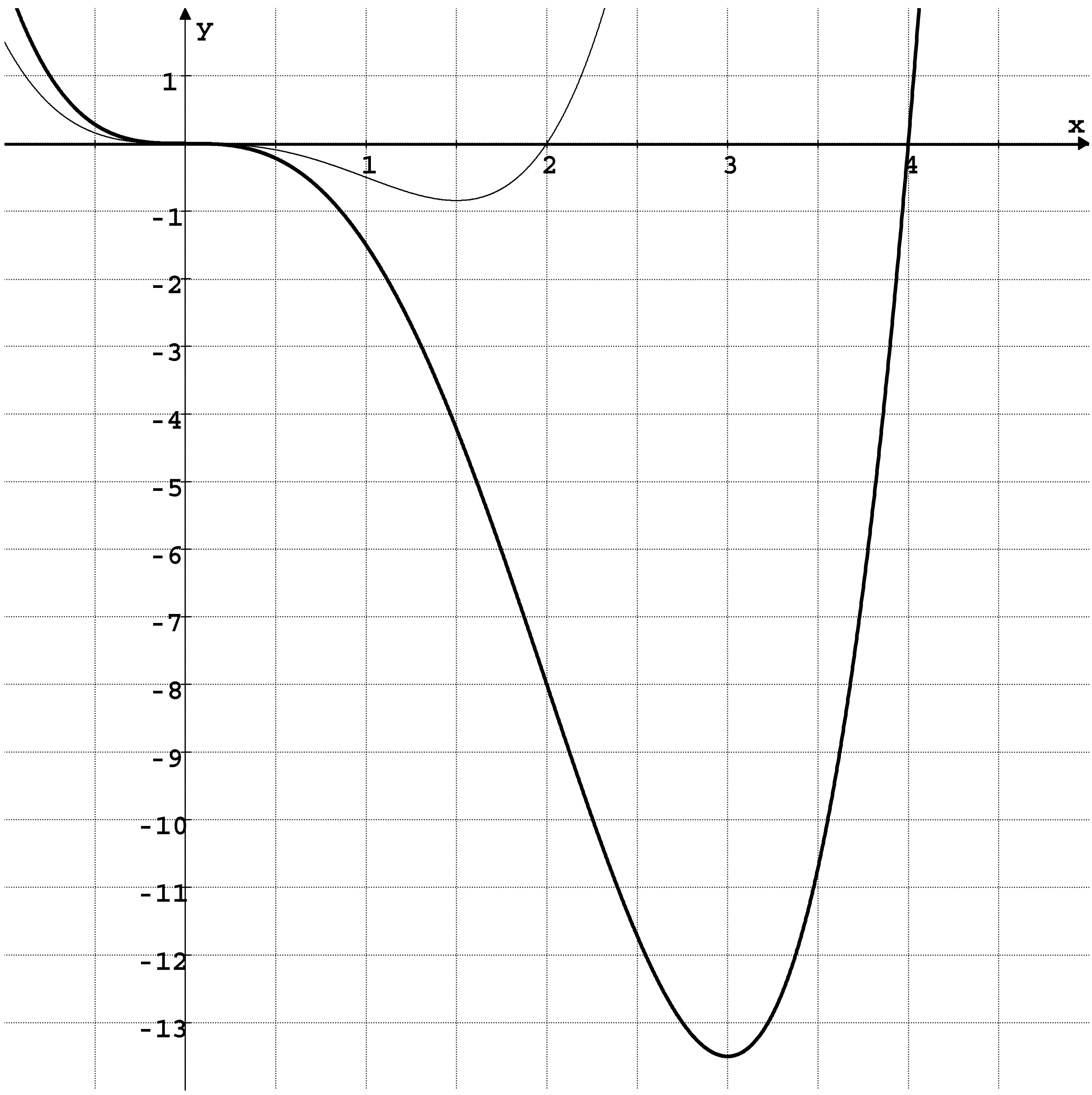
Diese Punkte liegen alle auf dem Graphen einer ganzrationalen Funktion k.

Entscheiden Sie, ob eine der folgenden Aussagen wahr ist:

1. k ist eine lineare Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $k(x) = mx + n \quad (m, n \in \mathbb{R})$
2. k ist eine ganzrationale Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $k(x) = ax^4 \quad (a \in \mathbb{R})$

Begründen Sie Ihre Entscheidung und bestimmen Sie gegebenenfalls die Funktionsgleichung von k.

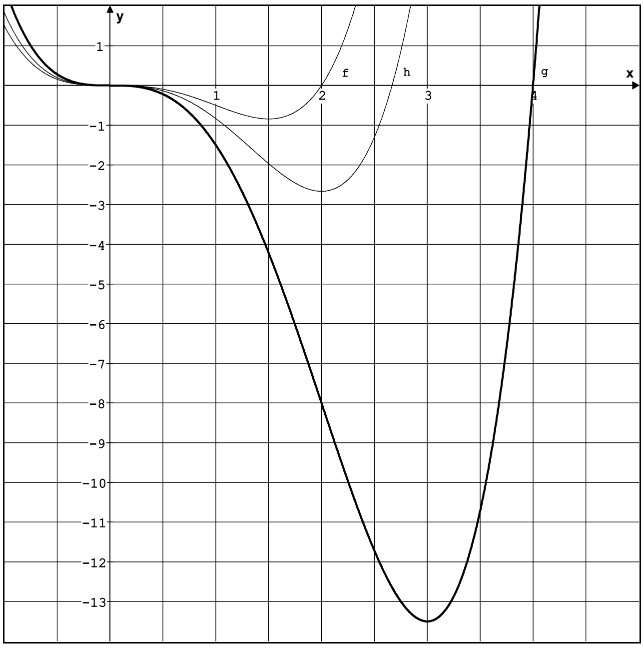
Anlage zur Aufgabe „Drei ganzrationale Funktionen“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der dünn gezeichnete Graph gehört zu f. Eine von mehreren möglichen Begründungen: Die Stelle 2 ist Nullstelle von f.	5		
b)	<u>Bestimmung der Extrem- und Wendepunkte von g:</u> Es gilt: $g'(x) = 2x^3 - 6x^2$, $g''(x) = 6x^2 - 12x$, $g'''(x) = 12x - 12$. Nullstellen von g': $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$. Es gilt: (1) $g'(0) = 0 \wedge g''(0) = 0$. $x = 0$ ist keine Extremstelle; mögliche Begründung durch Einsetzen, z.B. $g(-1) = 2{,}5$ und $g(1) = -1{,}5$. (2) $g'(3) = 0 \wedge g''(3) > 0 \wedge g(3) = -13{,}5 \Rightarrow T(3 \mid -13{,}5)$ ist Tiefpunkt. Nullstellen von g'': $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Es gilt: (1) $g''(0) = 0 \wedge g'''(0) \neq 0 \wedge g(0) = 0 \Rightarrow W_1(0 \mid 0)$ ist Wendepunkt. (2) $g''(2) = 0 \wedge g'''(2) \neq 0 \wedge g(2) = -8 \Rightarrow W_2(2 \mid -8)$ ist Wendepunkt. Es wird nicht erwartet, dass der Begriff *Sattelpunkt* benutzt wird. <u>Bestimmung der Gleichungen der Wendetangenten:</u> Die Wendetangente in W_1 $(0 \mid 0)$ ist die x-Achse, da die Kurvensteigung in W_1 gleich 0 (W_1 also Sattelpunkt) ist. Sie hat die Gleichung $t_1(x) = 0$ (oder: $y = 0$). Die Tangente in W_2 geht durch $(2 \mid -8)$ und hat die Steigung $g'(2) = 16 - 24 = -8$; sie hat also die Gleichung $t_2(x) = -8x + 8$ (oder: $y = -8x + 8$).	15	20	
c)	Man kann beispielsweise die Fläche als Differenz zweier Integrale berechnen: $A = \left\lvert \int_0^4 g(x)\,dx \right\rvert - \left\lvert \int_0^2 f(x)\,dx \right\rvert$ $= \left\lvert \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^4 \right\rvert - \left\lvert \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 \right\rvert$ $= \lvert 102{,}4 - 128 - 0 \rvert - \lvert 3{,}2 - 4 - 0 \rvert$ $= 24{,}8$ Die beiden Graphen begrenzen zusammen mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 24,8 FE.		20	5
d)	<u>Nullstellen der Funktion h:</u> $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$. Die Funktion h hat die Nullstellen 0 und $\frac{8}{3}$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>



</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Prüfung von Aussage 1:</u>

Die Aussage 1 ist falsch. Wie bereits der Skizze zu entnehmen ist, liegen die Tiefpunkte <u>nicht</u> auf einer Geraden.

Auch rechnerischer Nachweis ist möglich, wird aber nicht verlangt.

<u>Prüfung von Aussage 2:</u>

Bestimmung von a für den Fall, dass $T_h \in k$:

$k(x)=ax^4 \wedge k(2)=-\frac{8}{3} \Rightarrow 16a=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{6}$.

Prüfen, ob $T_f \in k$: Es gilt: $-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4=-\frac{81}{96}=-\frac{27}{32} \Rightarrow T_f \in k$.

Prüfen, ob $T_g \in k$: Es gilt: $-\frac{1}{6}\cdot 3^4=-\frac{81}{6}=-\frac{27}{2} \Rightarrow T_g \in k$.

Die Aussage 2 ist wahr. Die gesuchte Funktion k hat die Funktionsgleichung

$$k(x)=-\frac{1}{6}x^4 .$$

Rechnen mit Dezimalbrüchen (TR) mag für die Korrektur unbequem sein, ist aber zulässig.

</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 2

I.2 Farbenproduktion

Ein kleines Unternehmen produziert Farben für die Bauindustrie. Alle in der Aufgabe genannten Daten beziehen sich auf einen Produktionszeitraum von einem Monat.

a) Aus den Daten einer Marktanalyse ist bekannt, dass der erzielbare Preis in Abhängigkeit von der zu verkaufenden Menge x durch die folgende Funktion p beschrieben werden kann:

$$p: x \to -62 \cdot x + 4092 \quad \text{bzw.} \quad p: x \to -62 \cdot (x - 66)\,.$$

Der Erlös E ergibt sich aus dem Produkt „Menge mal Preis“ ($E:\ x \to x \cdot p(x)$).
Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E und zeigen Sie, dass E ein Maximum annimmt, wenn die produzierte Menge 33 Mengeneinheiten beträgt.

b) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Farben hängen von der zu produzierenden Menge x ab und werden beschrieben durch eine Kostenfunktion K. K lässt sich mit hinreichender Genauigkeit angeben durch:

$$K: x \to 2x^3 - 147x^2 + 3792x + 3375$$

Zeigen Sie, dass K keine Extremstellen besitzt.
Erläutern Sie die Bedeutung dieser Aussage für den Verlauf des Graphen von K.
Interpretieren Sie dies im Sachkontext.

Der Gewinn G in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x ist die Differenz aus dem Erlös E und den entstandenen Gesamtkosten K. Es gilt also: $G(x) = E(x) - K(x)$. Die möglichen Produktionsmengen, bei denen das Unternehmen keinen Verlust macht, für die der Gewinn also nicht negativ ist, bilden die so genannte **Gewinnzone**.

c) Die anliegende Abbildung zeigt die vier Graphen der Funktionen p, E, K und G. Schreiben Sie die zugehörigen Funktionsnamen an die einzelnen Graphen.

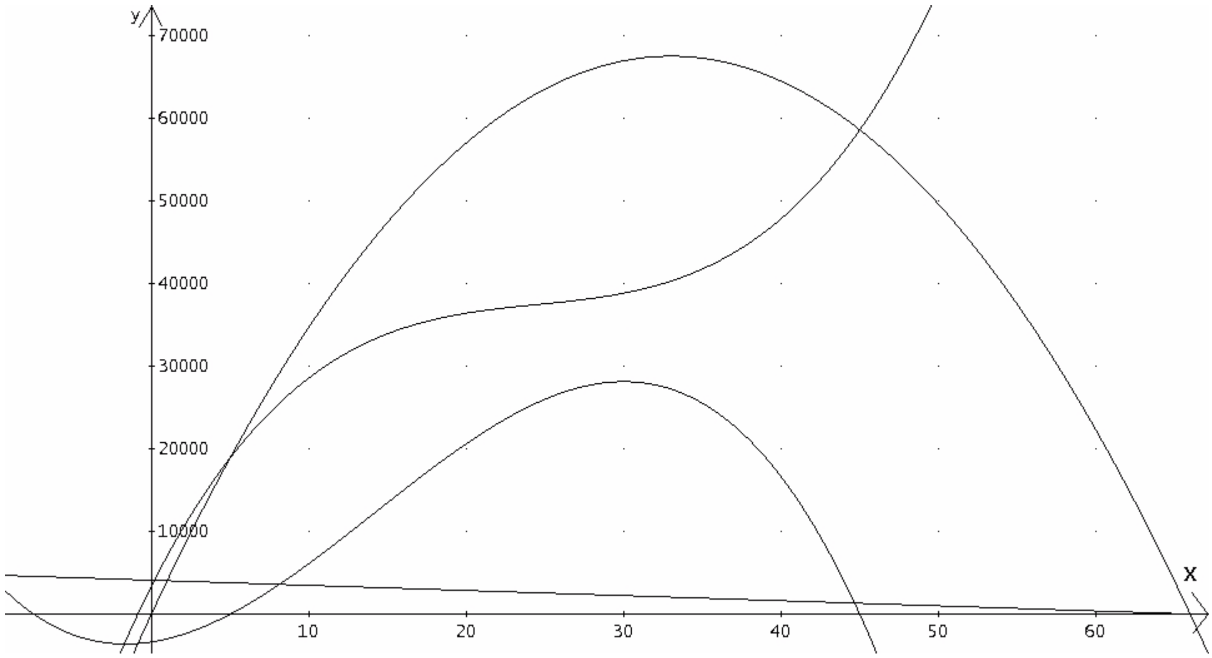
d) Auf Grund verschiedener Produktionsmengen aus der Vergangenheit ist der Unternehmensleitung bekannt, dass mit Gewinn produziert wird, wenn die hergestellten Mengen zwischen 5 und 45 Mengeneinheiten liegen. Ferner ist bekannt, dass der Gewinn bei einer Produktion von 30 Mengeneinheiten maximal ist.
Aus der Abbildung kann man erkennen, dass diese Aussagen grob zutreffen.
Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion G gilt:

$$G(x) = E(x) - K(x) = -2x^3 + 85x^2 + 300x - 3375\,.$$

Zeigen Sie durch Rechnungen, dass die beiden Aussagen für die Funktion G genau zutreffen, und berechnen Sie den maximalen Gewinn.

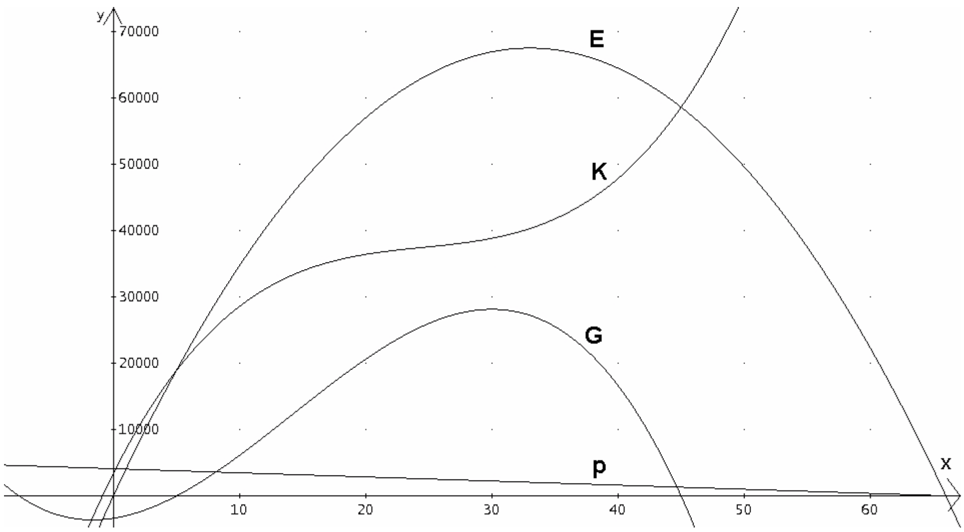
e) Den Wert $K(0)$ bezeichnet man als **Fixkosten**. Auf Grund eines neuen Pachtvertrages für das Firmengrundstück steigen die Fixkosten des Unternehmens von 3375 Geldeinheiten auf 4000 Geldeinheiten. In der Firmenleitung entsteht eine Diskussion über die Auswirkungen dieser Veränderung.
Ein Firmenmitglied behauptet, dass man nach wie vor 30 Mengeneinheiten produzieren sollte, um den Gewinn zu maximieren. Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Anlage zur Aufgabe „Farbenproduktion“:



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Gemäß Aufgabenstellung lautet die Gleichung für die Erlösfunktion E: $$E(x) = -62x\cdot(x-66).$$ Dies ist die Gleichung einer quadratischen Funktion mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 66$. Da bei einer quadratischen Funktion die Nullstellen symmetrisch zur x-Koordinate des Scheitelpunktes liegen und der Graph der Erlösfunktion E eine nach unten geöffnete Parabel ist, besitzt die Erlösfunktion somit ein Maximum mit positivem Funktionswert an der Stelle $x_m = 33$. *Zulässig, aber weniger elegant ist die Berechnung der Extremstelle mit Hilfe der Ableitungen.*	5	10	
b)	Für die Kostenfunktion K mit der Gleichung $K(x) = 2x^3 - 147x^2 + 3792x + 3375$ gilt: $$K'(x) = 6x^2 - 294x + 3792$$ Für $K'(x) = 0$ und damit $6x^2 - 294x + 3792 = 0$ erhält man $$x_{1,2} = 24{,}5 \pm \sqrt{600{,}25 - 632}.$$ Die Diskriminante der quadratischen Gleichung ist (mit –31,75) negativ. Die Gleichung hat damit keine (reellen) Lösungen. Folglich hat K keine Extremstellen. Dann ist die Kostenfunktion K streng monoton. Da der Leitkoeffizient von K positiv ist, ist sie streng monoton steigend. *Dies kann mit Wissen über kubische Funktionen begründet werden oder aus der Tatsache, dass K' überall positiv ist.* Die strenge Monotonie von K bedeutet in diesem Zusammenhang: Je größer die produzierte Menge ist, umso höher sind die Produktionskosten. Dies ist ökonomisch sinnvoll und notwendig.	5	15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)		5	5	
d)	<u>Berechnung der Gewinnzone:</u> Die Gleichung der Gewinnfunktion lautet: $G(x)=E(x)-K(x)=4092x-62x^2-\left(2x^3-147x^2+3792x+3375\right)$ $\quad =-2x^3+85x^2+300x-3375.$ Durch Rechnung (z.B. durch Einsetzen in die Gleichung der Gewinnfunktion) wird bestätigt, dass $x_3 = 5$ und $x_4 = 45$ Nullstellen von G sind. Aus dem gegebenen Graphen erkennt man, dass die dritte Nullstelle ($x_5 = -7{,}5$) negativ ist, dass die Gewinnzone also zwischen den beiden Nullstellen $x_3 = 5$ und $x_4 = 45$ liegt. *Diese Argumentation liegt durch die Betrachtung des gegebenen Graphen von G nahe, und es wird keine Diskussion über die dritte Nullstelle und ihre Lage erwartet.* <u>Berechnung des maximalen Gewinns:</u> Man sieht auch anhand des Graphen, dass zwischen $x = 5$ und $x = 45$ – in der Gewinnzone – genau eine Extremstelle liegt und zwar eine Maximalstelle. Die notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle $G'(x) = 0$ liefert die äquivalenten Gleichungen: $-6x^2+170x+300=0$ $\Leftrightarrow \quad x^2-\frac{85}{3}x-50=0$ $\Leftrightarrow \quad x=\frac{85}{6}\pm\sqrt{\frac{7225}{36}+\frac{1800}{36}}$ $\Leftrightarrow \quad x=\frac{85}{6}\pm\frac{95}{6}$ $\Leftrightarrow \quad x=30 \quad \vee \quad x=-\frac{5}{3}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Bei $x = 30$ liegt also das Gewinnmaximum. *Mit der vorhergehenden Argumentation, die man auch über den prinzipiellen Verlauf einer kubischen Funktion mit negativem Leitkoeffizienten präzisieren könnte, braucht nicht mehr über die zweite Ableitung argumentiert zu werden. Dass 30 ME die gewinnmaximale Produktionsmenge sind, kann auch durch den Nachweis bestätigt werden, dass x = 30 Nullstelle von G' ist.* Es gilt $G(30) = 28125$. Für die Herstellungsmenge von 30 Mengeneinheiten wird der Gewinn maximal. Er beträgt dann 28125 Geldeinheiten.	10	25	
e)	Die Kosten haben konstant um 625 Geldeinheiten zugenommen, entsprechend sinkt der Gewinn konstant um den gleichen Betrag. Die Gleichung der veränderten Gewinnfunktion lautet $G_{neu}(x) = -2x^3 + 85x^2 + 300x - 4000$ und unterscheidet sich von der ersten Gewinnfunktion also auch nur um die Konstante 625 und hat damit an der **gleichen Stelle** ihr Maximum. Die Aussage des Firmenmitglieds ist also richtig. Der zur Herstellungsmenge $x = 30$ gehörende optimale Gewinn sinkt allerdings auch um 625 Geldeinheiten.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

I.3 Wetterstation

In einer Wetterstation wird die Aufzeichnung eines Niederschlagmessgeräts vom Vortag (im Zeitraum von 0 Uhr bis 20 Uhr) ausgewertet. Das Messgerät besteht aus einem nach oben offenen zylinderförmigen Gefäß mit einer Grundfläche von 1 m^2. Die Wassermenge wird vom Gerät automatisch aufgezeichnet.

In der Anlage finden Sie ein Arbeitsblatt mit einer Aufzeichnungsskizze der Wetterstation. Der Graph zeigt die Wassermenge im Gefäß in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden.

a) Interpretieren Sie den Graphen im Hinblick auf folgende Fragen für den Zeitraum von 0 bis 20 Uhr:
Wann hat es geregnet?
In welchem Zeitraum hat es stark, in welchem Zeitraum schwach geregnet?

Die Niederschlagsmenge wird in Millimetern oder aber in Litern pro Quadratmeter angegeben.

b) Zeigen Sie, dass die aufgefangene Niederschlagsmenge von 1 Liter Wasser ein Ansteigen des Wasserstands im Gefäß von 1mm bedeutet.
(Dieses Messgerät ermöglicht also beide Angaben für die Niederschlagsmenge.)

Die Kurve in der Aufzeichnungsskizze der Wetterstation entspricht dem Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 80e^{0,1x} - x^2 - 40, \qquad \text{für } x \in [0;20].$$

c) Tragen Sie die fehlende Skala auf der y-Achse ein.
Berechnen Sie, wie viele Liter Wasser zwischen 0 und 20 Uhr in das Gefäß gefallen sind.
Zeichnen Sie die Gerade durch den Anfangs- und Endpunkt der Kurve und interpretieren Sie die Bedeutung dieser Geraden im Sachzusammenhang der Aufgabe.

d) Untersuchen Sie f auf Wendestellen im betrachteten Intervall.

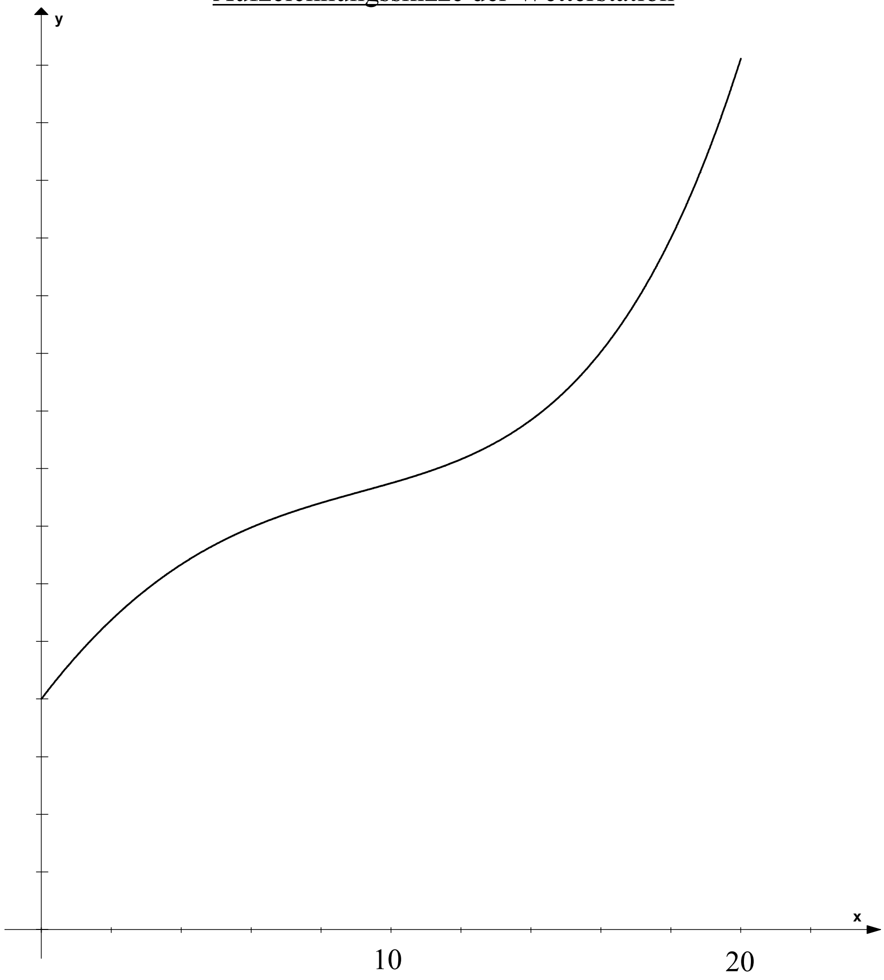
e) Interpretieren Sie die Bedeutung der 1. Ableitung und die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachkontext der Aufgabe.

f) Skizzieren Sie in das untere Koordinatensystem des Arbeitsblatts in der Anlage den prinzipiellen Verlauf des Graphen für die Aufzeichnung eines Niederschlagsmessgerätes, der folgende Wettersituation hinsichtlich der Niederschlagsmenge beschreibt:

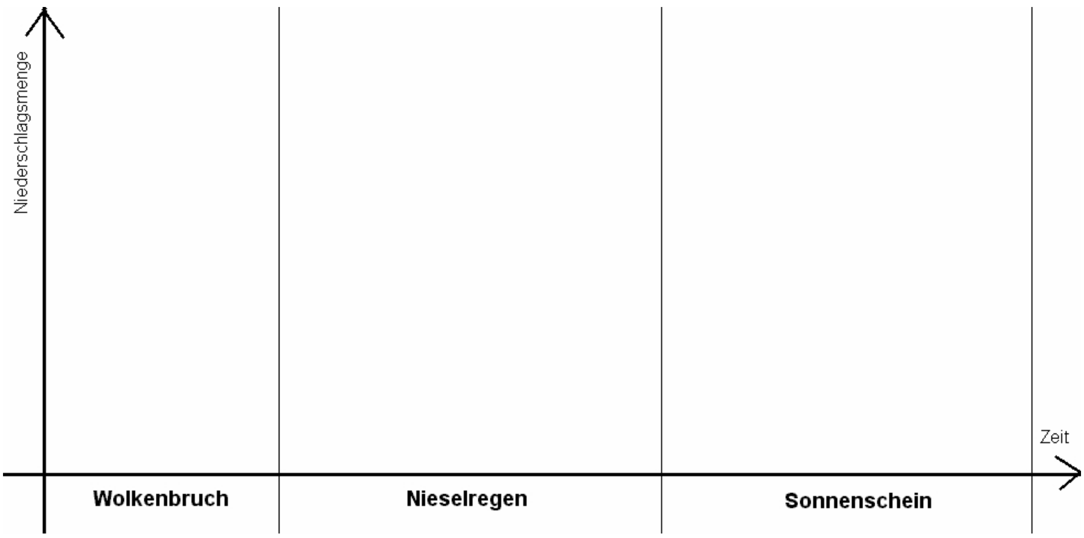
Wolkenbruch – Nieselregen – Sonnenschein bei wolkenlosem Himmel.
(Ablauf in der angegebenen Reihenfolge und ohne zeitliche Unterbrechungen)

Anlage zur Aufgabe „Wetterstation“:

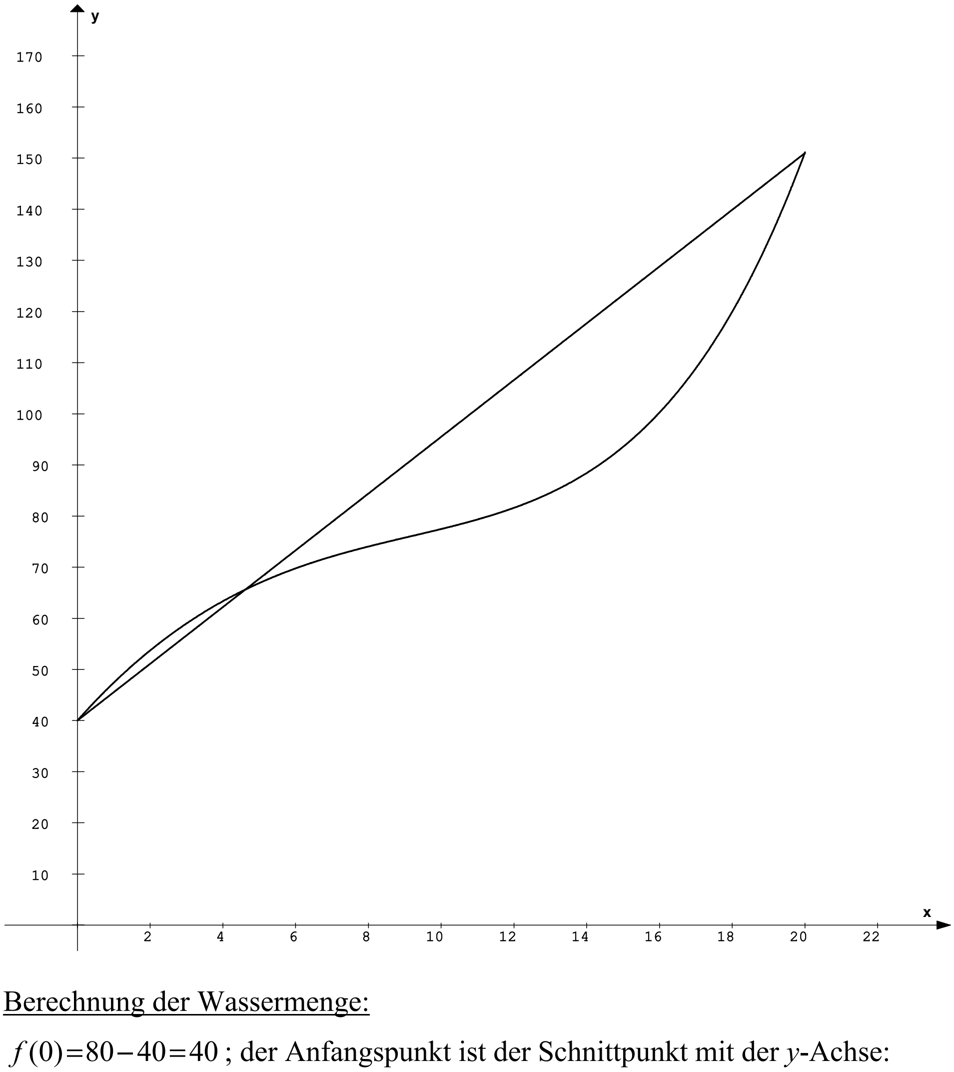
Aufzeichnungsskizze der Wetterstation



Zu Aufgabe f)



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Aufzeichnung zeigt, dass es während des gesamten Zeitraumes geregnet hat, weil der Graph streng monoton ansteigt (auf keinem Intervall konstant ist). Es hat ab dem frühen Nachmittag immer stärker geregnet, da der Graph im letzten Teil stark steigt. Wenig geregnet hat es von etwa 4 Uhr bis etwa 14 Uhr; auf diesem Intervall steigt der Graph schwach.	10	5	
b)	Ein Zylinder mit einer Grundfläche von 1 m^2 = 10 000 cm^2 und dem Volumen 1l = 1 000 cm^3 hat die Höhe h = $\frac{1000}{10000}$ cm = 0,1 cm = 1 mm.	5		
c)	 Berechnung der Wassermenge: $f(0)=80-40=40$; der Anfangspunkt ist der Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0\|40)$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$f(20) = 80e^2 - 400 - 40 \approx 151{,}124$; der Endpunkt der Kurve ist (20|151).

Insgesamt sind im Beobachtungszeitraum 151 – 40 = 111 Liter Regen gefallen.

Die Bedeutung der Geraden kann unterschiedlich interpretiert werden.
Mögliche Antworten:
Die Steigung der Geraden gibt die durchschnittliche Regenstärke während des gesamten Zeitraumes an.
Wäre die Gerade die vom Messgerät aufgezeichnete Kurve, hätte es im gesamten Beobachtungszeitraum gleichmäßig stark geregnet.</td><td>10</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td><u>Bestimmung der Wendestelle:</u>

Es gilt: $f'(x) = 8e^{0,1x} - 2x$

$f''(x) = 0{,}8e^{0,1x} - 2$

Für $f''(x)=0$ gilt:

$0{,}8e^{0,1x} = 2 \Leftrightarrow e^{0,1x} = 2{,}5 \Leftrightarrow 0{,}1x = \ln(2{,}5) \Leftrightarrow x = 10 \cdot \ln(2{,}5) \approx 9{,}163$

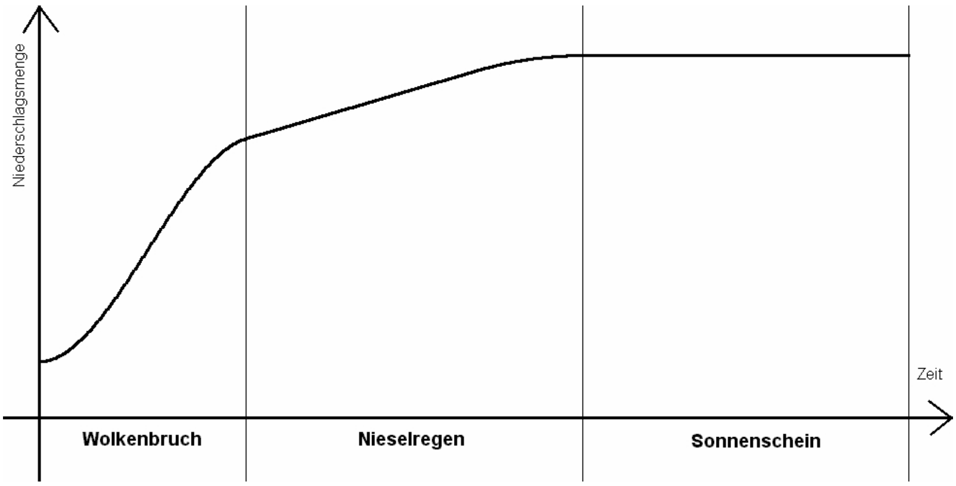
Nachweis der Wendestelle durch Argumentation mit der grafischen Darstellung bzw. über die 3. Ableitung: $f'''(x) = 0{,}08e^{0,1x}$.

Die Wendestelle liegt etwa bei $x = 9{,}2$.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die <u>erste Ableitung</u> gibt die Stärke des Regens zum jeweiligen Zeitpunkt an.

In der <u>Wendestelle</u> hat die erste Ableitung eine Extremstelle, im Fall der gegebenen Funktion eine Minimalstelle. Dies bedeutet, dass der Regen kurz nach 9 Uhr am schwächsten war.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>• Wolkenbruch: stark ansteigende Kurve
• Nieselregen: schwach ansteigende Kurve
• Sonnenschein: Kurve hat die Steigung 0.

(Grafische Darstellung nächste Seite)

Es wird nicht erwartet, dass keine Knicke im Graphen auftreten(Stetigkeit der Regenstärke) und dass der Graph in der Wolkenbruchphase einen Wendepunkt hat, aber der gesamte Graph sollte bis zum Sonnenschein streng monoton steigen, insgesamt in der Wolkenbruchphase steiler sein als in der Nieselregenphase, beim Nieselregen annähernd linear sein und natürlich in der Sonnenscheinphase konstant sein.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>Beispiel:

</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

LA/AG 1

II.1 Dreieck und Pyramide

Gegeben sind die drei Punkte $A(7 \mid 0 \mid 0)$, $B(4 \mid 4 \mid 0)$ und $S(3{,}5 \mid 0{,}5 \mid 10)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABS in das beigefügte Koordinatensystem ein (s. Anlage) und zeigen Sie, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.

b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und S aufgespannt wird.

(Eine mögliche Koordinatenform ist $16x_1 + 12x_2 + 5x_3 = 112$.)

c) Ermitteln Sie den Winkel, den das Dreieck ABS mit der x_1-x_2-Ebene einschließt.

d) Das Dreieck ABS sei eine Seitenfläche einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ in der x_1-x_2-Ebene und der Spitze S.

Zeigen Sie, dass die Punkte $C(0 \mid 1 \mid 0)$ und $D(3 \mid -3 \mid 0)$ mit A und B ein Quadrat ergeben.

Zeichnen Sie die vollständige Pyramide in das Koordinatensystem ein (s. Anlage).

Zeigen Sie, dass sich die Pyramidenspitze S senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide befindet.

e) Bestimmen Sie ein $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade

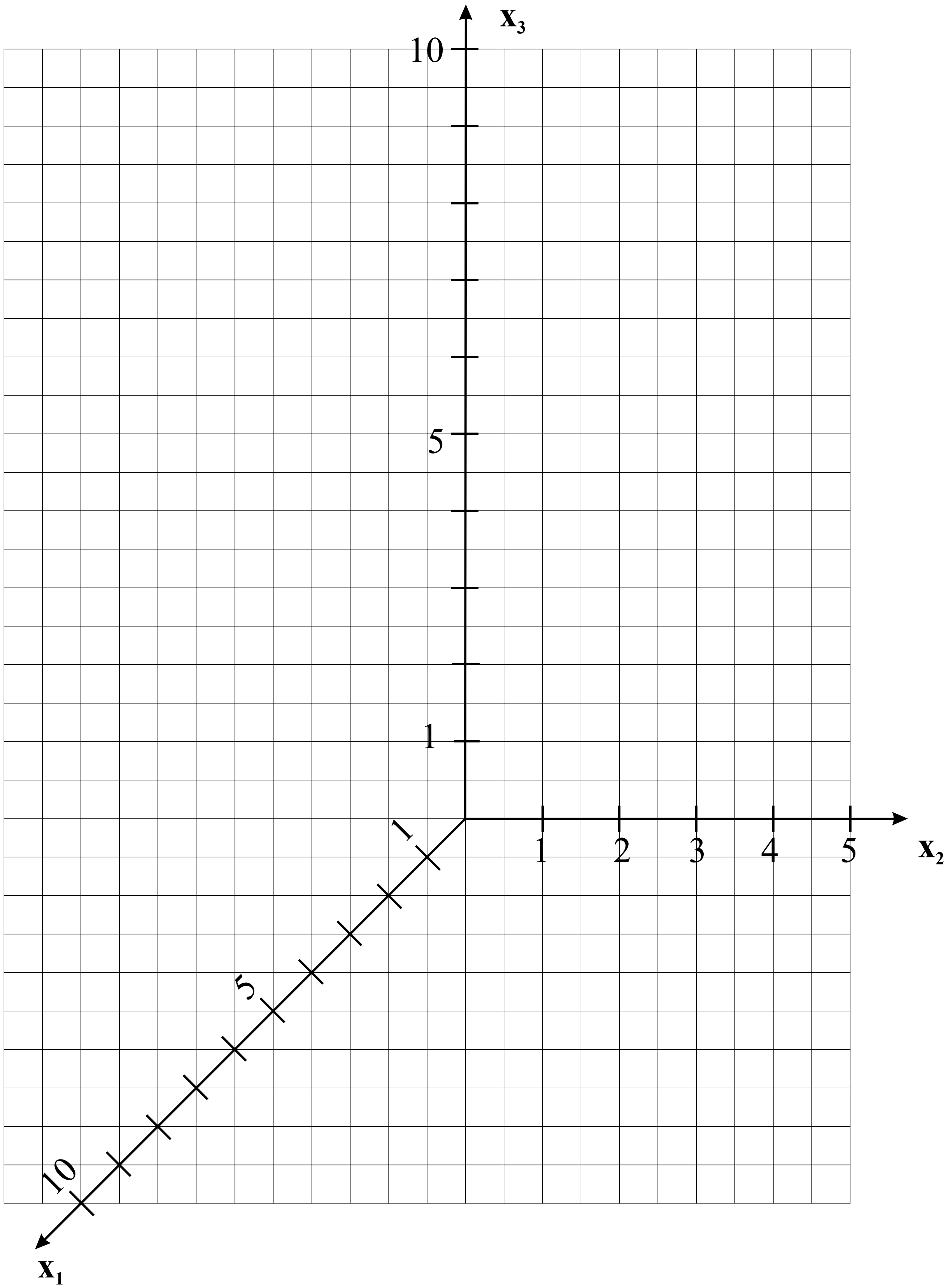
$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} k \\ -5 \\ -40 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R},$$

durch die Pyramidenspitze S verläuft.

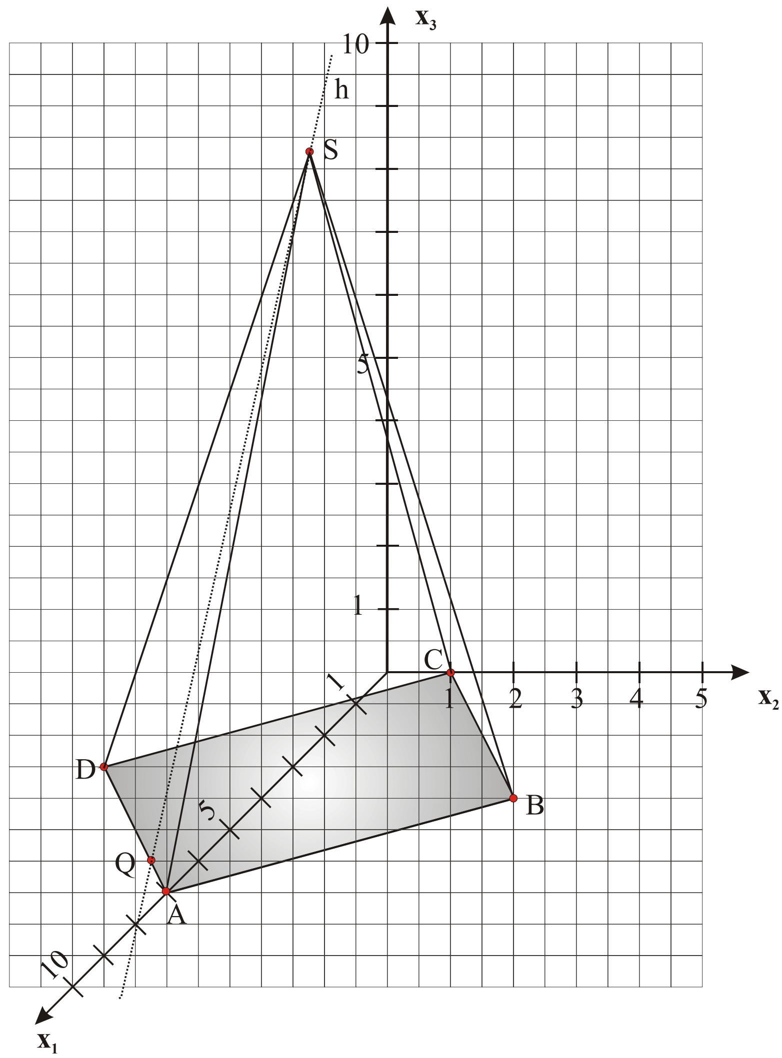
Zeichnen Sie h in das Koordinatensystem ein.

Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von h mit der x_1-x_2-Ebene auf einer Kante der Pyramidengrundfläche liegt.

Anlage zur Aufgabe „Dreieck und Pyramide“



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>


Mögliche Lösung: Es wird gezeigt, dass die Schenkel $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$ gleichlang sind:

$$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\vec{s} - \vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0{,}5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 10^2} = \sqrt{112{,}5} \approx 10{,}61 \text{ und}$$

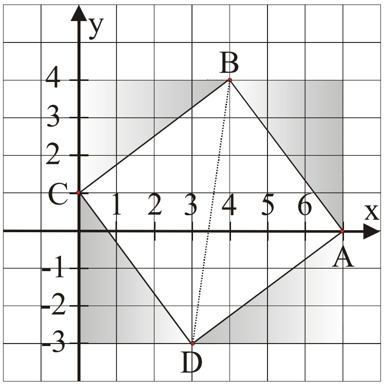
$$\left|\overrightarrow{BS}\right| = \left|\vec{s} - \vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0{,}5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (-3{,}5)^2 + 10^2} = \sqrt{112{,}5} \approx 10{,}61,$$

also ist das Dreieck *ABS* gleichschenklig. (*Berechnung der Wurzeln nicht nötig.)*

Alternative Lösung: z.B. Nachweis zweier gleicher Winkel im Dreieck.
</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Die Drei-Punkte-Form der Ebene E lautet z.B.: $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{s} - \vec{a})\,,\quad r, t \in \mathbb{R}$, $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0{,}5 \\ 10 \end{pmatrix}\,,\quad r, t \in \mathbb{R}$. Aus der Parameterdarstellung ergibt sich $\begin{array}{l} x_1 = 7 - 3r - 3{,}5t \\ x_2 = 4r + 0{,}5t \\ x_3 = 10t \;\Leftrightarrow\; t = 0{,}1x_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 4x_1 = 28 - 12r - 1{,}4x_3 \\ 3x_2 = \phantom{28 - {}} 12r + 0{,}15x_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad 4x_1 + 3x_2 = 28 - 1{,}25x_3$ und damit eine Koordinatenform von E zu: $4x_1 + 3x_2 + 1{,}25x_3 = 28$ bzw. $16x_1 + 12x_2 + 5x_3 = 112$.	5	15	
c)	Der Winkel, den das Dreieck ABS mit der x_1-x_2-Ebene ($E_{1,2}$) einschließt, entspricht dem Winkel, den die Normalen der Ebenen E und $E_{1,2}$ einschließen. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ aus Teil b). Ein Normalenvektor zur x_1-x_2-Ebene ist z.B. $\vec{n}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Über die Beziehung $\cos(\alpha) = \dfrac{\lvert \vec{n} \cdot \vec{n}_{1,2} \rvert}{\lvert\vec{n}\rvert \cdot \lvert\vec{n}_{1,2}\rvert}$ erhält man den gesuchten Winkel zu $\alpha = 75{,}96°$.		20	
d)	*ABCD* ergibt ein Quadrat, wenn gilt <u>1. Variante:</u> Alle Seiten sind gleichlang und jeweils zwei benachbarte Seiten stehen senkrecht aufeinander. Das trifft hier zu, denn $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert \overrightarrow{CB} \rvert = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ und $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DA}$, da $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ist. <u>2. Variante:</u> Alle Seiten sind gleichlang und die Diagonalen sind ebenfalls gleich lang: $\lvert \overrightarrow{AC} \rvert = \sqrt{50} = \lvert \overrightarrow{BD} \rvert$ <u>3. Variante:</u> *Die Punkte werden in ein x-y-Koordinatensystem eingezeichnet. Dann muss jedoch argumentiert werden. (Skizze und Argumentationsbeispiel siehe nächste Seite.)*			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>



Argumentation z.B.: Es sind alle Seiten Hypotenusen in kongruenten rechtwinkligen Dreiecken (also gleich lang) und sie stehen wegen der Steigungen jeweils senkrecht aufeinander.

<u>Mittelpunkt der Grundfläche:</u>

Der Mittelpunkt M der Grundfläche kann durch $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnet werden zu M(3,5 | 0,5 | 0). Die ersten beiden Koordinaten von M stimmen mit denen von S überein und die 3. Koordinate von S ist positiv, also liegt S senkrecht über M.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Die Gerade h verläuft durch den Punkt S, wenn S sich als ein Punkt der Geraden darstellen lässt.

$$\begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} k \\ -5 \\ -40 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = -0,1 \wedge k = 10\,.$$

Für k = 10 verläuft h durch S.

Berechnung des Schnittpunktes Q von h mit der x_1-x_2-Ebene:

$$\begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 6 \\ q_2 = -0,75 \\ r = 0,15 \end{cases}$$

Der Schnittpunkt ist Q(6 | –0,75 | 0) und liegt auf der Kante $\overline{AD}$ der Pyramide,

$$\overline{AD}: \quad \vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{d} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1],$$

da er für t = 0,25 die Kantendarstellung erfüllt.

</td><td></td><td>5</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

LA/AG 2

II.2 Lichtkunst

Das neueste Werk eines jungen Künstlers besteht aus einer Skulptur und zwei starren Stromschienen, die von einer Wand (x_1-x_3-Ebene) zur anderen Wand (x_2-x_3-Ebene) verlaufen. Auf diesen Schienen können Lampen bewegt werden, um die Skulptur zu beleuchten. Da die Schienen nur einen Durchmesser von 4cm haben, soll diese Ausdehnung in den Rechnungen vernachlässigt werden. Die Schienen werden also als Teile von Geraden angesehen. Die beiden Stromschienen sind an den Wänden befestigt und verbinden die Punkte $P_1(10 \mid 0 \mid 3)$ und $Q_1(0 \mid 6 \mid 6)$ bzw. $P_2(8 \mid 0 \mid 5)$ und $Q_2(0 \mid 8 \mid 4)$.

1 Längeneinheit entspricht 1 m.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2, die den Verlauf der Stromschienen beschreiben und zeichnen Sie die Stromschienen in das beigefügte Koordinatensystem ein.

b) Zeigen Sie, dass sichergestellt ist, dass die Stromschienen sich nicht berühren.

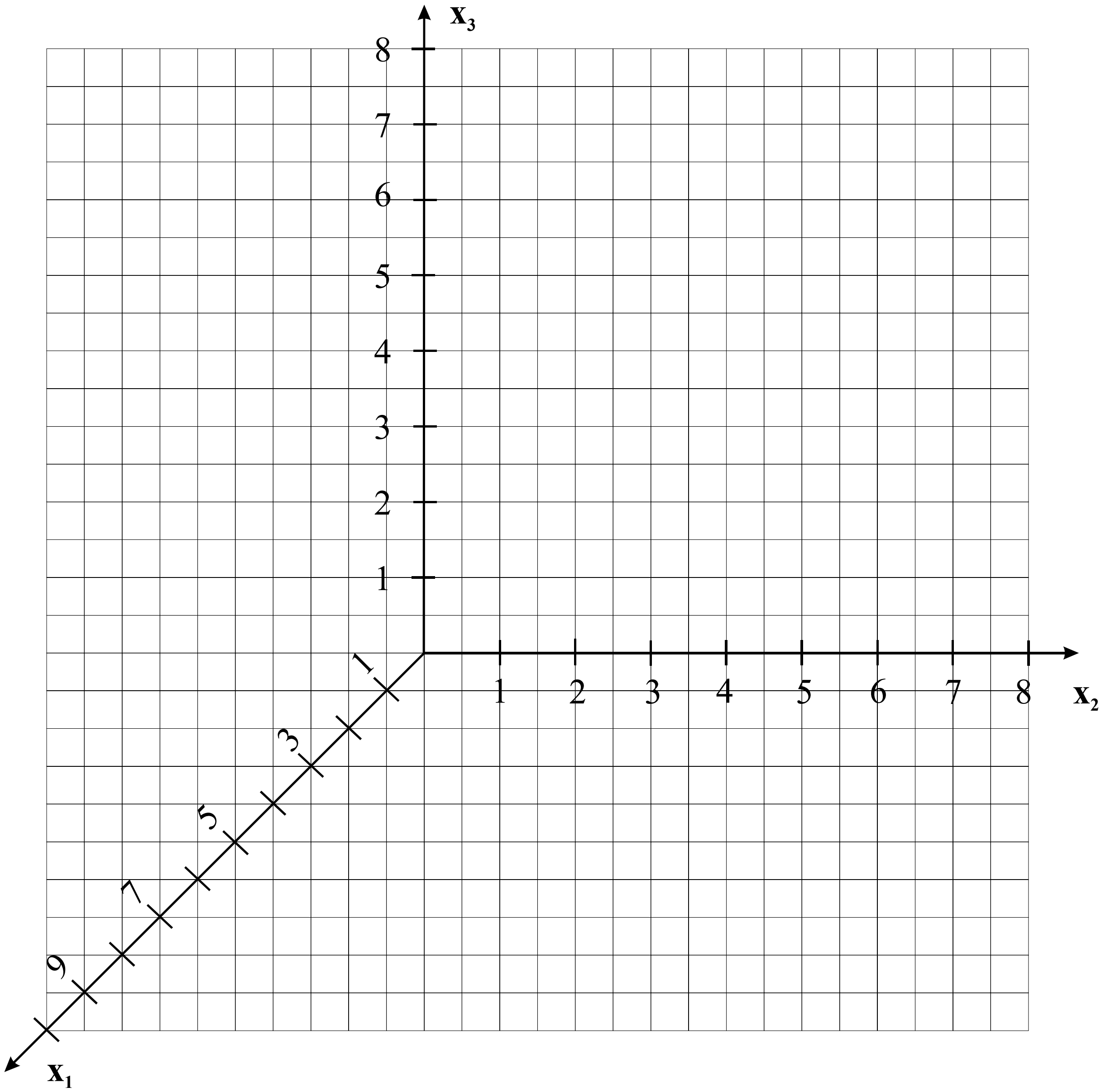
c) In den Punkten $L_1(5 \mid 3 \mid 4{,}5)$ und $L_2(2 \mid 6 \mid 4{,}25)$ befinden sich Lampen, die als punktförmige Lichtquellen betrachtet werden können.
Weisen Sie nach, dass L_1 auf g_1 liegt und L_2 auf g_2, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Lampen voneinander.
Zeichnen Sie die Lampenpunkte in das beigefügte Koordinatensystem ein.

d) Der höchste Punkt der Skulptur sei $S (2 \mid 4 \mid 2{,}25)$. Der Künstler möchte, dass der Schatten dieser Skulpturenspitze noch auf den Fußboden des Raumes (x_1-x_2-Ebene) und nicht auf eine Wand fällt.
Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung nur eine der beiden Lampen eingeschaltet werden darf.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt R auf dem Fußboden des Raumes und zeichnen Sie R und S in das beigefügte Koordinatensystem ein.

e) An die Stromschienen sollen neue Lampen angebracht werden, die von der Schiene 0,2 m senkrecht herunterhängen. Beurteilen Sie, ob dies möglich ist, ohne dass dadurch die freie Beweglichkeit der Lampen auf der gesamten oberen Schiene durch die untere Schiene eingeschränkt wird.

Hinweis: Skizzieren Sie die senkrechte Projektion der Schienen auf die x_1-x_2-Ebene und betrachten Sie den Höhenunterschied der Schienen über dem Schnittpunkt der Projektionsgeraden.

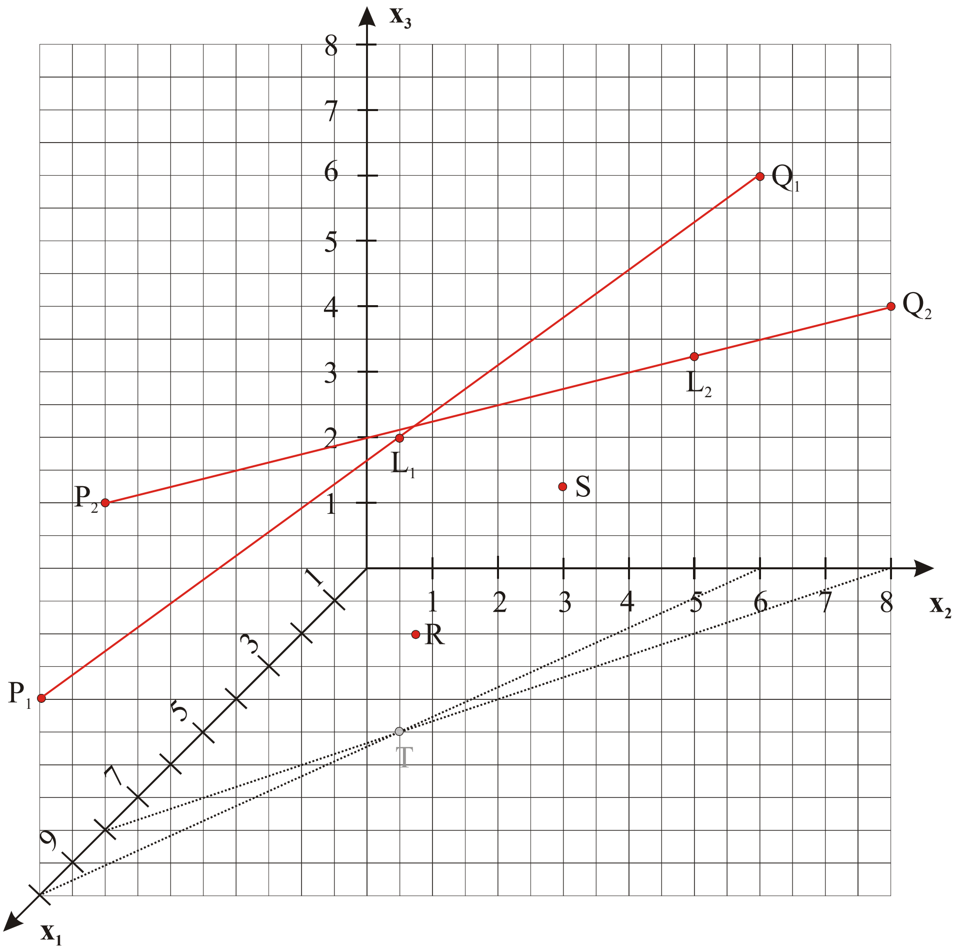
Anlage zur Aufgabe „Lichtkunst"



1 Längeneinheit entspricht 1 m.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>



Die Gleichungen der Geraden in Zwei-Punkte-Form lauten z.B.:

$$g_1:\ \vec{x} = \vec{p}_1 + s\cdot(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) = \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix},\quad s\in\mathbb{R}\ \text{und}$$

$$g_2:\ \vec{x} = \vec{p}_2 + t\cdot(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) = \begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Dabei sollen $s\in[0;1]$ *und* $t\in[0;1]$ *auch als richtig gelten.*

</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Gleichsetzen der Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 ergibt: $\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}8t-10s=-2\\-8t+6s=0\\t+3s=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=\frac{1}{2}\\t=\frac{3}{8}\\\frac{15}{8}\neq 2\end{cases}$ Die Geraden schneiden sich also nicht.		20	
c)	Der Ortsvektor von L_1 genügt der Parameterdarstellung von g_1 für $s=\frac{1}{2}$. Der Ortsvektor von L_2 genügt der Parameterdarstellung von g_2 für $t=\frac{3}{4}$. Der Abstand d der beiden Lampen voneinander beträgt: $d=\left\|\vec{l}_1-\vec{l}_2\right\|=\sqrt{3^2+(-3)^2+0,25^2}=\sqrt{18,0625}=4,25$, also 4,25m.	10	10	
d)	Berechnet werden die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden h_i von S und L_i, $i=1,2$, mit der x_1,x_2-Ebene. $h_1: \vec{x}=\vec{s}+r(\vec{l}_1-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2,25\end{pmatrix}\quad,\quad r\in\mathbb{R}$. $h_1\cap E_{1,2}:\quad\begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=-1\\r_2=5\\r=-1.\end{cases}$ Da die x_1-Koordinate des Schnittpunktes negativ ist, liegt er nicht auf dem Raumboden. Die Lampe L_1 darf somit nicht eingeschaltet werden. $h_2:\ \vec{x}=\vec{s}+r\cdot(\vec{l}_2-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}$. $h_2\cap E_{1,2}:\quad\begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=2\\r_2=1,75\\r=-1,125\end{cases}$. Die Lampe L_2 darf eingeschaltet werden, weil der Schattenpunkt $R(\ 2\ \|\ 1,75\ \|\ 0\ )$ auf dem Raumfußboden liegt, da seine ersten beiden Koordinaten größer als Null sind.		20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Die senkrechte Projektion der beiden Schienen auf die x_1-x_2-Ebene wird betrachtet, da die neuen Lampen in die (negative) x_3-Richtung hängen. Am Schnittpunkt T der Projektionsgeraden müssen die Höhen (x_3-Koordinaten) der Schienen ausgerechnet werden. Schnittpunkt der Projektionsgeraden $pg_1:\ x_1 = 10 - \frac{5}{3}x_2$ und $pg_2:\ x_1 = 8 - x_2$ ist $T(\,5\mid 3\mid 0)$. Die Bestimmung der Höhen H_1 und H_2 von g_1 und g_2 über diesem Bodenpunkt ergibt: $g_1:\ \begin{pmatrix}5\\3\\H_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \wedge H_1 = 4{,}5$ und $g_2:\ \begin{pmatrix}5\\3\\H_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow t = \frac{3}{8} \wedge H_2 = 4{,}625$, d.h. die Höhendifferenz über dem Punkt T beträgt nur $H_2 - H_1$ = 0,125 m, so dass eine Lampe, die 0,2 m tief von der Schiene 2 hängt, die Schiene 1 dort berühren würde. Es ist also nicht möglich, die neuen Lampen in der beschriebenen Weise anzubringen.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 1

III.1 Billigflüge

Wovon leben Billigfluganbieter?

Hamburg – New York hin und zurück 300 € !

Für diesen Flug kann eine Agentur z.B. 35 Plätze anbieten. Diese sind immer kurz nach dem Erscheinen im Internet ausgebucht und bezahlt.

Allerdings werden vor Abflug im Mittel ca. 20 % der gebuchten Reservierungen kurzfristig abgesagt (storniert). Verwenden Sie für Ihre Lösungen den exakten Wert 20%. Da es sich um ein Sonderangebot handelt, bekommen die Kunden bei Stornierung kein Geld zurück. Die Agentur aber kann all diese Plätze leicht als „Last-Minute-Angebote“ für 250 € zum zweiten Mal verkaufen.

Für die Agentur ist deshalb die Anzahl der Kunden von großem Interesse, die pro Flugtermin stornieren. Es soll dazu angenommen werden, dass pro Termin die mögliche Anzahl von Stornierungen binomialverteilt ist.

a) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass für den nächsten Flugtermin bei dieser Agentur
- genau 7 Plätze (durch Rechnung)
- höchstens 5 Plätze (Sie können die Tabelle in der Anlage verwenden)
- mindestens 6 Plätze

storniert werden.

b) Begründen Sie, dass der Erwartungswert für die Einnahmen der Agentur wegen der wieder verkaufbaren stornierten Plätze 12.250 € anstatt 10.500 € beträgt.

Die Stornierungen mit Doppeleinnahmen sind für die Agentur attraktiv, und sie lässt deshalb 40 Buchungen zu, also 5 Buchungen mehr als Plätze verfügbar sind. Diese 40 Angebote sind auch immer sofort ausgebucht und bezahlt**.** Wenn allerdings mehr als 35 gebuchte Kunden die Reise tatsächlich antreten wollen – im so genannten **Überbuchungsfall** – , muss die Agentur für die überzähligen Kunden dann sehr kurzfristig teure Ersatzplätze beschaffen. Insgesamt entstehen dem Reisebüro für jeden überzähligen Kunden zusätzliche Ausgaben von 400 €.

c) Bestimmen Sie, wie die Agentur einen Reisetermin mit 40 ursprünglich verkauften Plätzen abrechnet (Einnahmen minus zusätzliche Ausgaben),
- wenn nur 30 regulär gebuchte Personen zum Abreisetermin erschienen sind, also noch 5 „Last-Minute-Tickets“ verkauft wurden
- wenn alle 40 Bucher zum Abreisetermin erschienen sind.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- alle 40 regulären Kunden erscheinen zum Abreisetermin, keiner storniert (durch Rechnung)
- es kommt zum Überbuchungsfall (Sie können die Tabelle in der Anlage verwenden).

e) Die Agentur möchte überprüfen, ob sich das Geschäft mit den Überbuchungen eigentlich lohnt. Dazu berechnet sie den Erwartungswert der Abrechnung (Einnahmen minus zusätzliche Ausgaben) und erhält als Ergebnis 12.733 €.
Nennen Sie die Größen, die die Agentur dabei berücksichtigt hat und beschreiben Sie, wie diese Berechnung prinzipiell erfolgen kann. Interpretieren Sie dann dieses Ergebnis der Agentur.

Anlage zur Aufgabe „Billigflüge“:

Auszug aus einer Tabelle für die Binomialverteilung $B(n,p,k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$

n	k	p:	0,1	0,2	0,3
	0		0,02503	0,00041	0,00000
	1		0,09734	0,00355	0,00006
	2		0,18387	0,01509	0,00041
35	3		0,22473	0,04148	0,00195
	4		0,19976	0,08297	0,00669
	5		0,13762	0,12860	0,01778
	6		0,07645	0,16075	0,03810
	0		0,02253	0,00032	0,00000
	1		0,09011	0,00292	0,00004
	2		0,17522	0,01278	0,00031
36	3		0,22065	0,03620	0,00149
	4		0,20226	0,07467	0,00527
	5		0,14383	0,11947	0,01445
	6		0,08257	0,15432	0,03200
	0		0,02028	0,00026	0,00000
	1		0,08336	0,00240	0,00003
	2		0,16671	0,01081	0,00023
37	3		0,21611	0,03152	0,00114
	4		0,20410	0,06698	0,00414
	5		0,14967	0,11051	0,01170
	6		0,08870	0,14735	0,02674
	0		0,01825	0,00021	0,00000
	1		0,07705	0,00197	0,00002
	2		0,15837	0,00913	0,00017
38	3		0,21117	0,02738	0,00086
	4		0,20530	0,05989	0,00324
	5		0,15512	0,10181	0,00943
	6		0,09479	0,13998	0,02223
	0		0,01642	0,00017	0,00000
	1		0,07117	0,00162	0,00002
	2		0,15024	0,00769	0,00012
39	3		0,20589	0,02373	0,00065
	4		0,20589	0,05338	0,00252
	5		0,16013	0,09342	0,00757
	6		0,10083	0,13235	0,01839
	0		0,01478	0,00013	0,00000
	1		0,06569	0,00133	0,00001
	2		0,14233	0,00648	0,00009
40	3		0,20032	0,02052	0,00050
	4		0,20589	0,04745	0,00196
	5		0,16471	0,08541	0,00606
	6		0,10676	0,12456	0,01514

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es sei X die Anzahl der stornierten Flüge (für einen bestimmten Flugtermin). *X ist nach Annahme binomialverteilt mit $n = 35$ und $p = 0{,}2$* $P(X=7)=\binom{35}{7}\cdot 0{,}2^7\cdot 0{,}8^{28}\approx 16{,}6\,\%$ $P(X\le 5)=\sum_{k=0}^{5}\binom{35}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{(35-k)}\approx 27{,}21\%$ $P(X\ge 6)=1-P(X\le 5)\approx 72{,}79\,\%$	20		
b)	Die Agentur hat von den regulären Buchern feste Einnahmen in Höhe von $35\cdot 300\text{ €}=10.500\text{ €}$. Die Anzahl der Stornierungen hat den Erwartungswert der entsprechenden Binomialverteilung, also $35\cdot 0{,}2=7$. Für jede solche Person kann nach Voraussetzung ein Last-Minute-Angebot für 250 € verkauft werden. Also entstehen zusätzliche erwartete Einnahmen von 1750 €. *(Hier kann mit der Linearität des Erwartungswertes oder auch „naiv“ argumentiert werden).* Insgesamt kann die Agentur also 12.250 € pro Reisetermin erwarten.		20	
c)	Im ersten Falle hat die Agentur $40\cdot 300\text{ €}=12\,000\text{ €}$ Einnahmen von den regulären Buchern und $5\cdot 250\text{ €}=1.250\text{€}$ von den Last-Minute-Buchern, also insgesamt 13.250 € . Im zweiten Falle hat die Agentur 12.000 € Einnahmen von den regulären Buchern, keine Last-Minute-Einnahmen und zusätzliche Kosten wegen der 5 Überbuchungen von $5\cdot 400\text{€}=2.000\text{€}$, also eine Bilanz von nur 10.000 €.	10	10	
d)	Mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-0{,}2)^{40}=0{,}8^{40}\approx 0{,}013\%$ kommen alle. Es kommt zu Überbuchungen, wenn entweder 0 oder 1 ... oder 4 Kunden stornieren ($X<5$). Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnimmt man der gegebenen Tabelle für die Binomialverteilung für $n = 40$. Aufsummierung ergibt: $P\approx 0{,}07591\approx 7{,}6\%$ Mit 7,6 %-iger Wahrscheinlichkeit kommt es zum Überbuchungsfall.		20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Es sind folgende Beträge zu berücksichtigen: - Die festen Einnahmen von 40 Buchern zu je 300 € - In den Fällen ohne Überbuchung ($X \geq 5$) zusätzliche Einnahmen von $X - 5$ Last-Minute-Kunden zu je 250 €. Da diese Fälle nicht sicher, sondern mit den Wahrscheinlichkeiten der B(40 ; 0,2 ; X)-Binomialverteilung auftreten, ist hier der entsprechende Erwartungswert auszurechnen. - Im Überbuchungsfall ($X < 5$) zusätzliche Ausgaben von $5 - X$ überzähligen Kunden zu je 400 €. Da auch diese Fälle nicht sicher, sondern mit den Wahrscheinlichkeiten der B(40 ; 0,2 ; X)-Binomialverteilung auftreten, ist auch hier der entsprechende Erwartungswert auszurechnen. Gegenüber dem Wert von b) ist der Wert 12.733 € eine Steigerung der Bilanzerwartung von knapp 500 €, die Überbuchungsmethode lohnt sich also aus der Sicht der Agentur. *Für Korrektoren nachfolgend die gesamte Rechnung zur Information, die zu den erwarteten Einnahmen von 12.733 € führt:* *Einnahmen von* $40 \cdot 300€ = 12.000€$ *stehen fest.* *Bei X Stornierungen können X – 5 Last-Minute-Flüge verkauft werden. Da X binomialverteilt ist, hätten diese Verkaufseinnahmen über alle k einen Erwartungswert von* $250 \cdot (40 \cdot 0{,}2 - 5)€ = 750€$*), allerdings schlagen in den Überbuchungsfällen (X < 5, also k = 0, ..., 4) ja keine „negativen Last-Minute-Einnahmen" zu Buche, diese müssen also gegengerechnet werden mit* $250€ \cdot \sum_{k=0}^{4}(5-k)\cdot\binom{40}{k}\cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{40-k} \approx 28{,}49€$. *Andererseits entstehen bei X Stornierungen in den Überbuchungsfällen ($X < 5$ also k = 0, ..., 4) Zusatzkosten in Höhe von* $(5-k)\cdot 400€$. *Da X binomialverteilt ist, beträgt der Erwartungswert der Zusatzkosten:* $E(Z) = 400€ \cdot \sum_{k=0}^{4}(5-k)\cdot\binom{40}{k}\cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{55-k} \approx 45{,}57€$ *Die letzten beiden Terme können auch zusammengefasst werden zu Kosten von* $150€ \cdot \sum_{k=0}^{4}(5-k)\cdot\binom{40}{k}\cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{55-k} \approx 17{,}08€$ *Also gilt für den Erwartungswert der Bilanz:* E ≈ 12.000 € + 750 € – 17,08 € = 12.732,92 €			15
		30	50	20

STOCHASTIK 2

III.2 Thermoschalter

Der Konzern „Thermosicherheit“ stellt Thermoschalter in Massenproduktion her. Jeder Thermoschalter ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% fehlerhaft. Der Fehler besteht darin, dass der Thermoschalter erst bei einer zu hohen Temperatur auslöst, also die Stromzufuhr zu spät unterbricht.
Es wird eine Stichprobe von 50 Schaltern aus der laufenden Produktion entnommen.
Dabei soll angenommen werden, dass die Anzahl der fehlerhaften Schalter in der Stichprobe binomialverteilt ist ($n = 50$, $p = 0{,}1$).

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl fehlerhafter Schalter in der Stichprobe.
Berechnen Sie (ohne Tafelwerk) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 50 Schaltern genau 5 fehlerhaft sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 50 Schaltern höchstens 5 fehlerhaft sind.

b) Nennen Sie Gründe, warum man annehmen kann, dass die Anzahl der fehlerhaften Schalter in der Stichprobe binomialverteilt ist ($n = 50$, $p = 0{,}1$).

Die Firma „Maschinenfix“ ist Kunde des Konzerns „Thermosicherheit“. Sie stellt Maschinen her, die sie vor Überhitzung schützen möchte. In jede dieser Maschinen baut sie 2 Thermoschalter in Reihe ein, d.h. die Stromzufuhr wird genau dann unterbrochen, wenn einer der Schalter oder auch beide zugleich auslösen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer neu gebauten Maschine der Firma „Maschinenfix“ im Falle einer Überhitzung die Stromzufuhr tatsächlich unterbrochen wird.

d) Bei jeder neu gebauten Maschine ist die Thermosicherung ja mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% defekt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei hundert neu gebauten Maschinen in mindestens einer Maschine die Thermosicherung defekt ist.

e) Der Konzern „Thermosicherheit“ möchte die Qualität der Schalterproduktion erhöhen. Dazu wird ein Team beauftragt, entsprechende Maßnahmen zu ergreifen. Falls der Anteil der fehlerhaften Schalter deutlich gesenkt werden kann, soll das Team eine großzügige Prämie erhalten. Zur Überprüfung der Qualitätsverbesserung wird eine Stichprobe vom Umfang 50 der neuen Produktion entnommen. Wenn sich unter diesen 50 Schaltern höchstens 3 fehlerhafte befinden, soll das Team die Prämie erhalten.

- Nehmen Sie an, dass überhaupt keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Team die Prämie erhält.
- Nehmen Sie andererseits an, dass eine große Qualitätsverbesserung eingetreten ist und der Anteil der fehlerhaften Schalter auf 5 % gesunken ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dem Team die Prämie verweigert wird.

Die Firma „Maschinenfix“ produziert die Maschinen mit den eingebauten Thermoschaltern in großer Stückzahl. Überhitzungen ihrer Maschinen treten leider häufiger auf. Die Thermoschalter lassen sich auch nicht vorher testen. Überhitzungen der Maschinen, die nicht durch die Thermoschalter verhindert werden, führen zu Maschinenschäden und sind sehr teuer.

f) Begründen Sie, dass auch eine bessere Produktionsqualität des Konzerns „Thermosicherheit“ mit nur 5% fehlerhaften Schaltern die Probleme der Firma „Maschinenfix“ nicht lösen kann.
Geben Sie begründet eine bessere Möglichkeit an, den Schutz vor einem Maschinenschaden durch Überhitzung zu erhöhen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Den Erwartungswert bestimmt man als $n \cdot p = 5$. Die Wahrscheinlichkeit für genau 5 fehlerhafte Schalter beträgt $P = \binom{50}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^{45} \approx 18{,}49\%$. *Die Rechnung kann über den entsprechenden Term der Binomialverteilung mit dem Taschenrechner erfolgen.* Aus dem Tafelwerk liest man ab, dass die Wahrscheinlichkeit für höchstens 5 fehlerhafte Schalter ungefähr 61,61 % beträgt.	20	5	
b)	Da es sich um eine Massenproduktion geht, kann man so rechnen, als ob es sich um ein Ziehen mit Zurücklegen handeln würde. Das Auftreten von Fehlern im Produktionsprozess wird wegen regelmäßiger Wartung als zufällig angenommen. Dadurch ist die Annahme der Unabhängigkeit im Produktionsprozess gerechtfertigt.			10
c)	Das Gegenereignis zu dem betrachteten Ereignis ist, dass beide Schalter versagen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $0{,}1^2 = 0{,}01$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stromzufuhr unterbrochen wird, 99 %.	5	10	
d)	Die Wahrscheinlichkeit, dass es bei 100 Maschinen zu mindestens einer Überhitzung kommt, berechnet man durch $1 - 0{,}99^{100} \approx 1 - 0{,}3660 = 63{,}4\%$.		15	
e)	Es muss mit $p = 0{,}1$ gerechnet werden und man liest wie in Teil b) die Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 fehlerhafte Schalter ab: 0,2503. Also erhält das Team die Prämie mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 25% zu Unrecht. Für die zweite Frage muss mit $p = 0{,}05$ gerechnet werden und man liest wie in Teil b) die Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 fehlerhafte Schalter ab: 0,7604. Wenn es mehr fehlerhafte Schalter gibt, so erhält das Team die Prämie zu Unrecht nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist also $1 - 0{,}7604 \approx 24\%$.		20	
f)	Wenn man z.B. mit 100 Maschinen wie in Teil d) rechnet, erhält man $1 - (1 - 0{,}05^2)^{100} = 1 - 0{,}9975^{100} = 1 - 0{,}778 \approx 22\%$. Dieser Wert ist ziemlich hoch und kann von der Firma „Maschinenfix“ unter den genannten Bedingungen nicht akzeptiert werden. Der Schutz wird deutlich erhöht, wenn die Firma in ihre Maschinen 3 oder sogar 4 Schalter in Reihe einbaut. ($1 - 0{,}1^3 = 0{,}999$; $1 - 0{,}05^3 = 0{,}999875$;...). Ein Maschinenschaden würde dann im Mittel sehr viel seltener auftreten.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25