



Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2005/2006

Leistungskurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen

9. Februar 2006, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

- 1 Allgemeines
- 2 Rückmeldebogen
- 3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
- 4 Hinweise zum Korrekturverfahren
- 5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **330 Minuten** einschließlich Lesezeit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an B 3-1 faxen!

Behörde für Bildung und Sport
B 3-1

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren
in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Leistungskurs **Kurs-Nummer:** _____

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
I.3	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: _____

Unterschrift: _____

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sieben** Aufgaben – **I.1, I.2, I.3** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
 - Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
 - Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
 - Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
 - Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.
-

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 285	$\geq 95\%$	15
≥ 270	$\geq 90\%$	14
≥ 255	$\geq 85\%$	13
≥ 240	$\geq 80\%$	12
≥ 225	$\geq 75\%$	11
≥ 210	$\geq 70\%$	10
≥ 195	$\geq 65\%$	9
≥ 180	$\geq 60\%$	8

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 165	$\geq 55\%$	7
≥ 150	$\geq 50\%$	6
≥ 135	$\geq 45\%$	5
≥ 120	$\geq 40\%$	4
≥ 99	$\geq 33\%$	3
≥ 78	$\geq 26\%$	2
≥ 57	$\geq 19\%$	1
< 57	$< 19\%$	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Schulchiffre		BeBo EKo M	
Fach	Mathematik	Schüler- Nummer	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								
Bewertungstext								
Notenpunkte →								

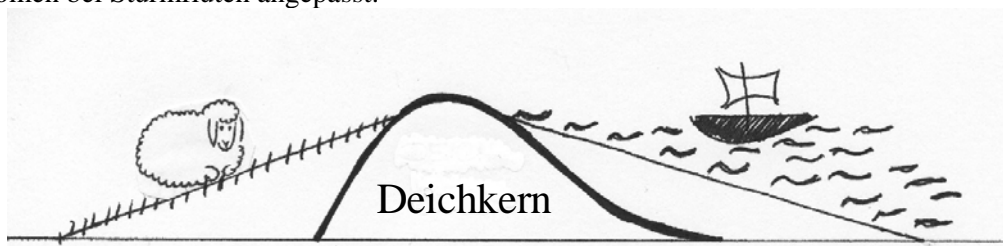
Schulchiffre		BeBo ZKo M	
Fach	Mathematik	Schüler- Nummer	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								
Bewertungstext								
Notenpunkte →								

ANALYSIS 1

I.1 Deichbau

Entlang der Küsten sind so genannte Sommerdeiche den Hauptdeichen vorgelagert. Sie sind mit Böschungsneigungen (Neigung = Betrag der Steigung) von 1 : 7 (bis zu 1 : 12) zur See hin und mit Böschungsneigungen von 1 : 5 (bis zu 1 : 10) zum Land hin den besonderen Beanspruchungen durch das Überströmen bei Sturmfluten angepasst.



Die Deiche bestehen aus einem so genannten Deichkern und zum Land und zum Wasser hin auslaufenden Wällen. Der Kern eines solchen Deiches kann durch die Funktion $f_{a,b}$ mit

$$f_{a,b}(x) = (x + a) \cdot e^{b-x} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

- a) Ermitteln Sie die Nullstelle, den Extrempunkt und den Wendepunkt des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von den Parametern a und b . [Kontrollergebnis: $f'(x) = (1 - x - a)e^{b-x}$].

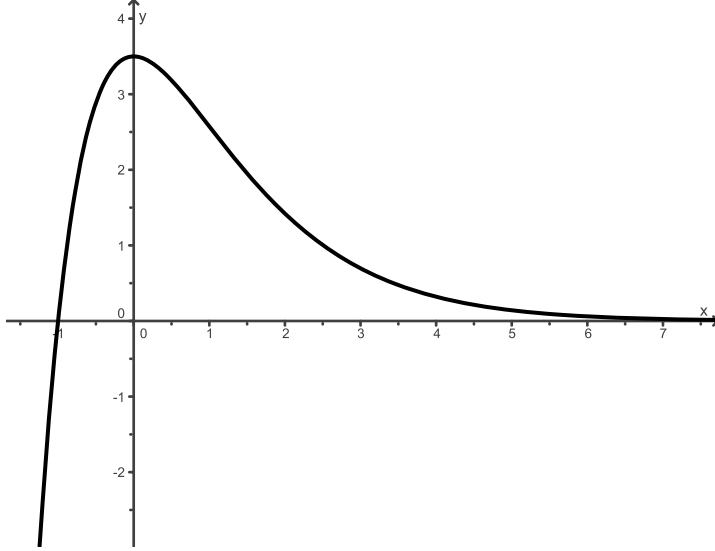
Ein Sommerdeich in der Nähe von Nordstrand soll eine Deichhöhe von 3,50 m haben. Für die Modellierung soll folgendes gelten:

- Die Deichkrone (das ist die höchste Stelle des Deichkerns) liegt auf der y -Achse.
 - Die Meereseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x > 0$.
 - Die Landseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x < 0$.
- b) Bestimmen Sie a und b so, dass $f_{a,b}$ den oben genannten Bedingungen entspricht. Geben Sie die Koordinaten von Wendepunkt und Hochpunkt an und skizzieren Sie den Graphen der Funktion. [Kontrollergebnis: $a = 1$, $b = \ln 3,5$].
- c) Zur Landseite wird der Deichkern mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet. Die Höhe der Aufschüttung kann mit einer linearen Funktion g beschrieben werden, die die y -Achse in der Deichkrone trifft und die Höhe NN (Normal Null, also Schnittpunkt mit der x -Achse) bei $x = -17,5$ erreicht. Berechnen Sie den Funktionsterm von g und zeigen Sie, dass sich das Gefälle der Aufschüttung in der vorgegebenen Toleranz von 1:5 bis 1:10 befindet.
- d) Zur Seeseite hin soll der Deich vom Wendepunkt ab mit einem Gefälle von 1:7 ebenfalls mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet werden. Berechnen Sie den Term der linearen Funktion h , die diese Aufschüttung beschreibt.
- e) Ermitteln Sie, wie viel m^3 Sand-Kiesel-Gemisch für 10 Meter der seeseitigen Aufschüttung benötigt werden.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><u>Nullstelle:</u> Bedingung: $f_{a,b}(x) = (x+a)e^{b-x} = 0 \Leftrightarrow x = -a$ Die Nullstelle liegt bei $x = -a$</p> <p><u>Extrempunkt:</u> $f'_{a,b}(x) = 0 \wedge f''_{a,b}(x) \neq 0$ $f'_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow f'_{a,b}(x) = (1-x-a) \cdot e^{b-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1-a$ $f''_{a,b}(x) = (x+a-2)e^{b-x}$ $f''_{a,b}(1-a) = -e^{b-(1-a)} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Bei $x = 1-a$ liegt ein lokales Maximum vor. Weiter gilt: $f_{a,b}(1-a) = e^{b+a-1}$. Damit ergibt sich für den Hochpunkt: $H(1-a e^{b+a-1})$</p> <p><u>Wendepunkt:</u> $f''_{a,b}(x) = 0 \wedge f'''_{a,b}(x) \neq 0$ Es gilt: $f''_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow f''_{a,b}(x) = (x+a-2) \cdot e^{b-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2-a$ $f'''_{a,b}(x) = (-x-a+3)e^{b-x}$ $f'''_{a,b}(2-a) = e^{b-2+a} > 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Bei $x = 2-a$ liegt eine Wendestelle. Mit $f_{a,b}(2-a) = 2 \cdot e^{b+a-2}$ ergibt sich für den Wendepunkt $W(2-a 2e^{b+a-2})$</p>			30
b)	<p>Bedingungen:</p> <p>1. Lokales Maximum bei $x = 0$. Also $x = 1-a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ (alternativer Ansatz: $f'_{a,b}(0) = 0$)</p> <p>2. Maximum $y = 3,5$ Also muss gelten: $f_{1,b}(0) = (0+1)e^{b-0} = 3,5 \Leftrightarrow b = \ln 3,5$. Damit heißt die gesuchte Funktion: $f_{1;\ln 3,5}(x) = (x+1)e^{1,25-x}$ oder auch ohne Rundung $f_{1;\ln 3,5}(x) = 3,5 \cdot (x+1)e^{-x}$.</p> <p>Wendepunkt $W\left(1 \mid \frac{7}{e}\right)$, Hochpunkt: $(0 3,5)$.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
		10	15	
c)	$g(x) = \frac{3,5}{17,5} \cdot (x + 17,5)$ $= 0,2x + 3,5.$ <p>Es ergibt sich für die gesuchte Funktion: $g(x) = 0,2x + 3,5$.</p> <p>Die Steigung von 0,2 liegt im Bereich der geforderten Böschungsneigung.</p>	5	5	
d)	<p>Wendepunkt $W\left(1 \mid \frac{7}{e}\right) \approx (1 \mid 2,58)$.</p> <p><u>Gleichung der seeseitigen Böschung:</u></p> $h(x) = \frac{7}{e} - \frac{1}{7} \cdot (x - 1)$ $= -\frac{1}{7}x + \left(\frac{7}{e} + \frac{1}{7}\right)$ $\approx -\frac{1}{7}x + 2,72.$	5		
e)	<p>1. <u>Die Querschnittsfläche des Deichkerns vom Wendepunkt bis zur Nullstelle von h ist zu berechnen:</u></p> <p>Nullstelle von h: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 19,03$.</p> <p>Es kann mit $x = 19$ gerechnet werden.</p> <p>Damit ergibt sich für die Querschnittsfläche des Kerns:</p> $A_K = \int_1^{19} f_{1,1,25}(x) dx.$			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Bestimmung einer Stammfunktion $F_{1;1,25}$ mit Hilfe partieller Integration:</p> <p>Es gilt: $f_{1;1,25}(x) = 3,5 \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$</p> <p>Sei: $u(x) = 3,5 \cdot (x+1)$ und $v'(x) = e^{-x}$.</p> <p>Dann ergibt sich: $u'(x) = 3,5$ und $v(x) = -e^{-x}$.</p> <p>Wir erhalten folgende Stammfunktion:</p> $F_{1;1,25}(x) = -3,5 \cdot (x+2) \cdot e^{-x}.$ <p>Es gilt: $F_{1;1,25}(1) = -3,863$ und $F_{1;1,25}(19) = \frac{147}{2 \cdot e^{19}} \approx 0$.</p> <p>Damit ergibt sich für das Maß der Querschnittfläche des Deichkerns: $A_K = 3,863$.</p> <p>2. <u>Die Querschnittsfläche des Dreiecks ist zu berechnen:</u> $A_D \approx (18 \cdot 2,58) : 2 = 23,22$.</p> <p>3. <u>Die Querschnittsfläche A des aufgeschütteten Walls ist zu berechnen:</u> $A = A_D - A_K = 19,36$.</p> <p>Damit ergibt sich, dass $193,6 \text{ m}^3$ Sand-Kies-Gemisch benötigt werden.</p>			
	Gesamt:	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Gezeiten

Für die gesamte Aufgabe können Sie Ihr Wissen über Eigenschaften der Sinus-Funktion verwenden, Methoden der Differenzialrechnung sind dann kaum nötig.

Die Deutsche Bucht als Teil der Nordsee unterliegt den Gezeiten. In einem regelmäßigen Rhythmus von gut 6 Stunden verändert sich die Wassertiefe abwechselnd zu einem Hochstand (Hochwasser) und einem Niedrigstand (Niedrigwasser). Es stellen sich also an jedem Tag etwa 2 Hoch- und 2 Niedrigwasser ein.

Hinzu kommt, dass sich im Laufe eines Monats in Abhängigkeit von den Mondphasen die Hoch- und Niedrigwasserstände ändern mit jeweils zwei Maximal- und zwei Minimalwerten. Zur „Springzeit“ und in zeitlicher Nähe (ca. ± 4 Tage) sind die Hochwasserstände besonders hoch und die Niedrigwasserstände besonders niedrig und zur „Nippzeit“ und in zeitlicher Nähe sind die Hochwasserstände relativ gering und die Niedrigwasserstände relativ hoch.

Auf dem beigelegten Diagrammblatt sind drei Kurven abgebildet. Die y -Achsen zeigen an einem festen Ort (Hafen, z.B. Norderney) jeweils den Wasserstand (Pegel) in Metern bezogen auf den mittleren Wasserstand an, die x -Achse ist eine Zeitachse mit einer Einteilung in Tagen. Jeder Monat des Jahres wird mit 30 Tagen verrechnet.

a) Die Kurven 1 bis 3 auf dem beigelegten Diagrammblatt haben folgende Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \frac{3}{10} \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \qquad g(x) = \sin(12x) \qquad h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Entscheiden Sie, welche Kurve zu welcher Funktionsgleichung gehört.

Die Funktion h modelliert grob die Gezeiten in dem betreffenden Hafen.
 $x = 0$ markiert den Beginn eines Monats.

b) Bestimmen Sie innerhalb der ersten 7 Tage des Monats die genauen Zeitpunkte (in Tagen, Stunden und Minuten) und die zugehörigen Wasserstände zur Springzeit für das höchste Hochwasser und für das niedrigste Niedrigwasser.

Berechnen Sie dabei zunächst die Extremstellen der beiden Funktionen f und g im Intervall $[0;7]$, um mit diesen Ergebnissen die Hoch- und Tiefpunkte der Gezeitenfunktion h zu bestimmen.

Fortsetzung nächste Seite →

Seite 2 der Aufgabe **Gezeiten**

- c) Durch die Gezeiten entstehen Strömungen, zum Beispiel in den engen Durchfahrten zwischen den ostfriesischen Inseln. Die Stärke dieser Wasserströmungen (die für die Schifffahrt wichtig ist) wird wesentlich auch davon bestimmt, wie stark das Wasser steigt oder fällt, mit anderen Worten durch die jeweiligen Änderungsraten des Wasserstandes. Deshalb sollen hier die absolut maximalen Änderungsraten des Wasserstandes und zugehörige Zeitpunkte bestimmt werden. Dazu müssten – nach üblichem Verfahren – Nullstellen der 2. Ableitung der Funktion h (s.o. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$) ermittelt werden, was aber – wenn man exakt rechnen will – relativ schwierig bzw. umständlich ist. Nun ändert sich aber die Funktion f im Vergleich zur Funktion g relativ wenig, so dass in der Nähe jedes Zeitpunktes x_0 der Wert $f(x_0)$ näherungsweise als konstanter Faktor auf $g(x)$ wirkt.

Betrachten Sie deshalb zunächst vereinfachend Gezeitenfunktionen, bei denen Hoch- und Niedrigwasser jeweils immer den gleichen Wasserstand erreichen, bei denen also der Wasserstand zum Zeitpunkt x durch $k \cdot g(x)$ beschrieben wird mit einer Konstanten k ($k > 0$) und bestimmen Sie unter dieser Annahme die Stellen (Zeitpunkte), bei denen der Betrag der Änderungsrate des Wasserstandes maximal wird.

Bestimmen Sie nun unter diesen vielen Zeitpunkten die beiden, die benachbart zum ersten Springzeitpunkt sind, und begründen Sie, dass die dem Betrage nach absolut höchsten Änderungsraten ziemlich genau hier zu erwarten sind. Bestimmen Sie deshalb diese beiden Änderungsraten und rechnen Sie das Ergebnis auch in die Einheit cm/min um.

- d) Die Funktion f ist vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(bx+c)+d$.

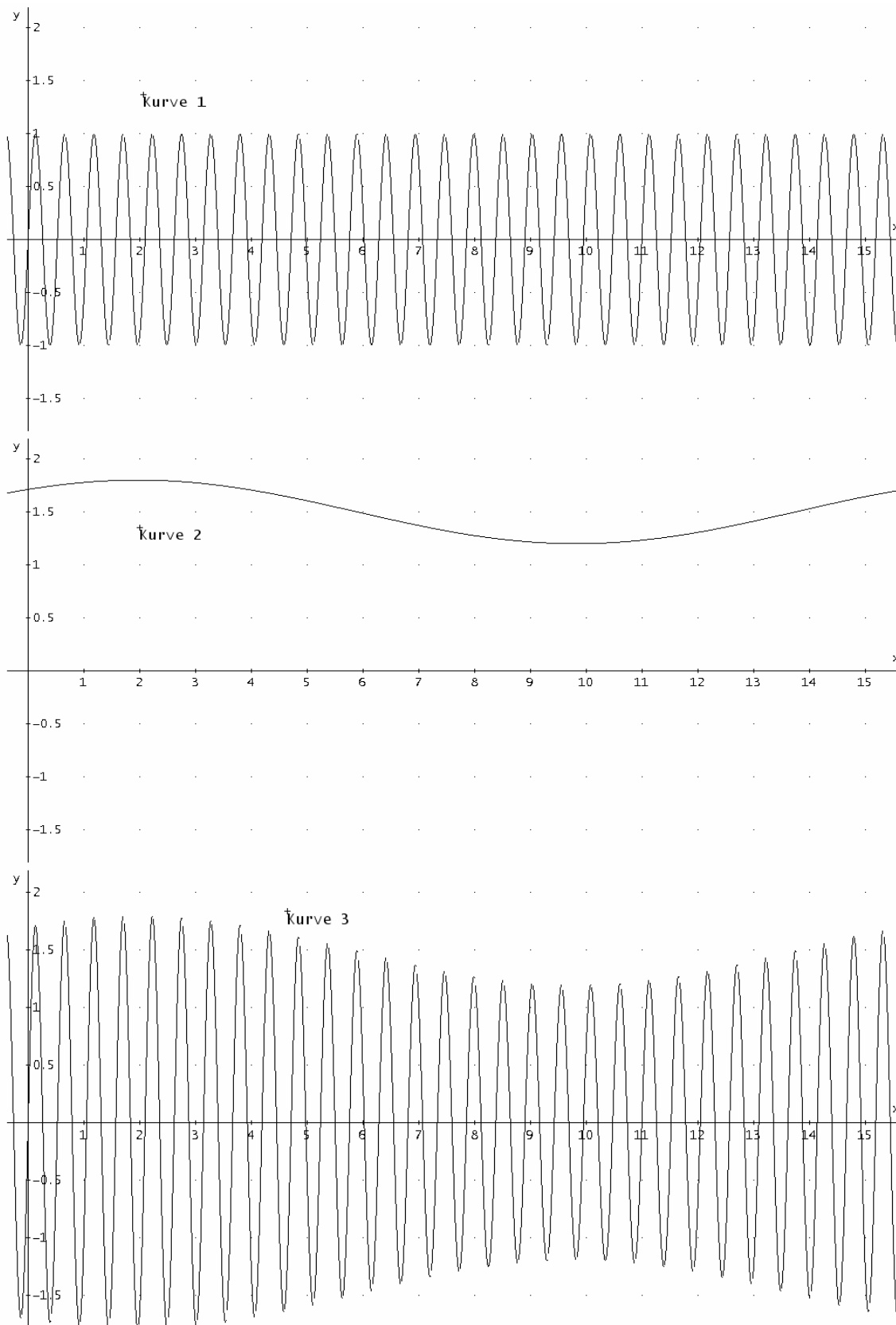
Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Variablen a , b , c und d und interpretieren Sie im Kontext der Gezeitenfunktion h die dafür gewählten Zahlen:

$$\frac{3}{10} \text{ für } a, \quad \frac{12}{30} \text{ für } b, \quad \frac{\pi}{4} \text{ für } c \quad \text{und} \quad \frac{3}{2} \text{ für } d.$$

- e) Auf Java verhalten sich die Gezeiten aufgrund der geographischen Gegebenheiten und damit verbundenen Wellenüberlagerungen völlig anders. Hier treten eintägige Gezeiten auf, das heißt, dass im Laufe eines Tages lediglich ein Hochwasser und ein Niedrigwasser verzeichnet werden. Das maximale Hochwasser beträgt 0,60 m und das minimale 0,40 m. Am ersten Tag des betrachteten Monats findet das niedrigste Hochwasser statt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die diese Gezeitenkurve wiedergibt.

Anlage zur Aufgabe „Gezeiten“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<ul style="list-style-type: none"> • g gehört zur Kurve 1. Der Graph weist auf einer Intervalllänge von 2π [Tagen] 12 Perioden auf und hat die Amplitude von 1, hat also eine Periodenlänge von $2\pi \cdot \frac{1}{12}$ [Tagen], also von gut einem halben Tag. • f gehört zur Kurve 2. Dieser Graph ist eine Sinusfunktion mit einer Periode von $2\pi \cdot \frac{30}{12}$ [Tagen] also von gut 15 Tagen, oder anders gesagt, in einer Intervalllänge von 2π (≈ 6) Tagen sind es etwas weniger als eine halbe (genau $\frac{2}{5}$) Periode. Diese Sinuskurve hat die Amplitude 0,3 und ist um 1,5 angehoben, d.h. ihre Werte schwanken zwischen 1,2 und 1,8. • h bildet das Produkt aus f und g. und stellt die Kurve 3 dar. Fasst man f als Faktor auf, der die Ausgangstidenfunktion g multiplikativ verändert, dann schwanken die Hoch- bzw. Niedrigwasser zwischen $\pm 1,2$ m und $\pm 1,8$ m. Die Nullstellen von g bleiben erhalten. Man kann auch sagen: die Amplitude wird durch f variiert (Amplitudenmodulation). 		15	
b)	<p>Die reine Sinus-Funktion hat Maxima an den Stellen $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und Minima an den Stellen $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Extreme Hoch- und Niedrigwasserstände treten zur Springzeit ein, also wenn die modulierende Funktion $f(x) = \frac{3}{10} \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}$ maximal ist.</p> <p>Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right)$ maximal ist, wenn also</p> $\frac{2}{5}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$ $x = \frac{5\pi \cdot (8k + 1)}{8}, \quad \text{d.h. } x = \dots, -\frac{35\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{45\pi}{8}, \dots$ <p>Von diesen Werten liegt nur $\frac{5\pi}{8} \approx 1,963$ in dem zu betrachtenden Zeitintervall (was auch an der entsprechenden Kurve 2 erkannt werden kann).</p> <p>Mit den gleichen Argumenten stellt man fest, dass die unmodulierte Tidenfunktion $g(x) = \sin(12x)$ Maxima (Hochwasser) hat bei</p> $x = \frac{\pi \cdot (4k + 1)}{24}, \quad \text{d.h. } x = \dots, -\frac{3\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \dots$			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>und Minima (Niedrigwasser) hat bei</p> $x = \frac{\pi \cdot (4k - 1)}{24}, \text{ d.h. } x = \dots, -\frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \dots, \frac{15\pi}{24}, \dots$ <p>Hieraus erkennt man insbesondere, dass bei $\frac{5\pi}{8} = \frac{15\pi}{24}$ Springzeit und gleichzeitig Niedrigwasser ist. Hieraus folgt (ohne Differenzialrechnung), dass zu diesem Zeitpunkt ein extremes (extrem niedriges) Niedrigwasser eintreten muss.</p> <p>Die extremen (extrem hohen) Hochwasser müssen dann die benachbarten sein, also bei $\frac{13\pi}{24} \approx 1,702$ und bei $\frac{17\pi}{24} \approx 2,225$ Umgerechnet entsprechen die ermittelten Zeitpunkte folgenden Zeiten nach Monatsbeginn:</p> <p>Springniedrigwasser: $\frac{5\pi}{8} \approx 1$ Tag 23 Stunden und 7 Minuten.</p> <p>1. Springhochwasser: $\frac{13\pi}{24} \approx 1$ Tag 16 Stunden und 50 Minuten.</p> <p>2. Springhochwasser: $\frac{17\pi}{24} \approx 2$ Tage 5 Stunden und 24 Minuten.</p> <p>Für die zugehörigen Wasserstände gilt:</p> $h\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -1,80 \text{ [m]}, \quad h\left(\frac{13\pi}{24}\right) \approx 1,798 \text{ [m]}, \quad h\left(\frac{17\pi}{24}\right) = 1,798 \text{ [m]}.$ <p><i>Bemerkung: Die Argumentation für die Springhochwasserstände ist nicht ganz vollständig, weil sich ja die Werte beider Funktionen f und g in einer Umgebung um die entsprechenden Zeitpunkte ändern. Die Änderungsraten sind für g aber stärker als für f, so dass die Ergebnisse tatsächlich exakt sind. Eine Extremwertbestimmung für die Funktion h wird also nicht erwartet.</i></p>	10	15	5
c)	<p>Die Ableitung der Wasserstandsfunktion beschreibt deren Änderungsraten. Für die Ableitung von $k \cdot g$ gilt: $(k \cdot g)'(x) = 12k \cos(12x)$. Die Kosinusfunktion hat Extremstellen bei $x = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, die Funktion $(k \cdot g)'$ also bei</p> $x = n \cdot \frac{\pi}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ <p>Das erste Maximum von f liegt bei $\frac{5\pi}{8} = \frac{7,5\pi}{12}$ (Springzeit, vgl. b), so dass die benachbarten Stellen $x_1 = 7 \frac{\pi}{12}$ und $x_2 = 8 \frac{\pi}{12}$ als Näherungswerte für die Zeitpunkte mit maximaler Änderungsrate von h in Frage kommen. Die zugehörigen Änderungsraten, kann man entsprechend obiger Argumentation mit $h'(x) \approx 12f(x)\cos(12x)$ in guter Näherung berechnen. Man erhält: $h'(x_1) \approx -21,595066$ und $h'(x_2) \approx 21,595066$.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Rechnet man so, wie es die meisten Schülerinnen und Schüler wohl tun werden, muss man h (mit der Produkt- und Kettenregel) ableiten: $h'(x) =$ $12(0,3\sin(0,4x + 0,25\pi) + 1,5)\cos(12x) + 0,12\cos(0,4x + 0,25\pi)\sin(12x)$</p> <p>Setzt man jetzt die Stellen $x_1 = 7\frac{\pi}{12}$ und $x_1 = 8\frac{\pi}{12}$ in diese Ableitung ein, so erhält man im Rahmen der hier gewählten Rundungsgenauigkeit für die beiden Extremwerte der Ableitung keinen Unterschied.</p> <p>21,595066 m/Tag \approx 1,5 cm/min. Das Wasser fällt bzw. steigt also zu diesen beiden Zeitpunkten um ca. 1,5 Zentimeter pro Minute.</p> <p><i>Bemerkung: Dass die Schülerinnen und Schüler die Werte von h' über $f \cdot g'$ in guter Näherung berechnen, ist wohl nicht zu erwarten, sondern eher die exakte Rechnung. Wenn aber ein Schüler oder eine Schülerin den Weg über die Näherung geht, sind natürlich volle Punkte für diesen Teil zu vergeben.</i></p>		10	10
d)	<p>Die Funktion f verändert periodisch die Hochwasser- und Niedrigwasserstände. Die Variable a ist die Amplitude der Sinusfunktion. Dieser Wert gibt z.B. den maximalen Unterschied zwischen Springhochwasser und Nipphochwasser jeweils zum mittleren Hochwasser von 0,3 m an.</p> <p>$\frac{2\pi}{b}$ bestimmt die Periode der Sinusfunktion, b gibt die Anzahl der Perioden im Intervall 2π an. Hier müssen etwa 2 Perioden auf einem Intervall von 30 untergebracht werden. Es gibt also innerhalb des Monatsintervalls von 30 Tagen entsprechend 2 Spring- und 2 Nippzeiten.</p> <p>d ist eine Konstante, die die Kurve um den Betrag von 1,5 nach oben anhebt. 1,5 m ist somit der mittlere Hochwasserstand während einer vollen Periode. Dadurch ist der Modulationsfaktor immer positiv und schwankt um die doppelte Amplitude a.</p> <p>c ist die Phasenverschiebung der Kurve, c verschiebt die Sinusfunktion somit in x-Richtung. Hierdurch wird der Modulationsfaktor zum Zeitpunkt 0 eingestellt: $f(0) = a \cdot \sin(c) + d \approx 1,7$.</p>	10	10	
e)	<p>Die Frequenz der Basisfunktion ist jetzt nur halb so groß wie bei den Gezeiten in der Nordsee, daher gilt: $g_{neu}(x) = \sin(6x)$. Das Hochwasser variiert mit einer Amplitude von 0,1 bei einer mittleren Höhe von 0,5 über eine volle Spring-/Nipperiode. Die Frequenz des Spring-/Nipp-Rhythmus' bleibt unverändert wie im Aufgabenteil a). Die Phasenverschiebung beträgt etwa $\frac{3\pi}{2}$, da $h_{neu}(0)$ das Minimum der Amplitudenfunktion f_{neu} und damit das niedrigste Nipphochwasser im Bereich des 1. Tages liegt.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$h_{neu}(x) = f_{neu}(x) \cdot g_{neu}(x) = \left(0,1 \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{3\pi}{2}\right) + 0,5 \right) \cdot \sin(6x).$		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

ANALYSIS 3

I.3 Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit der Gleichung $f_k(x) = x \cdot (1 - \frac{1}{k} \cdot \ln x)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f_k an.
Berechnen Sie die Nullstellen von f_k und geben Sie begründend an, für welche Werte von k die Nullstellen zwischen 0 und 1 liegen.
- b) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte von f_k in Abhängigkeit von k .
Zeigen Sie, dass der Quotient von Extremstelle und Nullstelle unabhängig von k ist.
(Zur Kontrolle: $f_k'(x) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \ln x$.)
- c) Untersuchen Sie, ob die Graphen der Schar gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte.
Weisen Sie nach, dass es ein Intervall gibt, in dem jeder beliebige Graph mit negativem k unter jedem beliebigen Graphen mit positivem k verläuft.
- d) Skizzieren Sie die drei Graphen für $k = 1$, $k = 0,5$ und $k = -0,5$ in ein Koordinatensystem.
- e) Bestimmen Sie für positive k den Inhalt $A(k)$ der Fläche, den der Graph von f_k mit der x -Achse einschließt.
Hinweis: $\lim_{c \rightarrow 0} c^2 \cdot \ln c = 0$ (Zur Kontrolle: $A(k) = \frac{e^{2k}}{4k}$)
- f) Bestimmen Sie den Wert für k , $k > 0$, für den der Flächeninhalt $A(k)$ extremal wird.
Ermitteln Sie diesen Flächeninhalt und entscheiden Sie, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.
- g) Für positive k schließen die Parallele zur x -Achse durch den Hochpunkt von f_k , die Parallele zur y -Achse durch die Nullstelle von f_k sowie die Koordinatenachsen ein Rechteck ein.
Ermitteln Sie, ob das Verhältnis, in dem der Graph von f_k dieses Rechteck teilt, von k abhängt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><u>Definitionsbereich:</u> $D = \mathbb{R}^+$</p> <p><u>Nullstellen:</u> $f_k(x)$ kann nur 0 werden, wenn der 2. Faktor den Wert 0 annimmt, da 0 selber nicht zum Definitionsbereich gehört. Der 2. Faktor nimmt den Wert Null an, genau dann wenn $x = e^k$.</p> <p>e^k ist für alle k positiv, also in der Definitionsmenge und damit auch Nullstelle. Für $k < 0$ ist $e^k < 1$, die Nullstellen liegen daher für $k < 0$ zwischen 0 und 1</p>	10	5	
b)	<p>Um die Extrem- und Wendepunkte zu bestimmen, bildet man zunächst die 1. und die 2. Ableitung.</p> <p>Für die 1. Ableitung wendet man die Produktregel an und erhält:</p> $f_k'(x) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \ln x.$ <p>Für die 2. Ableitung folgt: $f_k''(x) = -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{x}$.</p> <p>Die 1. Ableitung hat eine Nullstelle und zwar bei $x = e^{k-1}$.</p> <p>Um die Existenz der Extremstelle zu überprüfen, bildet man die 2. Ableitung an dieser Stelle und erhält $f_k''(e^{k-1}) = -\frac{e^{1-k}}{k}$. Da e^{1-k} stets positiv ist, wird dieser Term für positive k immer negativ, also liegt in diesen Fällen ein Maximum vor. Für negative k liegt entsprechend ein Minimum vor.</p> <p>Für den Funktionswert gilt: $f_k(e^{k-1}) = \frac{e^{k-1}}{k}$ und somit für die Extrempunkte: $E(e^{k-1} \frac{e^{k-1}}{k})$.</p> <p>Bildet man das Verhältnis von Null- und Extremstelle, so gilt: $\frac{x_0}{x_E} = e$, ein von k unabhängiger Wert.</p> <p>Da der Term der 2. Ableitung für alle k nicht den Wert 0 annehmen kann, gibt es keine Wendepunkte.</p>		20	
c)	<p>Wenn alle Graphen der Schar einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, dann muss die folgende Gleichung – unabhängig von k – erfüllbar sein:</p> $x \cdot (1 - \frac{1}{k_1} \cdot \ln x) = x \cdot (1 - \frac{1}{k_2} \cdot \ln x), \quad k_1 \neq k_2.$ <p>Da 0 nicht zum Definitionsbereich gehört, ist diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn gilt: $\ln(x) (\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}) = 0$. Dies ist äquivalent zu: $x = 1$ oder $k_1 = k_2$.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Also schneiden sich alle Funktionsgraphen der Schar bei $x = 1$ und nur dort.</p> <p>Da der Funktionswert dieser Stelle ebenfalls 1 ist, schneiden sich alle Graphen der Schar im Punkt $(1 1)$.</p> <p>Aus der obigen Argumentation geht noch schärfer hervor, dass sich je zwei verschiedene Graphen der Schar außer bei $x = 1$ nicht mehr schneiden.</p> <p>Es kommen als Intervalle, in dem jeder beliebige Graph mit negativem k unter jedem beliebigen Graphen mit positivem k verläuft, also nur Teilintervalle von $]0; 1[$ bzw. $]1; \infty[$ in Frage. Man kann nun an einer beliebigen Stelle „testen“, z. B. bei $\frac{1}{2}$: $f_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2k} + \frac{1}{2}$. Daraus erkennt man unmittelbar, dass dieser Funktionswert für jeden negativen Wert von k kleiner ist als der für jeden positiven Wert von k. Wegen der Stetigkeit der Funktionen f_k bleibt diese Relation auf dem ganzen Intervall $]0; 1[$ erhalten. Alle Teilintervalle von $]0; 1[$ erfüllen also die geforderte Bedingung.</p> <p><i>Alternative Argumentation:</i></p> <p>Sei x_A die Stelle, an der der Verlauf der Graphen betrachtet wird. Dann muss folgende Ungleichung untersucht werden:</p> $x_A \cdot \left(1 - \frac{1}{k_1} \cdot \ln x_A\right) \leq x_A \cdot \left(1 - \frac{1}{k_2} \cdot \ln x_A\right), \quad k_1 \neq k_2.$ <p>Aus $x_A > 0$ folgt, dass nur die Beziehung $\ln x_A \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \leq 0$ zu untersuchen ist. Geht man von dem Intervall $]0; 1[$ aus, dann ist der Logarithmus kleiner als 0. Hat k_2 ein positives Vorzeichen, dann wird mit negativem k_1 die Ungleichung erfüllt. Also verlaufen im Intervall $]0; 1[$ alle Graphen mit $k > 0$ oberhalb aller Graphen mit $k < 0$.</p>			
d)			10	5
		10		

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnet man das folgende Integral partiell: $A(k) = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{e^k} x \cdot (1 - \frac{1}{k} \ln x) dx$.</p> <p>Man setzt $v'(x) = x$ und $u(x) = 1 - \frac{1}{k} \cdot \ln x$. Dann folgt: $v(x) = \frac{x^2}{2}$ und $u'(x) = -\frac{1}{kx}$. Setzt man die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so erhält man: $(1 - \frac{1}{k} \ln x) \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{kx} \cdot \frac{x^2}{2} dx$. Das zweite Integral lässt sich elementar bestimmen und man erhält für die Stammfunktion folgenden Term: $\frac{x^2}{2} \cdot (1 - \frac{1}{k} \ln x) + \frac{x^2}{4k}$. Setzt man die Grenzen ein und berücksichtigt den angegebenen Grenzwert, so folgt $A(k) = \frac{e^{2k}}{4k}$.</p>		10	5
f)	<p>Um das gesuchte k zu erhalten, leitet man $A(k)$ mit Hilfe der Produkt-Quotienten- und Kettenregel nach k ab.</p> <p>Für die 1. und die 2. Ableitung folgt:</p> $A'(k) = \frac{e^{2k} \cdot (2k - 1)}{4k^2}$ $A''(k) = \frac{e^{2k} \cdot (2k^2 - 2k + 1)}{2k^3}$ <p>Da $k > 0$, ist diese 2. Ableitung stets positiv, denn die zur Klammer gehörende quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen. Also ist der Flächeninhalt bei $k = 0,5$ minimal. Er hat den Wert $\frac{e}{2}$.</p> <p><i>Hinweis. Hier sind auch andere Begründungen möglich.</i></p>		5	10
g)	<p>Die Parallelen bilden ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{e^{k-1}}{k}$ und e^k. Dessen Flächeninhalt beträgt $A_R(k) = \frac{e^{2k-1}}{k}$. Dann folgt für das Verhältnis:</p> $A(k) : A_R(k) = \frac{e}{4}$ <p>Dieser Wert ist von k unabhängig.</p>		5	5
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

II.1 Geradenscharen

Gegeben sind eine Ebene E und zwei Geradenscharen g_a und h_a :

$$E: x_1 + 2x_2 = 3$$
$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$
$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a-1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Berechnen Sie ein a , für das g_a parallel zu E ist.
Untersuchen Sie, ob diese Gerade g_a in der Ebene E liegt.
Berechnen Sie allgemein für alle $a \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt von g_a und E .
- b) Ermitteln Sie diejenige Gerade g_a , die E senkrecht schneidet.
- c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g_a und h_a in Abhängigkeit von a .
Beschreiben Sie, wie Sie ausgehend von den Richtungsvektoren von g_a und h_a eine Koordinatenform einer Ebene F_a ermitteln können, die g_a und h_a enthält.
Bestimmen Sie eine Koordinatenform von F_a .
Mögliches Ergebnis: $F_a: 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$
- d) Zeigen Sie, dass eine der Ebenen F_a die x_1 - x_2 -Ebene senkrecht schneidet und geben Sie den zugehörigen Wert a an.
Bestimmen Sie den Schnittwinkel dieser Ebene F_a mit E .
- e) Bestimmen Sie die prinzipielle Lage aller Geraden, die sowohl zu E als auch zu F_{-2} parallel sind und die außerdem den gleichen Abstand zu diesen beiden Ebenen haben.
Ermitteln Sie eine dieser Geraden.

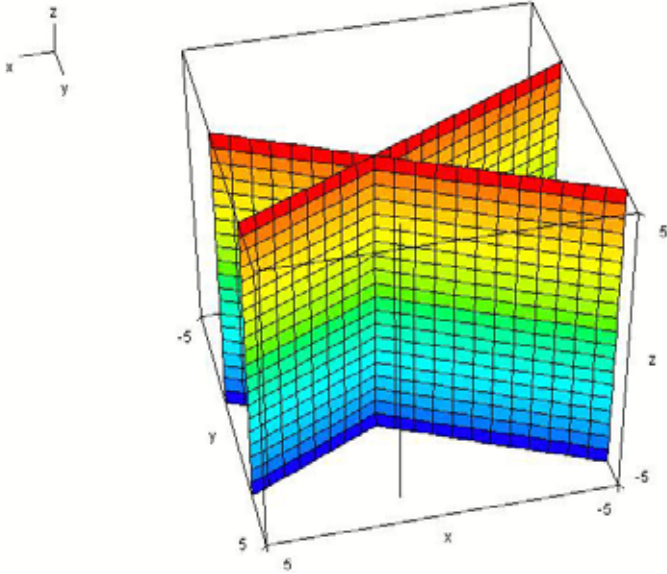
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><u>Berechnung von a:</u></p> <p>Die Gerade g_a ist parallel zu E, wenn ein Normalenvektor von E orthogonal zu einem Richtungsvektor von g_a ist.</p> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + 2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$ <p>Die Gerade $g_{-\frac{2}{3}}$ liegt in der Ebene E, denn der Stützpunkt von g_a erfüllt unabhängig von a die Ebenengleichung.</p> <p><u>Berechnung des Schnittpunkts:</u></p> <p>Die eben genannte Begründung hat auch zur Folge, dass der Stützpunkt von g_a zugleich der gesuchte Schnittpunkt ist. Für $a = -\frac{2}{3}$ liegt die Gerade ja in der Ebene E.</p> <p>Alternativ kann natürlich auch die Geradendarstellung in die Koordinatenform von E eingesetzt werden: $1 + ra + 2(1 + r(1 + a)) = 3 \Leftrightarrow 1 + ra + 2 + 2r + 2ra = 3 \Leftrightarrow r(2 + 3a) = 0$.</p> <p>Der Wert $a = -\frac{2}{3}$ ist ausgeschlossen (s.o.). Somit bestimmt $r = 0$ den Schnittpunkt $S(1 \mid 1 \mid a)$, der der Stützpunkt der Geraden ist.</p>	20	5	
b)	<p>Die Gerade g_a schneidet die Ebene genau dann senkrecht, wenn ein Richtungsvektor der Geraden parallel zu einem Normalenvektor von E ist.</p> <p>Für die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix}$ ist diese Bedingung nur mit $a = 1$ erfüllbar, d.h. g_1 ist die senkrecht schneidende Gerade.</p>		10	
c)	<p>Zur Berechnung des Schnittpunktes der Geraden kann die Gleichung</p> $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a-1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ 1+a & -1 & 1 \\ 1-a & 1 & -1 \end{pmatrix}$ <p>gelöst werden. Entweder die Lösung $r = 0 \wedge s = -1$ fällt sofort ins Auge oder es ist noch eine Umformung des LGS</p> $\begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ 1+a & -1 & 1 \\ 1-a & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} II - I \\ III + I \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} III - II \\ III - II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 0 \\ s = -1 \end{matrix}$ <p>notwendig. Der Schnittpunkt ist also $T(1 \mid 1 \mid a)$.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Die Geraden sind für keinen Wert von a identisch, denn ihre Richtungsvektoren sind für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig (nicht kollinear).</p> <p><u>Lösungsweg 1:</u></p> <p>Orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren ist jeder Normalenvektor der Ebene F_a, in der g_a und h_a liegen. Ein solcher Normalenvektor lässt sich z.B. als</p> <p>Vektorprodukt ermitteln: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a) + (1+a) \\ (-a) - 2(1-a) \\ 2(1+a) - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 2+a \end{pmatrix}.$</p> <p>Durch Multiplikation mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ erhält man die fehlende rechte</p> <p>Seite der Koordinatenform: $F_a : 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$.</p> <p><u>Lösungsweg 2:</u></p> <p>Aufstellen der Parameterform der Ebene F_a ausgehend vom Schnittpunkt T:</p> $F_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}.$ <p>Umformen in Koordinatenform ergibt z.B.:</p> $\begin{array}{l} I \quad x_1 = 1 + r \cdot a + 2s \quad 2 \cdot II - I \\ II \quad x_2 = 1 + r \cdot (1+a) + s \quad \rightarrow \\ III \quad x_3 = a + r \cdot (1-a) - s \quad 2 \cdot III + I \end{array} \quad \begin{cases} 2x_2 - x_1 = 1 + r \cdot (2+a) \\ 2x_3 + x_1 = 1 + 2a + r \cdot (2-a) \end{cases}$ <p>Weitere Umformungen führen schließlich auf die Koordinatenform der Ebene:</p> $\begin{aligned} (2x_2 - x_1) \cdot (2-a) - (2x_3 + x_1) \cdot (2+a) &= 2-a - (1+2a) \cdot (2+a) \\ (4-2a)x_2 - 2x_1 + ax_1 + (-4-2a)x_3 - 2x_1 - ax_1 &= -6a - 2a^2 \\ -4x_1 + (-2a+4)x_2 + (-2a-4)x_3 &= -6a - 2a^2 \quad :(-2) \\ \Rightarrow F_a : 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 &= 3a + a^2. \end{aligned}$			
d)	<p>Die x_1-x_2-Ebene wird genau dann senkrecht geschnitten, wenn die Normalenrichtung von F_a parallel zur x_1-x_2-Ebene ist.</p> <p>Das ist nur für $a = -2$ der Fall: $F_{-2} : 2x_1 - 4x_2 = -2$.</p> <p>Ausgehend von zwei Normalenvektoren der Ebenen wird der Winkel berechnet.</p> $\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53,1^\circ.$ <p>Der Schnittwinkel der Ebenen E und F_{-2} beträgt etwa $53,1^\circ$.</p>	5	10	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Die Ebenen E und F_{-2} sind parallel zur x_3-Achse oder – äquivalent – senkrecht zur x_1-x_2-Ebene. Ebenso müssen also die gesuchten Geraden verlaufen.</p> <p>Die beiden Ebenen E und F_{-2} schneiden die x_1-x_2-Ebene in zwei Geraden l_1 und l_2, die miteinander den in Teil d) berechneten Winkel α einschließen. Alle Geraden in Richtung der x_3-Achse, die durch eine der beiden Winkelhalbierenden von l_1 und l_2 verlaufen, haben die gewünschten Eigenschaften.</p> <p>Interpretiert man die Koordinatenformen von E und F_{-2} mit $x_3 = 0$ als Geradengleichungen, so erhält man $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$.</p> <p>Diese beiden Geraden haben als Winkelhalbierende in der x_1-x_2-Ebene die Geraden $x_2 = 1$ und $x_1 = 1$. Damit sind auch die beiden Ebenen beschrieben, in denen die gesuchten Geraden verlaufen müssen.</p> <p>Beispielgerade: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}.$</p> <p><i>Abbildung mit den Ebenen E und F_{-2} sowie der Beispielgeraden (nicht verlangt).</i></p> 			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

II.2 Sonnensegel

Über einer Terrasse soll ein dreieckiges Sonnensegel angebracht werden. Die rechteckige Terrasse kann mathematisch in der x_1 - x_2 -Ebene durch die Eckpunkte $T_1(0 | 0 | 0)$, $T_2(4 | 0 | 0)$, $T_3(4 | 8 | 0)$ und $T_4(0 | 8 | 0)$ beschrieben werden ($1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ m}$).

Die Terrasse wird an einer Seite durch eine Hauswand ($x_1 = 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$) und an einer anderen Seite durch eine Mauer ($x_1 \geq 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0$) begrenzt.

Im Punkt $A(0 | 8 | 3)$ wird das Sonnensegel an der Wand befestigt und im Punkt $B(1 | 0 | 2)$ an der Mauer. Im Punkt $C(4 | 4,5 | 2)$ wird das Sonnensegel an einer senkrechten Stütze am Terrassenrand angebracht. Die drei Befestigungspunkte A , B und C sind zugleich die Eckpunkte des dreiecksförmigen Sonnensegels.

a) Zeichnen Sie die Terrasse und das Sonnensegel in das beigefügte Koordinatensystem ein.

b) Das Sonnensegel soll die Form eines gleichschenkligen Dreiecks haben.

Zeigen Sie, dass diese Forderung mit dem oben gegebenen Punkt C erfüllt ist.

Untersuchen Sie, ob diese Forderung auch mit anderen Punkten C erfüllt werden kann, wobei C weiterhin am Rand der Terrasse gegenüber der Hauswand liegen soll, und beschreiben Sie gegebenenfalls, wie Sie alle weiteren Möglichkeiten für einen solchen Punkt bestimmen können. Die Rechnungen sollen Sie nicht durchführen.

c) Bestimmen Sie die Fläche des Sonnensegels.

d) Bestimmen Sie den Winkel, den das Sonnensegel zur Horizontalen einnimmt.

e) Paralleles Sonnenlicht strahlt zu einem festen Zeitpunkt in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

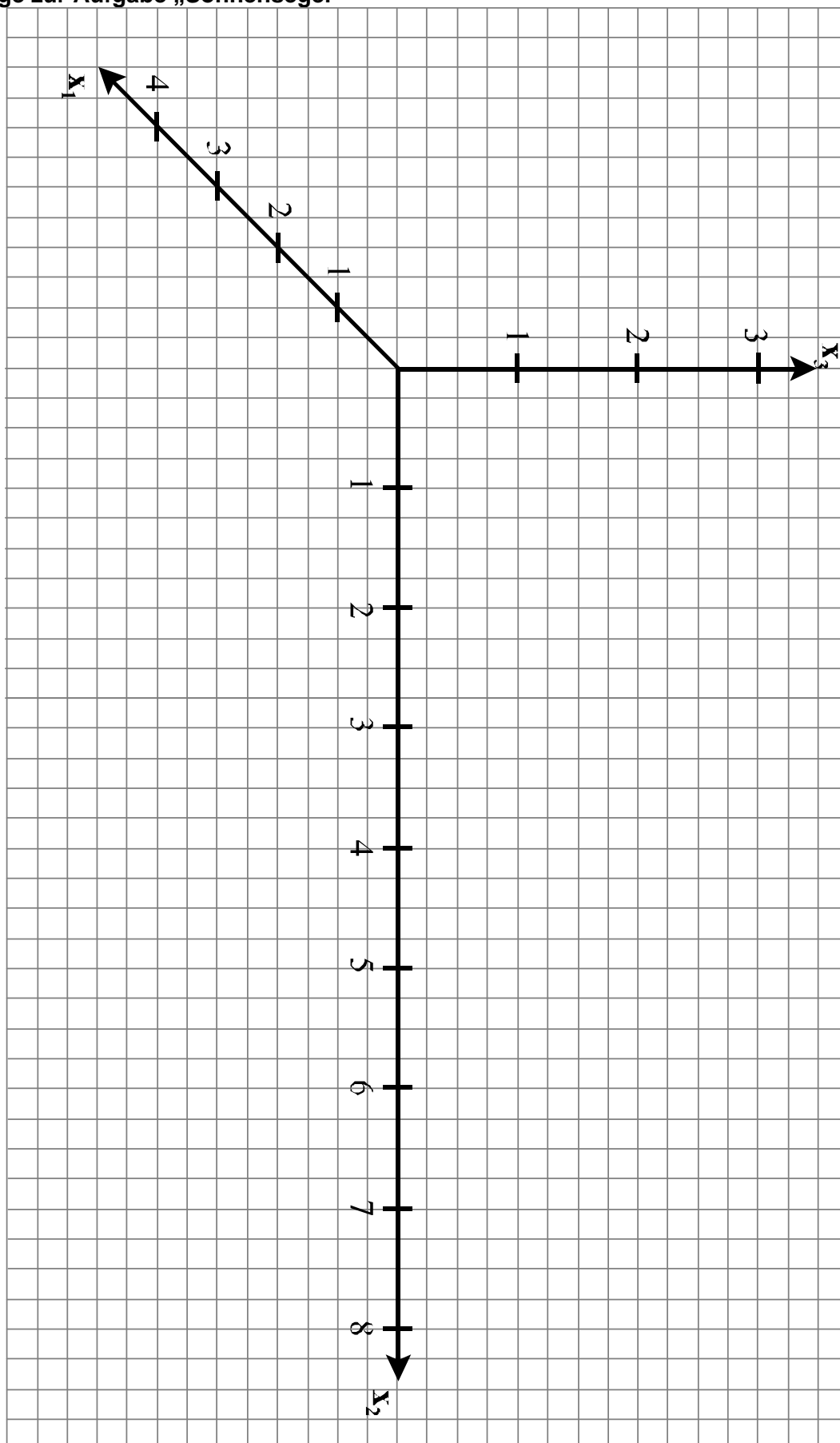
Der Schatten des Sonnensegels auf dem Terrassenboden ist ein Vieleck. Zwei Eckpunkte des Schattens sind $S_1(1,17 | 0 | 0)$ und $S_2(0,33 | 0 | 0)$.

Bestimmen Sie alle weiteren Eckpunkte des Schattens und zeichnen Sie den Schatten in das Koordinatensystem ein.

Geben Sie bitte die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen (cm) gerundet an.

Beschreiben Sie Form und Lage der Schatten des Sonnensegels auf der Hauswand und auf der Mauer.

Anlage zur Aufgabe „Sonnensegel“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><i>Siehe auch die Anlage mit der Lösungsschablone.</i></p>	10		
b)	<p><u>Dreieck ABC ist gleichschenkelig:</u></p> <p>Hier sind die Kanten CA und CB gleich lang:</p> $ \overline{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{29,25} \approx 5,41 \quad \text{und} \quad \overline{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{29,25}$ <p>Die Kante AB ist etwa 8,12 m lang.</p> <p><u>Untersuchung, ob weitere Lösungen existieren:</u></p> <p>Für ein gleichschenkliges Dreieck ABC kann es 3 Möglichkeiten geben:</p> <ol style="list-style-type: none"> Die Kanten AB und AC sind gleichlang. Die Kanten BC und AC sind gleichlang. Die Kanten AB und CB sind gleichlang. <p>Die Forderung der Gleichschenkligkeit kann auch von anderen Stützpunkten C erfüllt werden.</p> <p>Von C ist die x_1-Koordinate (= 4) gegeben. Legt man auch die Höhe des Stützpunktes fest (z.B. $x_3 = 2$), so gibt es genau zwei weitere Möglichkeiten, andernfalls unendlich viele.</p> <p>Man erhält eine Lösung, wenn man die Kantenlängen etwa von i) berechnet und gleichsetzt. Dabei ist $C(4 x_2 2)$ bzw. $C(4 x_2 x_3)$.</p>	20		

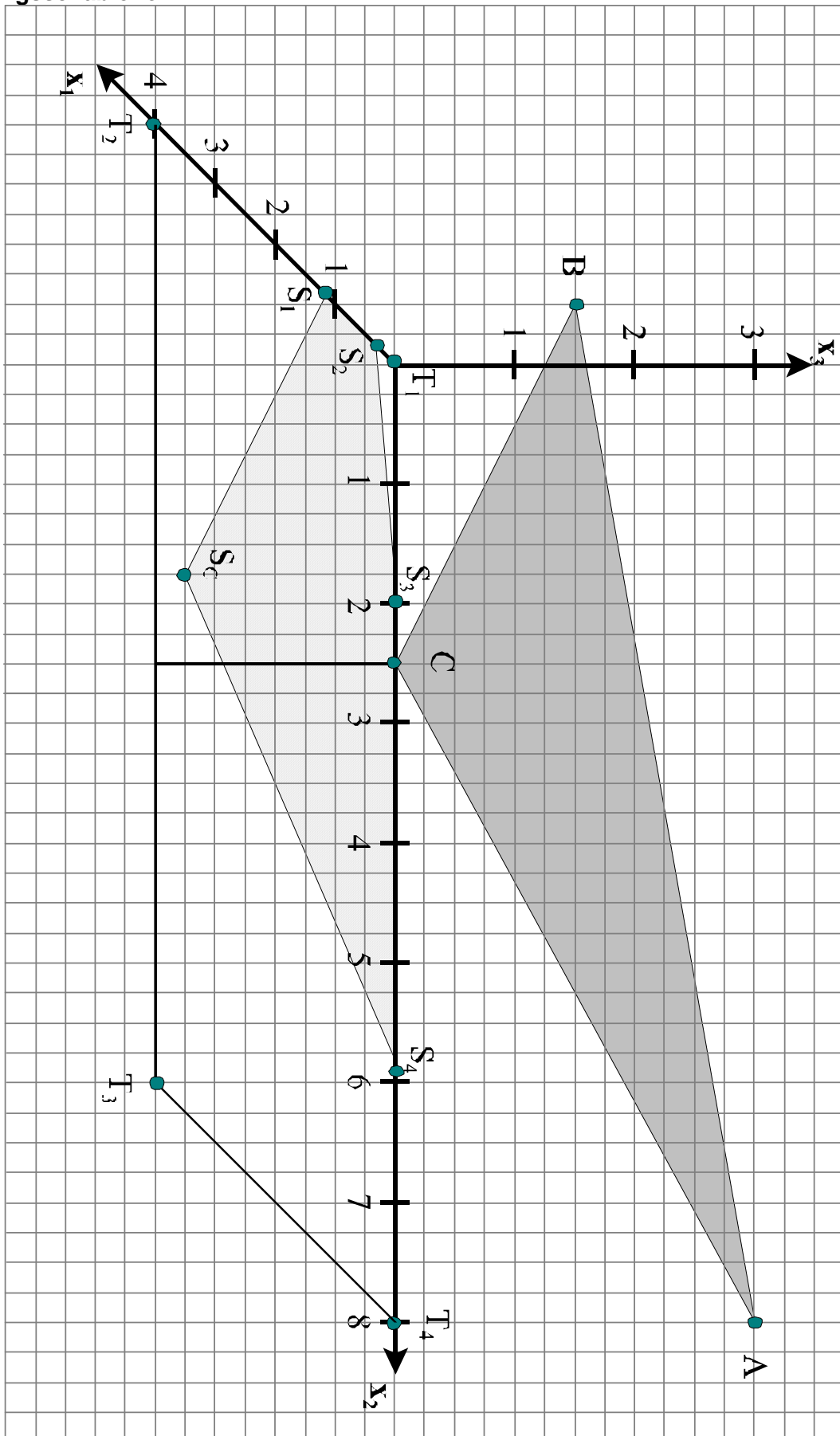
Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	<p><u>1. Lösungsmöglichkeit:</u></p> <p>Nach b) ist die Kante AB die Basis des gleichschenkligen Dreiecks, der Fußpunkt der Höhe auf der Basis also der Mittelpunkt der Basis: $H(0,5 4 2,5)$. Die Länge der Höhe ist $\sqrt{12,75}$, die Länge der Basis $\sqrt{66}$, denn</p> $ \overline{HC} = \left \begin{pmatrix} 4 \\ 4,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right = \sqrt{12,75} \quad \text{und} \quad \overline{AB} = \left \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right = \sqrt{66}$ <p>Das Flächenmaß ist daher $F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{66} \cdot \sqrt{12,75} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{841,5} \approx 14,50$</p> <p><u>2. Lösungsmöglichkeit (Berechnung mit Hilfe des Kreuzproduktes):</u></p> $F_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{BA} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \left \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \frac{1}{2} \left \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ -28,5 \end{pmatrix} \right = \frac{1}{2} \sqrt{841,5} \approx 14,50.$ <p>Das Flächenmaß des Sonnensegels beträgt etwa $14,50 \text{ m}^2$.</p>		15	
d)	<p>Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Ein Normalenvektor zur horizontalen Ebene ist $\vec{n}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Ebene E des Sonnensegels wird durch die Punkte A, B und C aufgespannt. Ein Normalenvektor \vec{n} von E steht senkrecht auf den Richtungsvektoren von E, also muss gelten:</p> $\vec{n} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \wedge \vec{n} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow n_1 - 8n_2 - n_3 = 0 \wedge 4n_1 - 3,5n_2 - n_3 = 0.$ <p>Ein Normalenvektor von E ist damit z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -19 \end{pmatrix}$.</p> <p>Den Winkel zwischen den Normalenvektoren erhält man aus:</p> $\cos \alpha = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{n}_H }{ \vec{n} \cdot \vec{n}_H } \Leftrightarrow \cos \alpha = 0,9825... \Rightarrow \alpha \approx 10,7^\circ.$ <p>Der Winkel zwischen dem Sonnensegel und der Horizontalen beträgt also etwa $10,7^\circ$.</p>		15	
e)	<p>Eine Lösungsmöglichkeit ist:</p> <p>Es werden zunächst die Schattenpunkte von A, B und C auf der x_1-x_2-Ebene ohne Berücksichtigung der Hauswand bzw. Mauer bestimmt, da sich die Schattenfläche auf der Terrasse durch die Wände nicht verändert. Die Schattenpunkte ergeben sich als Schnittpunkte der Lichtgeraden durch die Eckpunkte des Sonnensegels mit der x_1-x_2-Ebene. Beispielrechnung für den Schattenpunkt S_A von A:</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Lichtgerade durch A: $g_A: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$</p> <p>Der Schnitt mit der x_1-x_2-Ebene ($x_3 = 0$) ergibt mit</p> $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = \frac{3}{4} \wedge x_1 = -0,75 \wedge x_2 = 6,5 \text{ den Schattenpunkt von A:}$ <p>$S_A(-0,75 6,5 0)$. (Liegt nicht auf der Terrasse!)</p> <p>Entsprechend werden die Schattenpunkte von B und C bestimmt:</p> <p>$S_B(0,5 -1 0)$ (liegt nicht auf der Terrasse!),</p> <p>$S_C(3,5 3,5 0)$ (liegt auf der Terrasse!).</p> <p>Da nur S_C auf der Terrasse liegt, müssen noch die Eckpunkte auf der x_1- und x_2-Achse bestimmt werden:</p> <p>$S_1(1,17 0 0)$ und $S_2(0,33 0 0)$ ergeben sich als Schnittpunkte der x_1-Achse mit der Geraden durch S_C und S_B bzw. der Geraden durch S_B und S_A und sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben.</p> <p>Bestimmung des Schnittpunktes S_3 der x_2-Achse mit der Geraden durch S_B und S_A:</p> $\text{Gerade durch } S_B \text{ und } S_A: g_{SBA}: \vec{x} = \vec{s}_B + r \cdot (\vec{s}_A - \vec{s}_B) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1,25 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$ <p>Der Schnitt mit der x_2-Achse ergibt mit</p> $\begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1,25 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 0,4 \wedge x_2 = 2 \text{ den Punkt } S_3(0 2 0).$ <p>Entsprechend wird S_4 als Schnittpunkt der x_2-Achse mit der Geraden durch S_A und S_C bestimmt zu $S_4(0 5,97 0)$.</p> <p>Die Schattenfläche ist also ein unregelmäßiges Fünfeck, das durch die Eckpunkte S_C, S_1, S_2, S_3 und S_4 beschrieben wird. (Zeichnung siehe Teil a) und Anlage.)</p> <p><u>Form und Lage der Schatten:</u></p> <p>Da sich der Punkt A auf der Hauswand befindet, also gleich seinem Schattenpunkt ist, bildet er mit S_3 und S_4 einen dreieckigen Schatten auf der Wand.</p> <p>Ebenso liegt der Punkt B auf der Mauer, so dass er mit S_1 und S_2 ebenfalls einen dreieckigen Schatten auf der Mauer bildet.</p>	10	10	20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Lösungsschablone



Stochastik 1

III.1 Zufallszahlen

Ein Zufallsexperiment liefert Zufallsziffern von 0 bis 9 gleichverteilt mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{10}$ für jede Ziffer. Das Zufallsexperiment werde 100-mal unabhängig wiederholt.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 genau 10-mal erscheint.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 mehr als 14-mal erscheint.

Otto hat ein neues Computerprogramm erhalten, von dem der Programmierer behauptet, dass jeder Programmdurchlauf 100 Zufallsziffern (von 0 bis 9) jeweils gleichverteilt und unabhängig erzeugt. Nachdem er mit dem Programm etwas gespielt hat, ist er skeptisch, ob das Programm das leistet, was es verspricht.

Otto interessiert nur die Häufigkeit der Sechsen, weil er dieses Programm für ein Glücksspiel benutzen will. Auf keinen Fall dürfen zu viele Sechsen fallen. Er vermutet aber, dass dies der Fall ist.

Es soll im Weiteren angenommen werden, dass die Realisierung der einzelnen Zufallsziffern zumindest voneinander stochastisch unabhängig ist.

- Otto will seine Vermutung (Hypothese), dass zu viele Sechsen vom Computer ausgegeben werden, mit einem Hypothesentest auf dem 5%-Niveau signifikant nachweisen. Als Nullhypothese wählt er die Annahme, dass die Ziffer 6 jeweils – wie vom Programmierer behauptet – mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ erscheint.

Beschreiben Sie, wie Otto vorgehen sollte, und ermitteln Sie zu Ihrem Test unter der Annahme der Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art).

Warum lässt sich unter der Annahme der Alternativhypothese keine sinnvolle Aussage machen über die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich nicht verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art)? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Otto führt den Test durch, erhält aber kein signifikantes Ergebnis. Was bedeutet dies und welche Schlussfolgerungen kann er daraus ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten.

Otto überlegt, ob die Behauptung des Programmierers nicht doch zutrifft. Er versucht daher, mit hoher Sicherheit zu begründen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechsen zumindest kleiner als 0,12 ist. Dazu will er hintereinander 50 Programmdurchläufe durchführen und wieder die Gesamtanzahl der Sechsen auswerten.

- Bestimmen Sie dazu einen Hypothesentest auf dem 1%-Niveau.
Interpretieren Sie den Fall, dass auch hier kein signifikantes Ergebnis auftritt.

Anlage zur Aufgabe „Zufallszahlen“

Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $n = 100$

$k \backslash p$	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,058	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,117	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,206	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,321	0,010	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,451	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,583	0,043	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,703	0,078	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,802	0,130	0,025	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,876	0,200	0,047	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,927	0,287	0,080	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,960	0,388	0,129	0,011	0,000	0,000	0,000	0,000
16	0,979	0,494	0,192	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000
17	0,990	0,599	0,271	0,038	0,002	0,000	0,000	0,000
18	0,995	0,696	0,362	0,063	0,005	0,000	0,000	0,000
19	0,998	0,780	0,460	0,100	0,009	0,001	0,000	0,000
20	0,999	0,848	0,559	0,149	0,016	0,002	0,000	0,000
21	1,000	0,900	0,654	0,211	0,029	0,005	0,000	0,000
22	1,000	0,937	0,739	0,286	0,048	0,009	0,000	0,000
23	1,000	0,962	0,811	0,371	0,076	0,016	0,000	0,000
24	1,000	0,978	0,869	0,462	0,114	0,028	0,001	0,000
25	1,000	0,988	0,913	0,553	0,163	0,046	0,001	0,000
26	1,000	0,994	0,944	0,642	0,224	0,071	0,002	0,000
27	1,000	0,997	0,966	0,722	0,296	0,107	0,005	0,000
28	1,000	0,999	0,980	0,792	0,377	0,152	0,008	0,000
29	1,000	0,999	0,989	0,850	0,462	0,209	0,015	0,000
30	1,000	1,000	0,994	0,896	0,549	0,277	0,025	0,000

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Der Tabelle entnimmt man: $B\left(\frac{1}{10}, 100, 10\right) \approx 0,132$.</p> <p>Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs genau 10-mal erscheint, ca. 13 %.</p>	10		
b)	<p>Der Tabelle entnimmt man: $1 - \sum_{i=0}^{14} B\left(\frac{1}{10}, 100, i\right) \approx 0,073$.</p> <p>Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs mehr als 14-mal erscheint, ca. 7,3 %.</p>	10		
c)	<p>Man sollte die Hypothese $H_0: p = 0,1$ gegen die Hypothese $H_1: p > 0,1$ rechtsseitig testen.</p> <p>Aus b) wissen wir $1 - \sum_{i=0}^{14} B\left(\frac{1}{10}, 100, i\right) \approx 0,073$.</p> <p>Wir berechnen außerdem: $1 - \sum_{i=0}^{15} B\left(\frac{1}{10}, 100, i\right) \approx 0,04$.</p> <p>Aus diesen Ergebnissen folgt, dass man den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese so wählen sollte, dass sie abgelehnt wird, wenn die Anzahl der Sechsen größer als 15 ausfällt, und dass die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art ca. 4 % beträgt, also insbesondere kleiner als 5 % ist.</p> <p>Über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art lässt sich deshalb keine Aussage machen, weil H_1 sich aus vielen (sogar kontinuierlich unendlich vielen) Fällen zusammensetzt (H_1 ist eine <u>zusammengesetzte</u> Hypothese).</p> <p><i>Bemerkung: Die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art wäre umso größer, je näher die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Sechs bei 10 % liegt.</i></p>		25	5
d)	<p>Otto hat bei seinem Versuch also zu wenig (weniger als 16) Sechsen erhalten. Bei diesem Ausgang lässt sich über die interessierende Wahrscheinlichkeit für das einzelne Auftreten einer Sechs gar keine begründete Aussage machen, insbesondere ist aus dem Testergebnis die Aussage jetzt nicht zu begründen, dass der Zufallszahlen-Generator in Bezug auf das Auftreten der Sechs die Anforderungen erfüllt (und zwar hauptsächlich deshalb nicht, weil sich keine Aussage über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art machen lässt (vgl. c)).</p>	15		

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p>Otto sollte nun die Hypothese $H_0: p = 0,12$ gegen die Hypothese $H_1: p < 0,12$ linksseitig testen.</p> <p>Die Anzahl X der Sechsen ist unter der Annahme H_0 annähernd normalverteilt mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.</p> <p>Mit $n = 5000$ und $p = 0,12$ erhält man: $\mu = 600$ und $\sigma = \sqrt{528}$.</p> <p>Die Zufallsvariable $N = \frac{X - 600 + 0,5}{\sqrt{528}}$ ist also (annähernd) standard-normalverteilt.</p> <p>Wir lösen mit Hilfe der Tabelle der Normalverteilung die Gleichung $P(N < -x) = 0,01$ bzw. $P(N < x) = 0,99$ und erhalten: $x \approx 2,33$.</p> <p>Um eine Grenze m für den Ablehnungsbereich zu finden, lösen wir die Gleichung $\frac{m - 600 + 0,5}{\sqrt{528}} = -2,33$ Also $m \approx 545,96$.</p> <p>Für $X \leq 545$ gilt also mit absteigender Grenze zum ersten Mal: $P(X \leq 545) \leq 0,01$.</p> <p>Wenn weniger als 546 Sechsen vom Computer simuliert werden, sollte also die Hypothese H_0 verworfen werden.</p> <p>Wenn jetzt keine Signifikanz vorliegt, wenn also mehr 545 Sechsen simuliert werden, könnte man das Ergebnis wieder unter der Perspektive von Aufgabenteil c) betrachten und fragen, ob denn jetzt die Hypothese H_0, dass der Zufallsgenerator exakt das tut, was versprochen wurde, verworfen werden kann.</p> <p>Dies entspricht zwar nicht der „reinen Lehre“, aber gängiger Praxis.</p> <p>Eigentlich sollte die Testplanung immer <u>vor</u> Durchführung der Stichprobenziehung erfolgen!</p> <p>Die Anzahl Y der Sechsen ist unter der Annahme H_0 (aus Teil c)) wieder annähernd normalverteilt mit $\mu = 500$ und $\sigma = \sqrt{450}$.</p> <p>Mit einem Ablehnungsbereich $Y > 545$ kann die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art durch $P(Y > 545 / H_0)$ berechnet werden:</p> $P(Y > 545 / H_0) = P\left(N > \frac{545 - 500 + 0,5}{\sqrt{450}}\right) \approx P(N > 2,14)$ $= 1 - P(N \leq 2,14) \approx 1 - 0,9838 \approx 1,6 \%$ <p>Dieser Wert ist so klein, dass auch im Fall von mehr als 545 simulierten Sechsen mit Signifikanz (zumindest auf dem 5%-Niveau) behauptet werden kann, dass der Zufallsgenerator mit mehr als 10 % Wahrscheinlichkeit im Einzelexperiment eine Sechse liefert und insofern für Otto unbrauchbar ist.</p>			
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Stochastik 2

III.2 Fehlersuche

In der Reparaturabteilung einer großen Firma muss recht oft ein bestimmter defekter Gerätetyp wieder Instand gesetzt werden. Aus längerer Erfahrung ist bekannt, dass es nur 3 verschiedene Ursachenfelder gibt und dass ein Fehler im Bereich A mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %, ein Fehler im Bereich B mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % und ein Fehler im Bereich C mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % auftritt. Mehr als ein Fehler an ein- und demselben Gerät tritt (so gut wie) nie auf. Wenn man also einen Fehler gefunden und behoben hat, funktioniert das Gerät wieder.

Die Kosten der Instandsetzung (Fehlersuche und Reparatur) entstehen fast ausschließlich durch die Arbeitszeit, die für die Fehlersuche aufgebracht werden muss. Das Suchen nach der Fehlerquelle muss für die 3 möglichen Ursachenfelder nacheinander erfolgen, wobei die Reihenfolge frei wählbar ist. Die Kosten sind bei jedem Bereich unabhängig davon, ob der Fehler tatsächlich in diesem Bereich liegt oder nicht, und betragen 100 € für Bereich A, 10 € für Bereich B und 5 € für Bereich C. Die Fehlersuche ist bei jedem möglichen Ursachenfeld so gut, dass ein Übersehen des Fehlers nicht vorkommt; allerdings muss der Fehler im jeweiligen Bereich genau lokalisiert werden. Wenn also 2 Bereiche erfolglos durchsucht sind, muss der 3. Bereich auch durchsucht werden.

- a) Es werde zuerst in der Reihenfolge A-B-C nach dem Fehler gesucht.
Berechnen Sie für jeden der drei Fehlerursachen die Kosten, die bei der Suche entstehen.
Berechnen Sie dann den Erwartungswert der Kosten, die bei dieser Fehlersuche entstehen. Bedenken Sie dabei, dass nicht weitergesucht werden muss, wenn man einen Fehler gefunden und behoben hat.
- b) Bestimmen Sie nun für jede der weiteren fünf möglichen Suchreihenfolgen die zu erwartenden Suchkosten und geben Sie die kostengünstigste Suchreihenfolge und den zugehörigen Erwartungswert an.
- c) Begründen Sie durch eine Plausibilitätsbetrachtung, warum man bei der Fehlersuche nicht mit A beginnen sollte, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler im Bereich A auftritt, doch bei weitem am größten ist.

Ein Mitarbeiter schlägt in Ergänzung des Verfahrens als ersten Schritt ein verkürztes Suchverfahren für den Bereich A vor, das nur noch 20 € kostet. Es findet allerdings nur die Hälfte der Fehler im Bereich A.

Wenn der Fehler in diesem ersten Schritt nicht gefunden wurde, dann soll mit dem bisherigen Verfahren in der Reihenfolge B-C-A weitergesucht werden.

- d) Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass bei der verkürzten Suche in A der Fehler nicht gefunden wird, die drei bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Fehler bei A, B oder C liegt.
- e) Begründen Sie, dass das neue Verfahren sinnvoll ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Wenn der Fehler bei A liegt, wird nur der Bereich A durchsucht und es entstehen 100 €Kosten.</p> <p>Wenn der Fehler bei B liegt, wird erst der Bereich A und dann nur noch der Bereich B durchsucht und es entstehen 110 €Kosten.</p> <p>Wenn der Fehler bei C liegt, werden alle drei Bereiche durchsucht und es entstehen 115 €Kosten.</p> <p>Da die Wahrscheinlichkeiten für diese drei Fälle bekannt sind, kann man den Erwartungswert K der Durchsuchungskosten ausrechnen:</p> $E(K) = 0,8 \cdot 100 + 0,15 \cdot 110 + 0,05 \cdot 115 = 102,25 .$ <p>Wenn man also in der Reihenfolge A-B-C durchsucht, betragen die erwarteten Kosten (Erwartungswert) 102,25 €</p> <p><i>Bemerkung:</i> Man kann auch die Kosten nach den Bereichen trennen und als einzelne Zufallsvariable auffassen, die dann addiert werden.</p> <p>Dann erhält man das gleiche Ergebnis auf folgende Weise:</p> $E(K) = 1 \cdot 100 + 0,2 \cdot 10 + 0,05 \cdot 5 = 102,25 .$	20		
b)	<p>Für die 5 weiteren Reihenfolgen, erhält man entsprechen der Rechnung aus a) folgende Kostenerwartungswerte (in Euro):</p> <p>ACB $100 + 0,2 \cdot 5 + 0,15 \cdot 10 = 102,50.$</p> <p>BAC $10 + 0,85 \cdot 100 + 0,05 \cdot 5 = 95,25.$</p> <p>BCA $10 + 0,85 \cdot 5 + 0,8 \cdot 100 = 94,25.$</p> <p>CAB $5 + 0,95 \cdot 100 + 0,15 \cdot 10 = 101,50.$</p> <p>CBA $5 + 0,95 \cdot 10 + 0,8 \cdot 100 = 94,50.$</p> <p>Die kostengünstigste Suchreihenfolge ist also BCA mit den erwarteten Kosten von 94,25 €</p>	5	20	
c)	<p>Wenn man mit A beginnt, hat man zwar die größte Chance den Fehler im ersten Schritt zu finden, aber man hat auch mit Sicherheit die hohen Kosten von 100 €</p> <p>Wenn man nicht mit A beginnt, kommt man in immerhin 20% der Fälle mit erheblich niedrigeren Kosten aus.</p> <p><i>Bemerkung:</i> Hier sind sehr unterschiedliche Argumentationen denkbar, aber das obige Kernargument muss erkennbar sein.</p>		15	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Es seien A, B und C die Ereignisse, dass der Fehler in dem entsprechenden Bereich liegt. N sei das Ereignis, in der Voruntersuchung den Fehler nicht zu finden.</p> <p>Gesucht sind: $P(A N)$, $P(B N)$, $P(C N)$.</p> <p><u>Lösung mit dem Satz von Bayes:</u> $P(A N) = \frac{P(A) \cdot P(N A)}{P(N)} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,6} = \frac{2}{3}$.</p> <p>Wenn man den Wert von $P(N)$ nicht sofort sieht, kann man den Nenner oben natürlich auch stur nach Bayes (bzw. dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit) wie folgt ausrechnen:</p> $P(N) = P(A) \cdot P(N A) + P(B) \cdot P(N B) + P(C) \cdot P(N C)$ $= 0,8 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 1 + 0,05 \cdot 1 = 0,6$ <p>Entsprechend erhält man:</p> $P(B N) = \frac{P(B) \cdot P(N B)}{P(N)} = \frac{0,15 \cdot 1}{0,6} = \frac{1}{4}$ $P(C N) = \frac{P(C) \cdot P(N C)}{P(N)} = \frac{0,05}{0,6} = \frac{1}{12}$ <p><u>Lösung mit idealisierter Simulation:</u></p> <p>Wir führen gedanklich das ganze Zufallsexperiment z. B. 100-mal durch und verteilen die relativen Häufigkeiten exakt wie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.</p> <p>Von den 100 Geräten wird bei 40 der Fehler bereits in der Voruntersuchung gefunden und 60 durchlaufen die bisherige Untersuchung: $P(N) = 0,6$.</p> <p>Da 80 der 100 Geräte den Fehler im Bereich A auf weisen, der bei 40 aber bereits in der Voruntersuchung entdeckt wurde, weisen noch 40 diese Fehlerart auf. Daher ist $P(A N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.</p> <p>15 der Geräte weisen den Fehler im Bereich B und 5 im Bereich C auf, und somit gilt $P(B N) = \frac{P(B)}{P(N)} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ und $P(C N) = \frac{P(C)}{P(N)} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$, denn Fehler in den Bereichen B und C werden von der Voruntersuchung nicht erfasst.</p>			
			20	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	<p><u>1. Lösungsweg:</u></p> <p>Es entstehen mit Sicherheit die Kosten der Voruntersuchung von 20 €</p> <p>Zusätzlich entstehen mit 60% Wahrscheinlichkeit, die Kosten der Hauptuntersuchung, für die wir den bedingten Erwartungswert einsetzen, d.h. für die einzelnen Fälle verwenden wir die in d) berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten.</p> <p>Da die Untersuchungsreihenfolge B-C-A ist, gilt für die erwarteten Zusatzkosten entsprechend der Rechnungen in b) (in Euro):</p> $E(Z) = 10 + \frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 100 \approx 80,42 .$ <p>Insgesamt sind also Kosten von 68,25 € beim modifizierten Verfahren zu erwarten:</p> $E(K) \approx 20 + 0,6 \cdot 80,42 \approx 68,25 .$ <p>Rechnet man hier mit dem exakten Wert von $E(Z)$, so ergibt sich $E(K) = 68,25$.</p> <p><u>2. Lösungsweg:</u></p> <p>Wir betrachten das folgende Baumdiagramm:</p> <p>Dann gilt: $E(K) = 0,4 \cdot 20 + 0,15 \cdot 30 + 0,05 \cdot 35 + 0,4 \cdot 135 = 68,25$.</p> <p>Die erwarteten Kosten sind also noch deutlich geringer als das in b) bestimmte Minimum.</p>			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20