Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2005/2006

Grundkurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, Technische Gymnasien

13. Februar 2006, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind <u>nicht</u> für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen <u>nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer</u>, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **270 Minuten** einschließlich Lesezeit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an B 3-1 faxen!

Behörde für Bildung und Sport
B 3-1

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Grundkurs **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
I.3	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: ________________

Unterschrift: ____________________________________

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sieben** Aufgaben – **I.1, I.2, I.3** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 285	≥ 95 %	15
≥ 270	≥ 90 %	14
≥ 255	≥ 85 %	13
≥ 240	≥ 80 %	12
≥ 225	≥ 75 %	11
≥ 210	≥ 70 %	10
≥ 195	≥ 65 %	9
≥ 180	≥ 60 %	8

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 165	≥ 55 %	7
≥ 150	≥ 50 %	6
≥ 135	≥ 45 %	5
≥ 120	≥ 40 %	4
≥ 99	≥ 33 %	3
≥ 78	≥ 26 %	2
≥ 57	≥ 19 %	1
< 57	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2006

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre			**BeBo EKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Abiturprüfung 2006

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

BeBo ZKo M

Schulchiffre			
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								

Bewertungstext

Notenpunkte →	

ANALYSIS 1

I.1 Kaffeerösterei

Die Gesamtkosten einer Kaffeerösterei hängen von der produzierten Kaffeemenge x ab und werden durch die Gesamtkostenfunktion K beschrieben.
Die Entwicklung der Gesamtkosten $K(x)$ ist im Anhang grafisch dargestellt.

a) Nehmen Sie an, dass die Kostenfunktion K eine ganzrationale Funktion ist. Geben Sie anhand der Grafik an, warum die Kostenfunktion K mindestens vom Grad 3 sein muss.

Die Funktion K mit $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}55x^2 + 11{,}58x + 25$ beschreibt die dargestellte Kostenentwicklung in guter Näherung.

b) Berechnen Sie den Wendepunkt von K.
Begründen Sie, warum in der Nähe der Wendestelle eine Produktionserhöhung sinnvoll ist.

Der Erlös ergibt sich aus dem Produkt „Menge mal Preis" und wird mit E bezeichnet. Der Gewinn G wird in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x betrachtet und lässt sich als Differenz von Erlös und Kosten berechnen, also $G(x) = E(x) – K(x)$.

c) Das Unternehmen legt einen Preis von 10 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME) fest.

Geben Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden Erlösfunktion E an.

Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion G gilt:
$G(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}55x^2 - 1{,}58x - 25$.

Untersuchen Sie, bei welcher Produktionsmenge maximaler Gewinn erwirtschaftet wird.

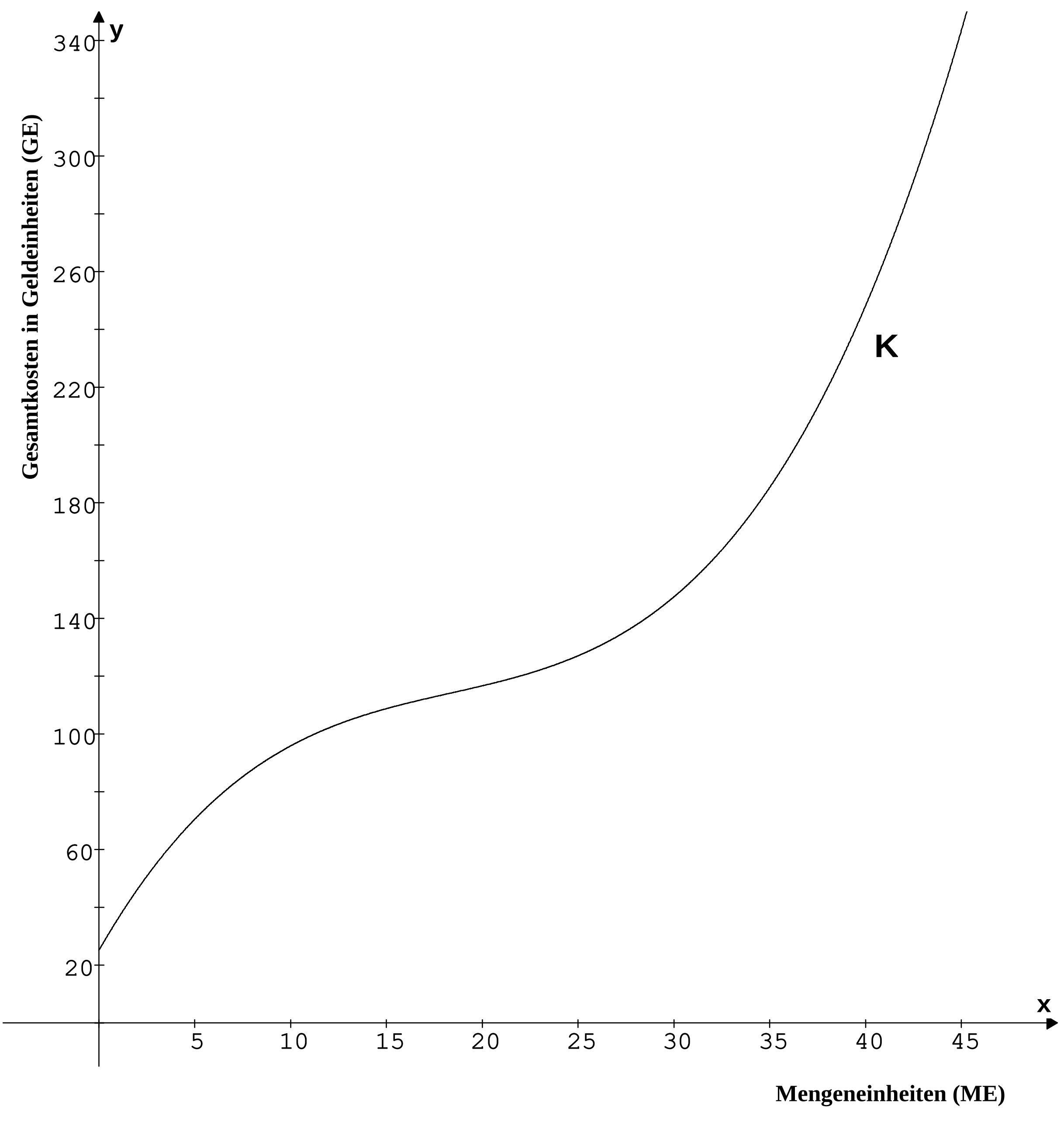
d) Betrachtet wird nun die so genannte Stückkostenfunktion S (Gesamtkosten pro Mengeneinheit) mit $S(x) = \dfrac{K(x)}{x}$. Begründen Sie, dass minimale Stückkosten in guter Näherung bei einer Absatzmenge von 29 ME erreicht werden.

e) Die Geschäftsführung will den Preis senken und damit ein „Schnupperangebot" auf den Markt bringen.

Weisen Sie nach, dass bei einem Preis von z. B. 4 GE der beim Verkauf erzielte Erlös stets kleiner als die zugehörigen Gesamtkosten ist und damit nur noch mit Verlust produziert werden kann.

Bis zu welchem Mindestwert kann der Preis gesenkt werden, ohne dass mit Verlust produziert werden muss? Bestimmen Sie – z.B. mit Hilfe der Grafik – diesen minimalen Preis und die zugehörige Produktionsmenge.

Anlage zur Aufgabe „Kaffeerösterei“:



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Der Graph der Kostenfunktion hat einen Wendepunkt; dies ist weder bei einer linearen noch bei einer quadratischen Funktion der Fall.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$K'(x) = 0,03x^2 - 1,1x + 11,58$,
$K''(x) = 0,06x - 1,1$.
Die notwendige Bedingung $K''(x) = 0$ ergibt:
$0,06x - 1,1 = 0$
$0,06x = 1,1$
$x = 18\frac{1}{3} \approx 18,33$.

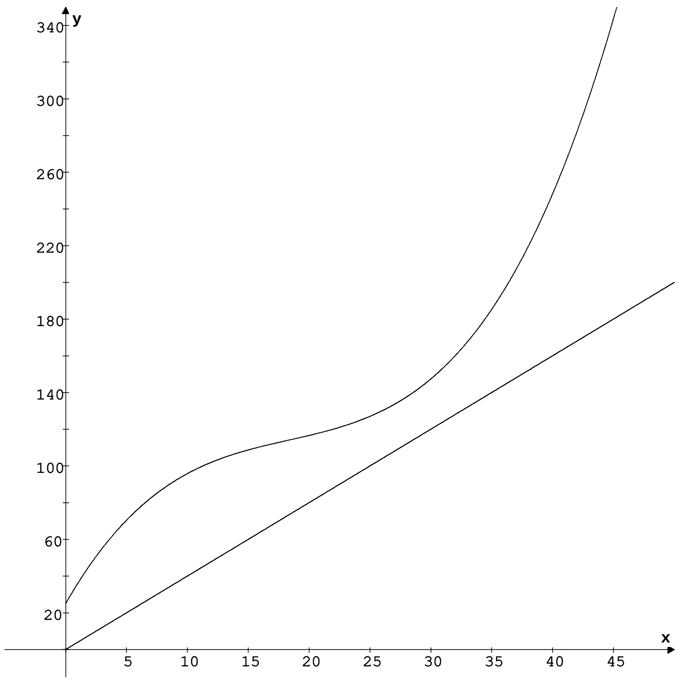
Da $K'''(x) = 0,06$ konstant ungleich 0 ist, gilt: K hat an der Stelle $x = 18\frac{1}{3}$ eine Wendestelle. Der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(18,\overline{3} \mid \approx 114,06)$.

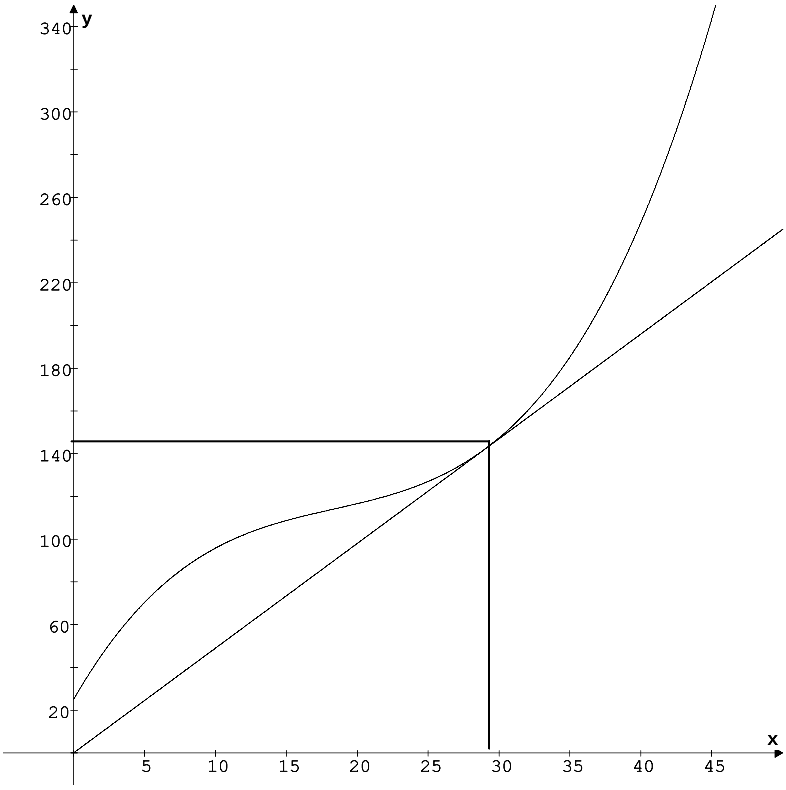
Eine Produktionserhöhung in der Nähe der Wendestelle ist sinnvoll, da die Kostenzunahme in diesem Bereich relativ klein ist.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$E(x) = 10x$.
$G(x) = E(x) - K(x)$
$= 10x - \left(0,01x^3 - 0,55x^2 + 11,58x + 25\right)$
$= -0,01x^3 + 0,55x^2 - 1,58x - 25$.

Die Berechnung des Gewinnmaximums erfolgt mithilfe der Nullstellen der ersten Ableitung:
$G'\left(x\right) = -0,03x^2 + 1,1x - 1,58$.

Für $G'\left(x\right) = 0$ ergibt sich
$-0,03x^2 + 1,1x - 1,58 = 0$
$x^2 - \frac{110}{3}x + \frac{158}{3} = 0$
$x_{1,2} = \frac{55}{3} \pm \sqrt{\frac{3025 - 474}{9}}$
$x_1 = \frac{55}{3} + \frac{\sqrt{2551}}{3} \approx 35,17$
$x_2 = \frac{55}{3} - \frac{\sqrt{2551}}{3} \approx 1,50$

Aus $G''(x) = -0,06x + 1,1$ folgt: $G(x_1) \approx -1,01$ und $G(x_2) \approx 1,01$. Also ist bei einer Produktion von ca. 35,17 ME der Gewinn beim Verkauf maximal.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Hinweis: Die Größe einer Mengeneinheit ist aus der Aufgabenstellung nicht direkt ersichtlich. Deshalb können Schülerinnen und Schüler die entsprechenden Mengeneinheiten durchaus gerundet angeben.	5	20	
d)	$S(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{0,01x^3-0,55x^2+11,58x+25}{x}=0,01x^2-0,55x+11,58+\frac{25}{x}$, $S'(x)=0,02x-0,55-\frac{25}{x^2}$. Einsetzen von x = 29 in die Gleichung der Ableitungsfunktion zeigt, dass der Funktionswert nahezu Null ist: $S'(29)=0,02\cdot 29-0,55-\frac{25}{841}\approx 0,00027$. Berechnet man entsprechende Werte für x = 30 oder x = 28, so stellt man fest, dass $S'(30)\approx 0,02$ und $S'(28)\approx -0,02$. Bei $x\approx 29$ liegt also ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung vor. Insgesamt kann man damit x = 29 als Näherung für die Minimalstelle ansehen.		20	
e)	Nachweis mithilfe des Stückkostenminimums aus Aufgabenteil (d): Das Stückkostenminimum liegt bei $x\approx$ 29 und beträgt etwa $S(x)=\frac{K(29)}{29}=\frac{0,01\cdot 29^3-0,55\cdot 29^2+11,58\cdot 29+25}{29}\approx 4,9$ Der Preis muss also mindestens 4,9 GE pro ME betragen, wenn er die minimalen Stückkosten decken und eine verlustfreie Produktion garantieren soll. Ein Preis von 4 GE reicht damit nicht aus. Nachweis mithilfe der Grafik:  			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Bei einem Preis von 4 GE hat die Erlösfunktion die Gleichung $E_2(x) = 4x$. Die zugehörige Ursprungsgerade verläuft unterhalb der Kostenkurve und schneidet diese nicht. Also sind die Kosten immer größer als der Erlös; es wird daher nur mit Verlust produziert. <u>Bestimmung des Mindestpreises über das Stückkostenminimum:</u> siehe oben. <u>Grafische Lösung:</u> Zur Bestimmung des Mindestpreises, der noch eine verlustfreie Produktion garantiert, muss man jene Ursprungsgerade suchen, die die Kostenkurve als Tangente berührt.  Die *x*-Koordinate des Berührpunktes gibt Auskunft über die Produktionsmenge, die Steigung der Geraden gibt Auskunft über den Preis. Durch näherungsweises Ablesen erhält man etwa 29 ME für die Produktionsmenge und Gesamtkosten in Höhe von ca. 145 GE. Berechnung des Preises: $p(29) = \frac{E(29)}{29} = \frac{145}{29} = 5$. Der Preis kann bis auf ca. 5 GE pro ME gesenkt werden, so dass noch verlustfrei produziert werden kann.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Beschränktes Wachstum

Gegeben ist die reelle Funktion *f* mit $f(x) = 2 - e^{-x}$.

a) Berechnen Sie die Stelle, an der die Funktion den Wert 1,5 annimmt.
Bestimmen Sie die Nullstelle von *f*.

b) Geben Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ an.
Bestimmen Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$.
Untersuchen Sie, ob *f* eine Wendestelle hat.

c) Begründen Sie, dass diese Funktion ständig steigt, den Wert $y = 2$ aber nicht übersteigt.

d) Skizzieren Sie den Graphen von *f* für $-1 \le x \le 5$.

e) Bestimmen Sie das Integral $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f(x)dx$.

Funktionen *f* mit $f(x) = a - b \cdot e^{-c \cdot x}$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ beschreiben ein stetiges, aber begrenztes Wachstum. Im bisher betrachteten Fall ist $a = 2$, $b = 1$ und $c = 1$.

Ein Beispiel für beschränktes Wachstum ist die Temperaturentwicklung bei der Erwärmung einer Flüssigkeit. Nehmen Sie an, eine Flüssigkeit befindet sich im Kühlschrank. Wird die Flüssigkeit aus dem Kühlschrank genommen, so erwärmt sie sich allmählich auf die Raumtemperatur. Diese Erwärmung lässt sich durch einen Funktionsterm vom obigen Typ beschreiben.

f) Eine spezielle Flüssigkeit hat im Kühlschrank die Temperatur 6°C. Nach der Herausnahme erwärmt sie sich auf die Raumtemperatur von 22°C.
Der Zeitpunkt des Herausnehmens sei $x = 0$ Minuten. 10 Minuten nach dem Herausnehmen hat die Flüssigkeit eine Temperatur von 18,4°C.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion f_E, die diese Erwärmung beschreibt. *Beim Funktionsterm können Sie auf die Einheiten verzichten.*

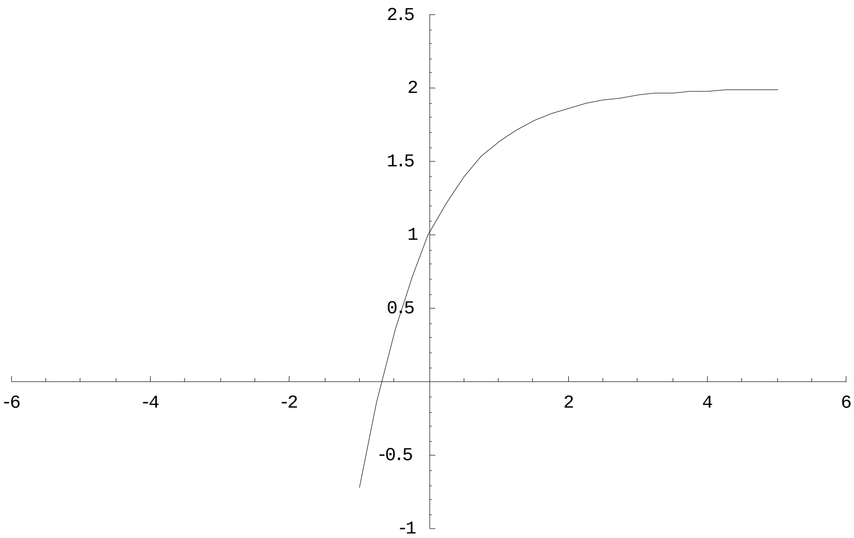
g) Interpretieren Sie f_E' und das Integral $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f_E'(x)dx$ im Sachkontext der Aufgabe.

Bestimmen Sie die Integrale $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} f_E'(x)dx$ und $\frac{1}{10} \cdot \int_{10}^{20} f_E'(x)dx$.

Hinweis:
Falls Sie im Aufgabenteil f) keine Lösung gefunden haben, können Sie mit der folgenden – nicht mit der Lösung übereinstimmenden – Funktion f_F mit $f_F(x) = 20 - 10 \cdot e^{-0{,}07 \cdot x}$ *weiterrechnen.*

Das zweite Integral hat einen kleineren Wert als das erste. Begründen Sie dies anhand des prinzipiellen Funktionsverlaufs und im Sachkontext.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• Stelle, an der die Funktion den Wert 1,5 annimmt: $2-e^{-x}=1{,}5$ $e^{-x}=0{,}5$ $-x=\ln(0{,}5)$ $x\approx 0{,}69315.$ • Nullstelle von *f*: $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}=2 \;\Leftrightarrow\; x=-\ln(2)\approx -0{,}69315$.	5	10	
b)	Funktionswert an der Stelle $x = 0$: Einsetzen liefert: $f(0)=2-e^{0}=2-1=1$. Die Ableitungsfunktion hat die Gleichung $f'(x)=e^{-x}$. Gesucht ist $f\,'(0)$; Einsetzen liefert $f\,'(0)=1$. Da $f''(x)=-e^{-x}$, gilt für alle *x*: $f''(x)\neq 0$. Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle kann von keinem *x* erfüllt werden, also hat *f* keine Wendestelle.	10	10	
c)	Die Funktion *f* steigt ständig, da $f'(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Der Wert $y = 2$ wird nicht überschritten, da • im Funktionsterm von 2 der Term e^{-x} abgezogen wird <u>und</u> • dieser Term für alle *x* positiv ist, so dass die Differenz – und damit der Funktionswert – für alle *x* kleiner als 2 ist. Da mit wachsendem *x* der Term e^{-x} immer kleiner wird und gegen Null geht, geht der Funktionswert gegen $y = 2$.		10	
d)		10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	$\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} 2-e^{-x}dx$ $= \frac{1}{10}\cdot\left[2x+e^{-x}\right]_0^{10}$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(2\cdot 10+e^{-10}-\left(2\cdot 0+e^{-0}\right)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(19+e^{-10}\right)\approx 1{,}9$.		10	
f)	$f_E(x)=a-b\cdot e^{-c\cdot x}\quad a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$. Die obere, nicht überschreitbare Grenze ist die Raumtemperatur von 22°C. Also ist a = 22. Die Temperatur beim Herausnehmen (x = 0) ist 6°C. Aus $f(0)=6$ folgt: $22-b\cdot e^{-c\cdot 0}=22-b=6$, also b = 16. Aus $f(10)=18{,}4$ folgt $22-16\cdot e^{-10c}=18{,}4$ $16\cdot e^{-10c}=3{,}6$ $e^{-10c}=\frac{9}{40}$. Durch Logarithmieren erhält man $-10c=\ln\left(\frac{9}{40}\right)$ bzw. $c=-\frac{1}{10}\cdot\ln\left(\frac{9}{40}\right)=0{,}1491654...\approx 0{,}15$. Der Funktionsterm lautet demnach $f_E(x)=22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot x}$.			10
g)	$f_E{}'$ gibt die momentane Änderungsrate der Temperatur an, $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_E{}'(x)dx$ gibt die durchschnittliche Temperaturänderung pro Minute während der ersten 10 Minuten des Erwärmvorganges an. $\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_E{}'(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\left(f_E(10)-f_E(0)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot 10}-\left(22-16\cdot e^{-0{,}15\cdot 0}\right)\right)$ $= \frac{1}{10}\cdot\left(16\left(1-e^{-0{,}15\cdot 10}\right)\right)\approx 1{,}24$. und			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\frac{1}{10}\cdot\int_{10}^{20} f_E'(x)dx = \frac{1}{10}\cdot\left(f_E(20) - f_E(10)\right)$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\left(22-16\cdot e^{-0,15\cdot 20} - \left(22-16\cdot e^{-0,15\cdot 10}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\left(16\left(e^{-0,15\cdot 10} - e^{-0,15\cdot 20}\right)\right) \approx 0,28.$$

Die entsprechenden Werte für die Funktion f_F sind:

$$\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f_F'(x)dx \approx 0,50 \quad \text{und} \quad \frac{1}{10}\cdot\int_{10}^{20} f_F'(x)dx \approx 0,25.$$

Die Funktion steigt zwar ständig, aber die Änderungsraten werden immer geringer. Denn f_E' mit $f_E'(x) = 2,4\cdot e^{-0,15\cdot x}$ ist eine positive und monoton fallende Funktion. Also ist die durchschnittliche Änderung der Temperatur pro Minute in den ersten 10 Minuten des Erwärmvorganges größer als in den zweiten 10 Minuten des Erwärmvorganges.

</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 3

I.3 Dreieck

Gegeben sind zwei ganzrationale Funktionen mit den Gleichungen

$$f(x) = (x-2)^2 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 5 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie die Scheitelpunkte zu *f* und *g* an.

Ermitteln Sie die Schnittpunkte *D* und *A* (A sei rechts von D) der Graphen von *f* und *g*.

Zeichnen Sie die Graphen von *f* und *g* im Bereich $-1 \leq x \leq 5$ in ein Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche.

c) Eine Parallele zur *y*-Achse mit $x = a$ und $0 < a < 4$, schneidet den Graphen von *f* im Punkt *B* und den Graphen von *g* im Punkt *C*. Die Punkte *B* und *C* bilden sowohl mit dem Schnittpunkt *A* als auch mit dem Schnittpunkt *D* aus dem Aufgabenteil a) jeweils die Eckpunkte eines Dreiecks.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* in Abhängigkeit von *a* durch die Funktion *W* mit $W(a) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$ beschrieben wird.

Ermitteln Sie, für welches *a* die Fläche des Dreiecks *ABC* den größten Inhalt hat, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Begründen Sie, warum der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *DBC* genau so groß ist wie der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*. Bestimmen Sie dann, für welchen Wert von *a* die Fläche des Dreiecks *DBC* den größten Inhalt hat.

Ermitteln Sie, welchen Anteil die maximale Dreiecksfläche an dem Flächeneinschluss *K* zwischen den Graphen von *f* und *g* hat.

d) Die Graphen von *f* und *g* lassen sich durch einen geeigneten, von Null verschiedenen Faktor $k \in \mathbb{R}$ strecken oder stauchen, sodass die Nullstellen erhalten bleiben. Im Folgenden soll der Faktor *k* bei *f* und *g* jeweils gleich sein.

Zeigen Sie, dass die Schnittstellen der Graphen von *f* und *g* unabhängig von der Wahl von *k* sind.

Bestimmen Sie jetzt *k* so, dass die Graphen in den Schnittpunkten senkrecht zueinander stehen.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Die Koordinaten der Scheitelpunkte lassen sich den Funktionsgleichungen entnehmen: $S_f\,(2 \mid 0)$ und $S_g\,(2 \mid 5)$

Schnittpunkte:

Beide Funktionsterme werden gleichgesetzt:

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-2)^2 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 5$$

$$x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 4$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 5x = 0$$

$$x \cdot \left(\frac{5}{4}x - 5\right) = 0$$

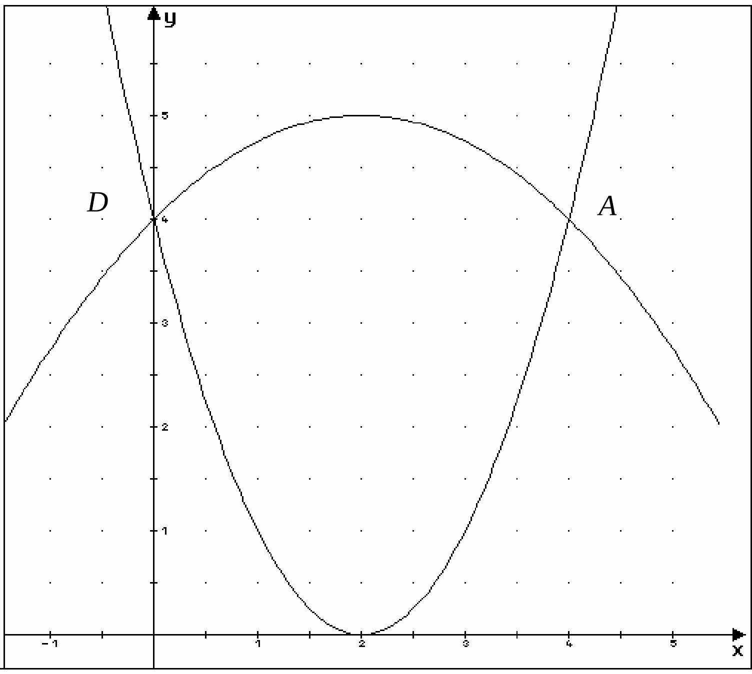
Die letzte Gleichung ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich Null ist. D. h.

$$x = 0 \vee \left(\frac{5}{4}x - 5\right) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Mit $f(0) = 0$ und $f(4) = 4$ erhält man die Schnittpunkte $D\,(0 \mid 4)$ und $A\,(4 \mid 4)$.

Skizze:



</td><td>15</td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>

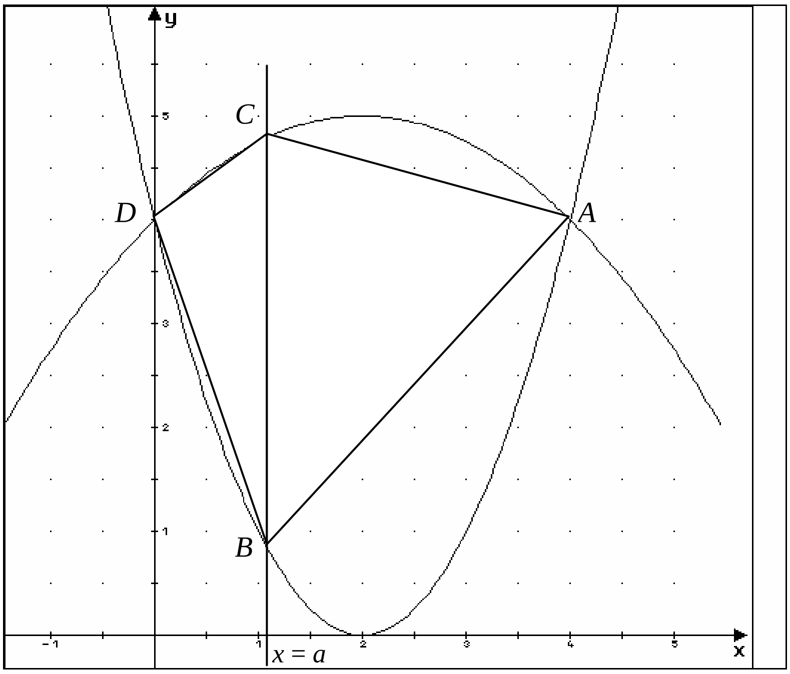
Beide Funktionen haben zwischen den beiden Schnittstellen positive Funktionswerte. Also kann man den Flächeninhalt zwischen den Graphen mithilfe des Integrals über $f - g$ bzw. $g - f$ bilden:

$$\int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{40}{3}.$$

Der Inhalt der Fläche, der von den beiden Funktionsgraphen umschlossen wird, beträgt $\frac{40}{3}$ Flächeneinheiten.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

<u>Dreiecksfläche:</u>



Die Fläche eines Dreiecks berechnet sich aus „$\frac{1}{2} \cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe“.

Die Höhe beträgt $4 - a$, die Grundseitenlänge $g(a) - f(a) = -\frac{5}{4}a^2 + 5a$.

Also hat der Flächeninhalt des Dreiecks ABC den Wert

$$\left(\frac{1}{2} \cdot (4 - a) \cdot (-\frac{5}{4}a^2 + 5a)\right) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a.$$

<u>Maximaler Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*:</u>

$$W(a) = \frac{5}{8}a^3 - 5a^2 + 10a$$

$$W'(a) = \frac{15}{8}a^2 - 10a + 10$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$W'(a) = 0$$

$$\frac{15}{8}a^2 - 10a + 10 = 0$$

$$a^2 - \frac{16}{3}a + \frac{16}{3} = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{16}{3}} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$a_{1/2} = \frac{8}{3} \pm \frac{4}{3}.$$

W hat also bei $a_1 = 4$ und bei $a_2 = \frac{4}{3}$ mögliche Extremstellen. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung W'' mit $W''(a) = \frac{15}{4}a - 10$ erhält man:

$$W''\left(\frac{4}{3}\right) = -5.$$

Also hat W bei $a_2 = \frac{4}{3}$ eine Maximumstelle.

Da W eine ganz rationale Funktion vom Grad drei ist, folgt daraus, dass die andere mögliche Extremstelle a_1 eine Minimumstelle ist. Diese liegt aber außerhalb des untersuchten Bereichs.

$$W\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{160}{27} \approx 5{,}93.$$

Der maximale Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* beträgt damit etwa 5,93 Flächeneinheiten.

<u>Gleichheit der maximalen Flächeninhalte der Dreiecke *ABC* und *DBC*:</u>

Aufgrund der vorliegenden Symmetrie beider Graphen zur Scheitelachse $x = 2$ liegen auch die Eckpunkte beider Dreiecke symmetrisch zur Scheitelachse. Es sind also jeweils die Länge und Höhe der Dreiecke und damit die Flächeninhalte gleich.

Da die beiden Dreiecke mit maximalen Flächeninhalt spiegelsymmetrisch zueinander sind, liegt die Extremalstelle des Dreiecks *DBC* punktsymmetrisch bzgl. 2 zur Extremalstelle des Dreiecks *ABC*:

Aus $a = \frac{4}{3}$ folgt $a = 2 - \frac{2}{3}$.

Also liegt die Extremalstelle des Dreiecks *DBC* bei

$$a = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	<u>Flächenanteil:</u> Der Anteil beträgt $\frac{\frac{160}{27}}{\frac{40}{3}} = \frac{160}{27} \cdot \frac{3}{40} = \frac{4}{9}$.		40	
d)	<u>Schnittstellen:</u> Damit *f* und *g* bei gleichzeitigem Erhalt der Nullstellen gestaucht bzw. gestreckt wird, muss jeweils der ganze Funktionsterm mit *k* multipliziert werden, also haben die veränderten Funktionsterme f_k bzw. g_k von *f* bzw. *g* das Aussehen $f_k(x) = k \cdot f(x) = k(x-2)^2$ und $g_k(x) = k \cdot g(x) = -\frac{k}{4}(x-2)^2 + k \cdot 5$. Nach der Festlegung folgt dann aus $f_k(x) = g_k(x)$ sofort $f(x) = g(x)$, d.h., dass die Schnittstellen gleich sind. <u>Graphen stehen in den Schnittpunkten senkrecht zueinander:</u> Aus Symmetriegründen reicht es, die Schnittstelle $x = 0$ zu untersuchen. $f_k'(x) = k \cdot f'(x) = k \cdot (2x-4)$ und $g_k'(x) = k \cdot g'(x) = k \cdot (-\frac{1}{2}x + 1)$ Damit beide Funktionsgraphen an den Schnittstellen senkrecht aufeinander stehen, muss gelten $f_k'(0) = -\frac{1}{g_k'(0)}$ $k \cdot (2 \cdot 0 - 4) = -\frac{1}{k \cdot (-\frac{1}{2} \cdot 0 + 1)}$ $-4k = -\frac{1}{k}$ $k^2 = \frac{1}{4}$. D. h. $k = \frac{1}{2}$ und $k = -\frac{1}{2}$ sind Lösungen. Für $k = \frac{1}{2}$ bzw. $k = -\frac{1}{2}$ stehen die Funktionsgraphen von f_k und g_k an den Schnittstellen senkrecht zueinander.			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 1

II.1 Würfel

Gegeben sind die Punkte A (–1| 6 | 1), B (2 | 2 | 2), C (0 | 7 | –1) , P (0 | 6 | 6) und Q (6 | 6 | 6).
Die Ebene $\boldsymbol{E}$ enthält die Punkte A, B und C.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte P und Q geht, in Parameterform an.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von $\boldsymbol{E}$.
(Ein mögliches Teilergebnis ist $\boldsymbol{E}: x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$.)
Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene $\boldsymbol{E}$.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von $\boldsymbol{E}$ mit den Koordinatenachsen.

S_1, S_2, S_3 und der Koordinatenursprung O sind vier Eckpunkte eines Würfels.

Zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und den Würfel in das beiliegende Koordinatensystem ein. Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q ebenfalls Eckpunkte des Würfels sind.

c) Gegeben ist eine Ebene $\boldsymbol{F}$ durch die Eckpunkte P und Q des Würfels aus Aufgabenteil b) und den Punkt R (6 | 0 | 4).

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $\boldsymbol{F}$ mit der x_3-Achse.

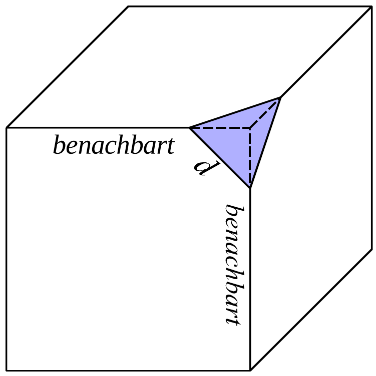
Die Ebene $\boldsymbol{F}$ zerlegt den Würfel in zwei Teile.
Zeichnen Sie die Schnittfläche in das Bild aus Aufgabenteil b) ein.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumeninhalte der entstandenen Teilkörper.

d) Dem Würfel wird ein pyramidenförmiges Stück abgeschnitten, so dass die Pyramidenspitze der Punkt Q ist und die von Q ausgehenden Kanten gleich lang sind. Die entsprechenden Kanten sind in der Zeichnung gestrichelt eingezeichnet. Drei der alten Würfelflächen werden dadurch zu Fünfecken.

In diesem Aufgabenteil geht es nun um den Restkörper.

Begründen Sie, dass die entstehende Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.

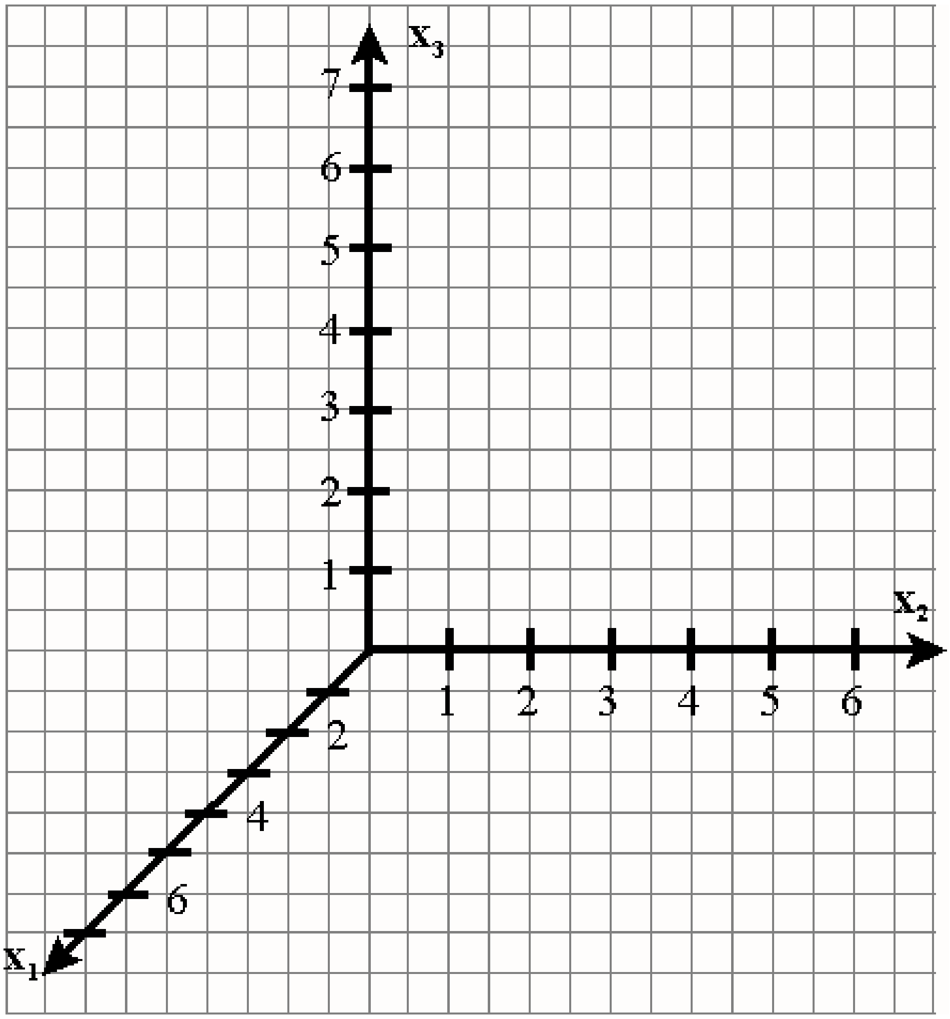
Bestimmen Sie die Länge x der von Q ausgehenden Kanten so, dass die neu entstandene Kante d und ihre beiden benachbarten Kanten der entstehenden fünfeckigen Seitenflächen des Restkörpers jeweils gleich lang sind. Ermitteln Sie auch diese gemeinsame Länge.



e) Nun werden von <u>allen</u> Ecken des Würfels jeweils gleich große Pyramiden abgeschnitten.
Ermitteln Sie, wie lang die von der Ecke ausgehenden Kanten der abgeschnittenen Pyramiden höchstens sein können.

Haben die abgeschnittenen Pyramiden die maximale Größe, so entsteht ein spezieller Restkörper. Ermitteln Sie, um was für einen Körper es sich hierbei handelt. Beschreiben Sie ihn dazu durch die Anzahl der Ecken sowie durch die Form und die Anzahl seiner Seitenflächen.

Anlage zur Aufgabe „Würfel“:



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Für die Geradengleichung der Geraden g durch die Punkte P und Q kann man als Stützvektor den Ortsvektor $\vec{p}$ und als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ verwenden: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für die Bestimmung der Koordinatengleichung der Ebene E stellt man z. B. erst eine Parametergleichung auf, hier mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dann erhält man über das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 3r + s \\ x_2 = 6 - 4r + s \\ x_3 = 1 + r - 2s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 3r + s \\ x_1 - x_2 = -7 + 7r \\ 2x_1 + x_3 = -1 + 7r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 3r + s \\ x_1 - x_2 = -7 + 7r \\ 2x_1 + x_3 - (x_1 - x_2) = 6 \end{cases}$$

oder über den Normalenvekor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Koordinatengleichung

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

Hinweis: Auch eine argumentative Lösung, z. B. über Spurpunkte, ist möglich.

Ein Richtungsvektor von g ($\overrightarrow{PQ}$) und ein Normalenvektor $\vec{n}$ von $\boldsymbol{E}$ werden in die Schnittwinkelformel eingesetzt und es ergibt sich

$$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}\right|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{36}} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Damit folgt $\alpha \approx 35{,}26°$.

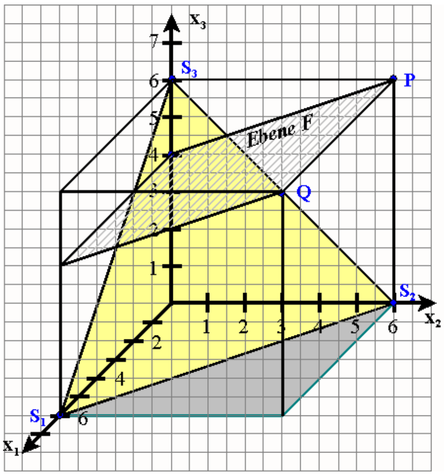
</td><td>15</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Zur Berechnung des Schnittpunkts S_1 der Ebene E mit der x_1-Achse setzt man in der Koordinatengleichung die Koordinaten x_2 und x_3 gleich Null und berechnet x_1. Man erhält $S_1(6|0|0)$.

Entsprechend erhält man $S_2(0|6|0)$ und $S_3(0|0|6)$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>



Nachweis, dass P und Q Eckpunkte des Würfels sind:

$$\vec{s_2}+\vec{s_3}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}=\vec{p} \quad \text{und} \quad \vec{s_1}+\vec{s_2}+\vec{s_3}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}=\vec{q}.$$

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Da P und Q Eckpunkte des Würfels sind und R auf der Würfelkante liegt, die senkrecht auf S_1 steht, muss der Schnittpunkt mit der x_3-Achse die gleiche x_3-Koordinate wie R haben.
  Also hat der Schnittpunkt von F mit der x_3-Achse die Koordinaten $(0|0|4)$.
- Die Ebene F zerlegt den Würfel in zwei Prismen.
  Ein Prisma hat ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche, das andere hat eine trapezförmige Grundfläche.
  Für das Volumen des Würfels ergibt sich: $V_{Würfel}=6^3=216$.
  Für das Prisma mit dem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche ergibt sich:
  $V_{Teilkörper}=G\cdot h=\frac{6\cdot 2}{2}\cdot 6=36$.
  Für das Verhältnis gilt dann: $\frac{36}{216}:\frac{180}{216}$, also 1 : 5.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Die abgeschnittene Pyramide hat zur Spitze hin gleich lange Kanten, jede Seitenfläche hat an der Spitze einen 90°-Winkel. Also sind die drei Seitenflächen kongruent, damit sind die Kanten an der Grundfläche auch gleich lang und die Grundfläche und damit auch die Schnittfläche ist ein gleichseitiges Dreieck.
- Sei x die Länge der von Q ausgehenden Pyramidenkante der abgeschnittenen Pyramide. Für die neu erhaltene Seite d gilt
  $2x^2=d^2$, also $d=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\cdot x$ (1)
  und
  $d=6-x$. (2)

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Die Gleichung (1) gilt immer.

Die Gleichung (2) folgt aus der Aufgabenstellung:
d und die benachbarten Kanten sollen gleich lang sein.

Durch Gleichsetzen erhält man

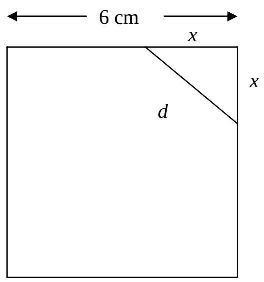
$$\sqrt{2} \cdot x = 6 - x$$

$$(\sqrt{2} + 1) \cdot x = 6$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{2} + 1} \approx 2{,}5 .$$

bzw.

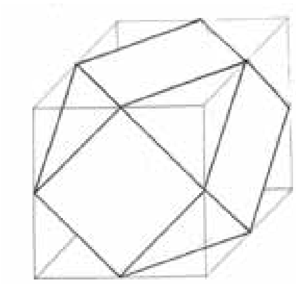
$$d = 6 - x \approx 3{,}5 .$$



</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

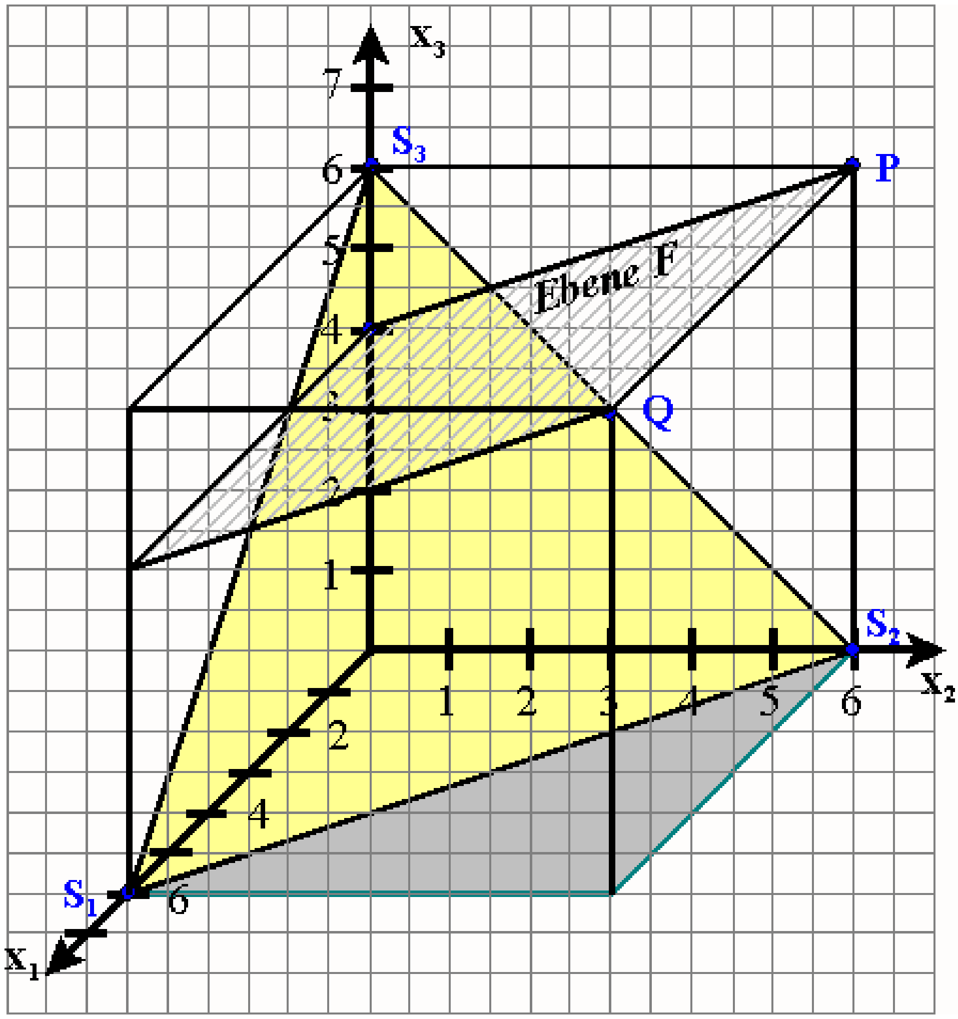
- Die abgeschnittenen Kanten können höchstens 3 LE lang sein, denn dann treffen sich die abgeschnittenen Pyramiden gerade in der Mitte der Würfelkante, so dass von der Würfelkante nichts mehr übrig bleibt.

- Der Restkörper hat dort, wo der Würfel ehemals Ecken hatte, gleichseitige Dreiecke. Aus den ehemaligen Würfelflächen werden Quadrate, deren Ecken in den Mittelpunkten der ehemaligen Würfelkanten liegen. Der Körper hat also 14 Flächen: 8 gleichseitige Dreiecke und 6 Quadrate. Weiterhin hat der Körper 12 Ecken.



</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Kopiervorlage für die Zeichnung:



LA/AG 2

II.2 Pavillon am Meer

Auf einem ebenen zum Meer hin abfallenden Hang werden in den Geländepunkten

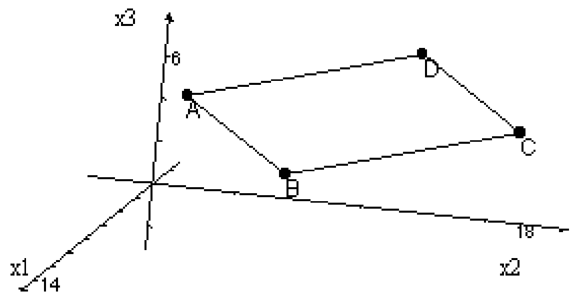
$A(2 \mid 2 \mid 5)$,

$B(10 \mid 10 \mid 4{,}8)$,

$C(2 \mid 18 \mid 5)$,

$D(d_1 \mid d_2 \mid d_3)$

Pfeiler für einen offenen Pavillon entsprechend der nicht maßstäblichen Zeichnung verankert.



1 LE $\hat{=}$ 1 m.

a) Erstellen Sie eine Parametergleichung der Ebene ***E*** des Hanges.

Berechnen Sie die Abstände von *A* nach *B* und von *B* nach *C*.

Die ungefähre Lage des Punktes *D* können Sie der Zeichnung entnehmen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *D*, so dass *ABCD* ein Viereck in der Ebene ***E*** wird, in dem alle Seiten gleich lang sind (Raute).

b) Die Planung sah als „Grundriss“ des Pavillons ein Quadrat vor.
Entscheiden Sie, ob diese Planung im Gelände durch die gewählten Punkte erfüllt wird.

In den Punkten *A, B, C* und *D* werden die Pfeiler *a, b, c* und *d* angebracht. Jeder Pfeiler ragt mit einer Länge von 3,8 m aus dem Boden heraus. An den Pfeilerspitzen soll ein Planendach aufgehängt werden.

c) Der Pfeiler *c* folgt dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, der Pfeiler *a* folgt dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass $(2 \mid 19{,}2 \mid 8{,}6)$ die Koordinaten der Pfeilerspitze S_c und $(2 \mid 0{,}8 \mid 8{,}6)$ die Koordinaten der Pfeilerspitze S_a sind.
Berechnen Sie den Neigungswinkel des Pfeilers *c* zur Hangwaagerechten, also zur Geraden durch *A* und *C*.

Die Pfeiler *b* und *d* enden in $S_b (11{,}2 \mid 10 \mid 8{,}4)$ und $S_d (-7{,}2 \mid 10 \mid 8{,}8)$.

d) Untersuchen Sie, ob das Planendach durch ein ebenes Glasdach ersetzt werden kann, das auf allen vier Pfeilerspitzen aufliegt.

Der Hang bricht in 4 m Höhe mit einer geraden horizontalen Kante zum Wasser hin ab, d.h. die Abbruchkante liegt in der Hangebene ***E*** und hat dort die konstante Höhe $x_3 = 4$. Der Punkt *B* des Pavillons soll mindestens 40 m von der Abbruchkante entfernt sein.

e) Ermitteln Sie die Geradengleichung der Abbruchkante und beurteilen Sie, ob die Abstandsforderung eingehalten wird.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Mit dem Punkt B als Basispunkt und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ ergibt sich $\boldsymbol{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix},\ k, l \in \mathbb{R}.$ Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Also folgt $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 0{,}2^2} \approx 11{,}32$. <u>Erster Lösungsweg zur Berechnung der Koordinaten von *D*:</u> Es gilt: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$. Damit sich eine Raute in der Ebene bilden soll, muss $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gelten, d. h. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$ $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 5{,}2 \end{pmatrix}.$ Damit ergibt sich *D* (–6 | 10 | 5,2). <u>Zweiter Lösungsweg:</u> Einfache Betrachtungen der Symmetrien der Punktkoordinaten ergeben unmittelbar, dass • *A* und *C* auf gleicher Höhe liegen und • dass die Gerade durch *A* und *C* nur in der x_2-Koordinate variabel ist, • dass somit *D* dieselbe x_2-Koordinate wie *B* haben muss, • dass *D* um 0,2 höher als *A* (und *C*) liegen muss und • dass *D* in der x_1-Koordinate von *C* ebenso weit entfernt sein muss wie *B*, also *D* (–6 | 10 | 5,2). Zu überprüfen ist noch die Gleichseitigkeit: Nach der Konstruktion ist $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$. Aus der Berechnung der Abstände von *A* nach *B* und von *B* nach *C* folgt: $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Nun muss nur noch $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ untersucht werden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$ $\begin{pmatrix}-6\\10\\5{,}2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\18\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-8\\0{,}2\end{pmatrix}.$ Also hat auch $\overrightarrow{CD}$ die gleiche Länge wie die übrigen Vierecksseiten. Das Viereck *ABCD* ist also gleichseitig und damit eine Raute. *Hinweis: Andere Schreibweisen, z. B. dass Punkte mit Vektoren identifiziert werden, führen natürlich auch zu richtigen Lösungen.*	15	15	
b)	Die Raute *ABCD* ist ein Quadrat, wenn mindestens einer der Winkel 90° beträgt. Der Winkel α bei *A* wird mithilfe des Skalarproduktes bestimmt: $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$ $=\dfrac{\begin{pmatrix}-8\\8\\0{,}2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\-0{,}2\end{pmatrix}}{\lvert\overrightarrow{AD}\rvert^2}$ $=-\dfrac{0{,}04}{64+64+0{,}04}$ $\approx -0{,}00031.$ Aus $\cos\alpha\approx -0{,}00031$ folgt $\alpha\approx 90{,}018°$. Da *ABCD* eine Raute ist, muss der gegenüberliegende Winkel ebenso groß sein, und die beiden anderen Winkel sind die Komplementärwinkel, die von einem rechten Winkel um –0,018° abweichen. Der Grundriss kann so akzeptiert werden, da die Abweichungen gegenüber dem Ideal klein genug sind, um bei einem tatsächlichen Bauwerk nie messbar zu sein. *Hinweis: Die Abweichung gegenüber einem wirklich rechtwinkligen Grundriss beträgt etwa 3,5 mm an einem Eckpunkt.*		15	
c)	Die Koordinaten der Pfeilerspitze S_c erhält man aus $\overrightarrow{OC}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ mit der Bedingung, $\left\lvert r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rvert=3{,}8$. Aus $\left\lvert\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ folgt $r=\dfrac{3{,}8}{\sqrt{10}}\approx 1{,}2$. Eingesetzt ergibt sich, dass S_c die Koordinaten (2 | 19,2 | 8,6) hat.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Die Koordinaten von S_a erhält man – da die Pfeilerlänge die gleiche bleibt – dann aus

$$\overrightarrow{OA} + \frac{3{,}8}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}8 \\ 8{,}6 \end{pmatrix}.$$

S_a hat die Koordinaten $(2 \mid 0{,}8 \mid 8{,}6)$.

Der Winkel berechnet sich aus

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_c}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\vec{v}_c\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{16^2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{16}{16 \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}32.$$

Mit $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ folgt $\varphi \approx 71{,}6°$.
</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Drei Punkte liegen immer in einer Ebene. Bestimmt wird die Ebene E_D z. B. durch die drei Punkte S_a, S_b und S_d. Anschließend muss gezeigt werden, dass auch S_c in der Ebene E_D liegt. Als Ebenengleichung mit dem Basispunkt S_a erhält man

$$E_D : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}8 \\ 8{,}6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ 9{,}2 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -9{,}2 \\ 9{,}2 \\ 0{,}2 \end{pmatrix},\ k, l \in \mathbb{R}.$$

Damit S_c in der Ebene liegt, muss das folgende Gleichungssystem erfüllbar sein.

$$\begin{aligned} 2 + 9{,}2k - 9{,}2l &= 2 \quad (1) \\ 0{,}8 + 9{,}2k + 9{,}2l &= 19{,}2 \quad (2) \\ 8{,}6 - 0{,}2k + 0{,}2l &= 8{,}6 \quad (3) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) folgt: $9{,}2k = 9{,}2l$ also $k = l$

Eingesetzt in (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0{,}8 + 9{,}2k + 9{,}2(k) &= 19{,}2 \\ 2 \cdot 9{,}2 \cdot k &= 18{,}4 \\ 9{,}2k &= 9{,}2 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Dann ist auch $l = 1$.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Beide Ergebnisse werden in (3) eingesetzt und man erhält $8{,}6-0{,}2\cdot 1+0{,}2\cdot 1=8{,}6$. Damit sind die drei Gleichungen simultan lösbar und S_c liegt ebenfalls in der Ebene $\boldsymbol{E_D}$. Es ist also möglich, das Planendach durch ein ebenes Glasdach zu ersetzen.		15	
e)	<u>Gleichung der Abbruchkante:</u> Die Abbruchkante liegt in der Ebene $\boldsymbol{E}$ und hat dort die konstante Höhe $x_3 = 4$. Eingesetzt in die Gleichung für $\boldsymbol{E}$ ergibt dies eine Bestimmungsgleichung für k und l: $4=4{,}8+0{,}2k+0{,}2l \;\Leftrightarrow\; k=-4-l$. Somit ergibt sich für die Abbruchkante g die Geradengleichung: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\4{,}8\end{pmatrix}+(-4-l)\cdot\begin{pmatrix}-8\\-8\\0{,}2\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0{,}2\end{pmatrix},\ l\in\mathbb{R}$ $=\begin{pmatrix}42\\42\\4\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}0\\16\\0\end{pmatrix},\ l\in\mathbb{R}$ $=\begin{pmatrix}42\\42\\4\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ l\in\mathbb{R}$ <u>Abstandsforderung:</u> Auch ohne formales Verfahren zur Bestimmung des Abstands eines Punktes (hier B) von einer Geraden (hier g) ist die Frage erschließend beantwortbar: Da g in x_2-Richtung verläuft, kann man einen Schnitt senkrecht zu dieser Achse durch B vornehmen, und die Abstandslinie liegt in dieser Schnittebene. In dieser Ebene haben B und der Durchstoßungspunkt von g eine Koordinatendifferenz von 32 in der x_1-Koordinate und von 0,8 in der x_3-Koordinate. Also ist der Abstand von B zu g: $d(B,g)=\sqrt{32^2+0{,}8^2}\approx 32{,}01<40$. Der geforderte Abstand wird also deutlich unterschritten. *Hinweis: Andere Berechnungen, wie z. B. über Normalenvektoren, sind ebenso möglich.*			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 1

III.1 Allergien

Auf einer Internetseite von „netdoktor.de“ vom 18.07.05 wird zunächst erklärt, was eine Allergie ist: „Bei einigen Menschen spielt das Immunsystem verrückt. Statt nur schädliche Krankheitserreger zu bekämpfen, stürzt sich die Immunabwehr auch auf harmlose Fremdlinge wie Blütenpollen, Hausstaub oder bestimmte Nahrungsmittelbestandteile: der Körper reagiert allergisch.“ Später heißt es: „Jeder dritte Deutsche ist Allergiker, schätzt der Ärzteverband Deutscher Allergologen. Tendenz steigend.“

Für Ihre Lösungen können Sie auch den in der Anlage beigefügten Ausschnitt aus einer Tabelle summierter Binomialverteilungen benutzen.

Gehen Sie zunächst davon aus, dass ein Drittel aller Deutschen Allergiker sind.

a) Es werden 100 Bewohner Deutschlands zufällig ausgewählt und auf Allergien getestet.
Begründen Sie, dass man die möglichen Anzahlen an Allergikern unter den getesteten Personen als binomialverteilt ansehen kann.

b) Berechnen Sie unter der Annahme der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 getesteten Personen
- genau 33 Allergiker
- mindestens 25 Allergiker
- höchstens 20 Allergiker sind.

Auf der oben genannten Internetseite heißt es weiter: „Die Neigung zu einer solchen Reaktion ist wahrscheinlich angeboren. Die Neigung, eine Überempfindlichkeit zu entwickeln, liegt bei Personen, bei denen beide Elternteile Allergiker sind, zwischen 40 bis 60 Prozent. Ist nur ein Elternteil betroffen, entwickelt sich in etwa 20 bis 40 Prozent der Fälle eine Allergie.“

c) Gehen Sie in diesem Aufgabenteil davon aus, dass die Partnerwahl und die Familienplanung unabhängig von vorliegenden Allergien erfolgen.

Bestimmen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen „Elternkonstellationen“, also dafür, dass beide Elternteile Allergiker sind, ein Elternteil oder kein Elternteil Allergiker ist.

Weisen Sie nach, dass selbst, wenn man jeweils die höheren Werte zugrunde legt – also 60%, wenn beide Elternteile Allergiker sind, 40%, wenn nur ein Elternteil betroffen ist – der Anteil der Allergiker in der Bevölkerung sinken müsste, wenn nur erbliche Faktoren für das Auftreten einer Allergie entscheidend wären und keine Allergien bei Kindern aufträten, deren Elternteile beide keine Allergiker sind.

Zitat aus der o.g. Internetseite: „Warum Allergien in Industrienationen stetig zunehmen, ist unbekannt. Jedoch scheinen besonders hygienische Lebensverhältnisse die Entstehung von Allergien im Kindesalter zu begünstigen. Denn in Regionen mit einfacheren hygienischen Standards treten Allergien deutlich seltener auf. Offenbar verpassen Schmutz und harmlose Keime in der Kindheit dem Immunsystem erst den richtigen Schliff.“

d) Um die Ursachen für das Entstehen von Allergien zu erforschen, werden 100 zufällig ausgewählte fünfjährige Kinder vor ihrer Einschulung auf Allergien untersucht.

Durch einen Hypothesentest soll die Behauptung begründet werden, dass der Anteil an Allergikern steigt. Leiten Sie eine Entscheidungsregel her, mit der die Nullhypothese „Unter Kindern im Alter von 5 Jahren sind höchstens ein Drittel Allergiker.“ gegebenenfalls verworfen werden kann. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese zu Unrecht verworfen wird, und also zu Unrecht von einem erhöhten Anteil an Allergikern ausgegangen wird, höchstens 5 % betragen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit Ihrer Entscheidungsregel eine Erhöhung des Anteils an Allergikern auf 40 % unbemerkt bleibt und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Tabelle der summierten Binomialverteilung für n = 100

k \ p	0,2	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5
10	0,0057	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0126	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0253	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	0,0469	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,0804	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,1285	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
16	0,1923	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000
17	0,2712	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000
18	0,3621	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000
19	0,4602	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000
20	0,5595	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000
21	0,6540	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000
22	0,7389	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000
23	0,8109	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000
24	0,8686	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000
25	0,9125	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000
26	0,9442	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000
27	0,9658	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000
28	0,9800	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000
29	0,9888	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000
30	0,9939	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000
31	0,9969	0,6331	0,3525	0,0389	0,0001
32	0,9985	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002
33	0,9993	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004
34	0.9997	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009
35	0,9999	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018
36	0,9999	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033
37	1,0000	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060
38	1,0000	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105
39	1,0000	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176
40	1,0000	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284
41	1,0000	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443
42	1,0000	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666
43	1,0000	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967
44	1,0000	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356
45	1,0000	0,9995	0,9943	0,8689	0,1841
46	1,0000	0,9997	0,9969	0,9070	0,2421

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Auswahl der 100 Personen kann als Bernoulli-Kette der Länge 100 angesehen werden, denn: 1) Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden: Es liegt eine Allergie vor oder nicht. 2) Die Personen werden zufällig ausgewählt. 3) Da „ohne Zurücklegen gezogen“ wird, verändert sich die Wahrscheinlichkeit zwar, aber wegen der großen Gesamtheit so gering, dass dies vernachlässigt werden und die Trefferwahrscheinlichkeit *p* als konstant angesehen werden kann.	5	10	
b)	*X* sei die Anzahl der Allergiker unter den 100 Personen. Mithilfe der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ oder durch Ablesen aus dem angefügten Ausschnitt aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung erhält man: $P(X=33)=P(X\le 33)-P(X\le 32)=0{,}0844$. Die Wahrscheinlichkeit, dass 33 von 100 getesteten Personen Allergiker sind, beträgt etwa 8,4 %. Bei der Bearbeitung der folgenden Aufgabenteile bietet sich ebenfalls die Tabelle an: $P(X\ge 25)=1-P(X\le 24)=1-0{,}0281=0{,}9719$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 getesteten Personen mindestens 25 Allergiker sind, beträgt etwa 97,2 %. $P(X\le 20)=0{,}0024$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 getesteten Personen höchstens 20 Allergiker sind, beträgt etwa 0,2 %.	15		
c)	• Bezeichnet man mit *B*: „Beide Elternteile sind Allergiker“, *E*: „Ein Elternteil ist Allergiker“ und *K*: „Kein Elternteil ist Allergiker“, so gilt wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit: $P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, $P(E)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$ sowie $P(K)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. • Mit der Bezeichnung *A*: „Die ausgewählte Person ist Allergiker“ ergibt sich aus dem Text: $P(A\|B)=0{,}6$, $P(A\|E)=0{,}4$ sowie $P(A\|K)=0$. Für die nächste Generation folgt dann mithilfe eines Baumdiagramms oder mit einem rein formalen Ansatz: $P(A) = P(A\|B)\cdot P(B)+P(A\|E)\cdot P(E)+P(A\|K)\cdot P(K) =$ $\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{9}+0=\frac{11}{45}<\frac{1}{3}$.	5	10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	• Getestet wird die Nullhypothese H_0: $p \le \frac{1}{3}$. Hierbei handelt es sich um einen einseitigen Test. Gesucht ist also das kleinste k, für das gilt: $P(X \ge k) = \sum_{i=k}^{100} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{100-i} \le 0{,}05$. • Bei Benutzung der beigefügten Tabelle nutzt man die Beziehung $P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$ aus. Es ergibt sich $P(X \ge 41) = 0{,}0659$ und $P(X \ge 42) = 0{,}0434$. Also ist $k = 42$. Haben 42 oder mehr der 100 untersuchten Kinder eine Allergie, sollte man die Nullhypothese verwerfen. • Wäre der Anteil an Allergikern unter fünfjährigen Kindern $p = 0{,}4$, so bliebe dies unentdeckt mit der Wahrscheinlichkeit $\sum_{i=0}^{41} \binom{100}{i} \cdot 0{,}4^i \cdot 0{,}6^{100-i} = 0{,}6225 \approx 62{,}3\,\%$. Auch diesen Wert entnimmt man der Tabelle. Dass diese Wahrscheinlichkeit recht hoch ist (> 50%), ist nicht verwunderlich, da der Erwartungswert für $p = 0{,}4$ (also $\mu = 40$) noch zum Annahmebereich der Hypothese H_0 gehört.		30	15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 2

III.2 Klassischer Teetassentest

In den Kreisen des englischen Hochadels wird gerne Tee getrunken. Einige Damen rühmen sich sogar, am Geschmack zu erkennen, ob zuerst der Tee in der Tasse war und dann die Milch hinzukam oder ob umgekehrt zuerst die Milch eingegossen wurde und dann der Tee hinzukam.
Während eines nachmittäglichen Teekränzchens wollen einige Damen ihre Fähigkeiten überprüfen. Dazu werden den Damen 10 Tassen Tee mit Milch vorgesetzt, die in zufälliger Reihenfolge mit Milch und Tee gefüllt wurden. Die Anzahl der richtigen Angaben der Reihenfolge wird notiert.

a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass eine Dame einfach nur rät, d. h. dass die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ ist.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Dame durch reines Raten genau 7 richtige Angaben macht.

   Bei 9 oder mehr richtigen Angaben will man der entsprechenden Dame eine geschmackliche Begabung zuerkennen:
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Dame, die ja nur rät, diese Begabung zuerkannt werden muss.

b) Nehmen Sie an, dass eine Dame mit gut ausgeprägtem Geschmacksempfinden die Reihenfolge von Tee oder Milch mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$ erkennt.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man ihre Begabung nicht erkennt, wenn die Entscheidungsregel aus Aufgabenteil a), also mindestens 9 richtige Angaben, beibehalten wird.

c) Einmal in Teelaune gekommen, denken sich die Damen einen weiteren Test aus.
   5 Paare von verschieden zubereiteten Tees werden zur Auswahl gestellt. Ein Paar besteht jeweils aus zwei Tassen, die in unterschiedlicher Reihenfolge befüllt wurden.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, alle Reihenfolgen richtig zu erkennen. Reines Raten wird vorausgesetzt.

d) Einer Dame ist der ursprüngliche Test mit 10 Tassen nicht gut genug. Sie schlägt einen Test mit 25 Tassen vor, die in beliebiger Reihenfolge zufällig befüllt werden. Eine Person soll als geschmacklich begabt gelten, wenn Sie mindestens M richtige Angaben macht.

   Ermitteln Sie die kleinste Zahl M so, dass man einer Person, die nur durch reines Raten ihre Entscheidung fällt, mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % das Prädikat „geschmacklich begabt“ zuerkennt.

   Ermitteln Sie entsprechend zum Aufgabenteil b) auch bei diesem Test die Wahrscheinlichkeit, mit der man die Begabung der Dame mit ausgeprägtem Geschmacksempfinden ($p = 0{,}7$) mit dem so konstruierten Test nicht erkennt.

e) Interpretieren Sie die beiden möglichen Versuchsausgänge „eine Dame besteht den Test aus Aufgabenteil d)“ bzw. „eine Dame besteht den Test aus Aufgabenteil d) nicht“ und nehmen Sie insbesondere Stellung zu den unterschiedlichen Ergebnissen von b) und d).

f) Beim Testen von Hypothesen kommt es sehr stark darauf an, was man für Vorstellungen von der Situation hat und was man darauf aufbauend eigentlich zeigen möchte. In dieser Aufgabe wird z. B. davon ausgegangen, dass eine Trefferwahrscheinlichkeit kleiner als 0,5 nicht sinnvoll ist. Es wurde also im Prinzip einseitig getestet.
   Es kann aber auch bei einem „Teetassentest“ durchaus sinnvoll sein, einen zweiseitigen Test durchzuführen.
   Begründen Sie jeweils ein Argument, das für einen einseitigen bzw. einen zweiseitigen Test spricht.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es sei X die Anzahl der richtig geratenen Reihenfolgen. X ist binomialverteilt mit p = 0,5. Mithilfe der Tafel zur Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X=7)=\binom{10}{7}\cdot 0{,}5^7\cdot 0{,}5^3=0{,}1172$. Die Wahrscheinlichkeit, genau 7 Reihenfolgen richtig zu raten, beträgt etwa 11,7 %. Ebenfalls mit Hilfe der Tafel für die summierte Binomialverteilung oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X\geq 9)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}5^{10}+\binom{10}{10}\cdot 0{,}5^{10}=1-0{,}9893=0{,}0107$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer ratenden Dame die Begabung zuerkannt wird, beträgt etwa 1,1 %.	15		
b)	„Nicht erkennen“ bedeutet nach der Entscheidungsregel, dass die entsprechende Dame 8 oder weniger richtige Reihenfolgen bestimmt. Sei Y die Anzahl der richtigen Reihenfolgen mit p = 0,7, so ist Y wieder binomialverteilt und man erhält mithilfe der Tafel für summierte Binomialverteilungen oder der entsprechenden Formel: $$P(Y\leq 8)=\sum_{k=0}^{8}\binom{10}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{10-k}=1-0{,}1493=0{,}8507.$$ Die Wahrscheinlichkeit, mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,7 nicht erkannt zu werden, beträgt etwa 85,1 %.	10		
c)	Bei einem Tassenpaar reicht das Benennen einer Tasse, weil die Versuchsbedingungen bekannt sind. Die Wahrscheinlichkeit für das richtige Benennen von 5 Tassenpaaren beträgt demnach: $0{,}5^5 = 0{,}03125$.		15	
d)	Der Tabelle für summierte Binomialverteilungen entnimmt man unmittelbar für p = 0,5, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man weniger oder gleich k Tassen richtig rät, mit aufsteigendem k für k = 17 erstmals größer oder gleich 95 % ist. ($P(X_{25}\leq 16)=0{,}9461$ und $P(X_{25}\leq 17)=0{,}9784$) bzw. $P(X_{25}\geq 17)=0{,}0539$ und $P(X_{25}\geq 18)=0{,}0216$. Entsprechend der Fragestellung ist also M = 18 zu wählen. Ein nicht signifikantes Ergebnis – d.h. man erkennt die Begabung nicht – liegt vor, wenn $X_{25}\leq 17$. Der Tabelle entnimmt man, dass für p = 0,7 gilt: $P(X\leq 17)=1-0.5118=0{,}4882$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Die Wahrscheinlichkeit, mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,7 nicht erkannt zu werden, beträgt etwa 48,8 %.</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Wenn eine Dame den Test besteht, wird sie mit Verweis auf statistische Signifikanz (auf dem 5 %-Niveau) zu Recht behaupten können, dass sie „geschmacklich begabt ist“.

Betrug in Aufgabenteil b) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dame mit ausgeprägter Begabung (p = 0,7) nicht erkannt wird, etwa 85 %, so ist dieser Wert bei dem verbesserten Test aus d) zwar auf 49 % gesunken, das ist aber immer noch ein sehr hoher Wert.

Wenn also eine Dame den Test nicht besteht, so kann oder wird sie bis auf weiteres durchaus zu Recht behaupten, dass damit nicht widerlegt sei, dass sie den Unterschied der Reihenfolge des Eingießens von Tee und Milch erkennen kann.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Begründung für einen einseitigen Test:
Wahrscheinlichkeiten kleiner als 0,5 liegen unterhalb der reinen Ratewahrscheinlichkeit, was „schlechter als reines Raten“ bedeuten würde. Das macht hier keinen Sinn.

Begründung für einen zweiseitigen Test:
Wenn eine Dame nur wenige Treffer erzielt, bedeutet das nicht notwendig, dass sie nur rät, sondern möglicherweise auch, dass sie ziemlich gut schmeckt, allerdings die Zuordnungen verwechselt. Wenn man dies vermutet, sollte man zweiseitig testen.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>