Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2006/2007

8. Februar 2007, 9.00 Uhr

Leistungskurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, Technische Gymnasien

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **300 Minuten.** Eine Einlesezeit von bis zu 30 Minuten kann gewährt werden. In dieser Zeit dürfen die Aufgaben aber noch nicht bearbeitet werden.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an B 1-Z faxen!

Behörde für Bildung und Sport
B 1-Z

Fax 42 79 67-006

Schulchiffre:

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Leistungskurs **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: ________________

Unterschrift: ____________________________________

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte	Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 285	≥ 95 %	15	≥ 165	≥ 55 %	7
≥ 270	≥ 90 %	14	≥ 150	≥ 50 %	6
≥ 255	≥ 85 %	13	≥ 135	≥ 45 %	5
≥ 240	≥ 80 %	12	≥ 120	≥ 40 %	4
≥ 225	≥ 75 %	11	≥ 99	≥ 33 %	3
≥ 210	≥ 70 %	10	≥ 78	≥ 26 %	2
≥ 195	≥ 65 %	9	≥ 57	≥ 19 %	1
≥ 180	≥ 60 %	8	< 57	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2007

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre			**BeBo EKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Abiturprüfung 2007

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre			**BeBo ZKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

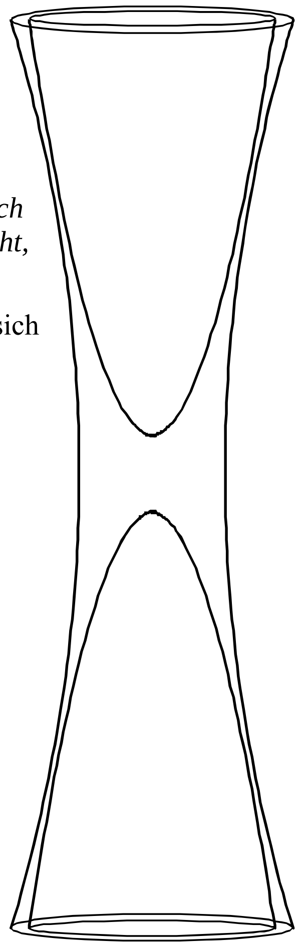
Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

ANALYSIS 1

I.1 Designervase



Die Firma *Function in Life* bittet ihre Designer, einen Entwurf für die „ultimative Vase“ einzureichen. Diese Vase soll auf einer Wohnkultur-Messe ausgestellt werden und eine „ideale mathematische Ästhetik“ aufweisen. Der Firmensprecher erklärt dazu:

„Die <u>ideale</u> Vase ist nicht nur rotationssymmetrisch; sie ist auch symmetrisch zwischen der oberen und unteren Hälfte, das heißt, wenn man sie umdreht, ändert sich ihr Aussehen nicht.“

Auf die Frage nach der Größe der Vase sagt der Firmensprecher, er wünsche sich eine Gesamthöhe von 12 dm, und der maximale Durchmesser der Vase solle zwischen 3 dm und 4 dm liegen. Das sei zwar etwas kippelig, aber sehr ästhetisch.

Die Designer sollen also eine mathematische Modellierung mit ästhetisch ansprechenden Funktionen vornehmen und die Vase als Rotationskörper von geeigneten Kurven um die x-Achse betrachten; sie brauchen eine Außenkurve mit der Funktion f_a und eine Innenkurve mit der Funktion f_i. Der durch diese Kurven begrenzte Raum soll aus Glas bestehen.
Nach heftigen Diskussionen einigen sich die Designer darauf, folgende Funktionen zu verwenden (alle Maße sind weiterhin in dm):

$$f_a(x) = 1 + \frac{1}{40}x^2 \quad \text{und} \quad f_i(x) = \sqrt{\frac{|x| - 0{,}5}{2}}\,.$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_i an und zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen für $x \in [-6, 6]$.
   Bestätigen Sie, dass die Rotation der Graphen von f_a und f_i um die x-Achse eine Vase ergibt, deren Mittelteil aus massivem Glas eine Höhe von 1 dm und einen Durchmesser von mindestens 2 dm aufweist.

b) Berechnen Sie den Winkel, unter dem der äußere Rand der Vase den Fußboden trifft.
   Zeigen Sie, dass die Forderung des Firmensprechers bezüglich des Durchmessers erfüllt ist.

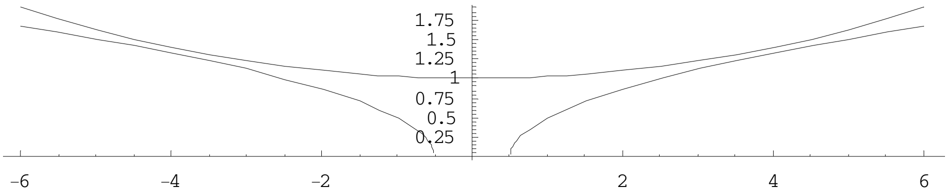
c) Nun geht es um die technische Realisierung. Die Designer wollen die Vase aus Glas herstellen. Die Materialexperten sind skeptisch. Eine erste grobe Schätzung der Experten ergibt, dass der Vasenrand als Standfläche einen Flächeninhalt von mindestens 2,5 dm² haben muss.
   Bestätigen Sie, dass diese Forderung eingehalten ist.

d) Bestimmen Sie, wie viel Wasser (in Litern) maximal in die Vase passt.
   Zeigen Sie, dass die Vase insgesamt ein Materialvolumen von ca. 18,9 dm³ aufweist.
   Hinweis: Das Volumens V eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse über dem Intervall $[a;b]$ entsteht, berechnet man nach der Formel:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \cdot \int_a^b [\,f(x)]^2\,dx\,.$$

e) Die Materialexperten sind weiterhin skeptisch. Sie meinen, dass die Vase überall eine Glasstärke von mindestens 7 mm = 0,07 dm aufweisen muss.
   Begründen Sie, dass die Differenz $f_a(x) - f_i(x)$ <u>nicht</u> die Glasstärke darstellt.
   Zeigen Sie, wie Sie die minimale Glasstärke mathematisch bestimmen könnten.
   Eine explizite Berechnung ist nicht gefordert.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Da die Funktion f_i im Reellen nur nichtnegative Argumente haben darf, gilt: $D_{f_i} =]-\infty;-0,5] \cup [0,5;\infty[$. Wenn die Graphen der beiden Funktionen im gleichen Maßstab von *x*- und *y*-Achse gezeichnet sind, ergibt sich etwa folgendes Diagramm:  Zwischen $x_l = -0,5$ und $x_r = 0,5$ ist f_i nicht definiert; das bedeutet hier, dass die Vase in diesem Bereich aus massivem Glas besteht, das mindestens 1 dm hoch (dick) ist, da $x_r - x_l = 1$. Der Scheitelpunkt der nach oben geöffneten Parabel f_a ist S(0|1), $f_a(0)$ ist also minimal und der Durchmesser ist daher mindestens 2 dm.	15		
b)	Um den Winkel zu erhalten, mit dem die Vase außen den Boden berührt, muss der Winkel berechnet werden, den f_a am Rand des Definitionsbereichs hat. Dazu wird die Ableitung von f_a benötigt: $f_a'(x) = \frac{1}{20}x$. Da $f_a'(6) = 0,3$ und dieser Wert den Tangens der Tangentensteigung darstellt, ergibt sich für den gesuchten Winkel α: $\alpha = 90° - \arctan(0,3) \approx 73,30°$. Der Rand der Vase trifft also den Fußboden unter einem Winkel von etwa 73°. Der Bodendurchmesser *d* der Vase bestimmt sich mit $d = 2 \cdot f_a(6) = 3,8$. Dieser Wert liegt im geforderten Bereich.		20	
c)	Die Aufstandsfläche ist ein Kreisring. Seine Fläche ergibt sich durch $A = \pi \cdot (f_a^2(6) - f_i^2(6))$ $= \pi \cdot (3,61 - \frac{5,5}{2})$ $= 2,7017...$. Mit ca. 2,7 dm² ist die Forderung der Materialexperten erfüllt.	10		
d)	Das Wasservolumen ist das Volumen des Rotationskörpers, das durch die Rotation des Funktionsgraphen von f_i um die *x*-Achse in den Grenzen 0,5 (Vasenboden) und 6 (oberer Rand) entsteht.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Auszuwerten ist also der Ausdruck $V_W = \pi \int_{0,5}^{6} \left(\sqrt{\frac{x-0,5}{2}} \right)^2 dx$ (auf den Betrag kann verzichtet werden, da sich die Rechnung nur auf positive *x*-Werte bezieht).

Es gilt:

$$V_W = \pi \cdot \int_{0,5}^{6} \left(\sqrt{\frac{x-0,5}{2}} \right)^2 dx$$
$$= \pi \cdot \int_{0,5}^{6} \frac{x-0,5}{2}\, dx$$
$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[x^2 - x \right]_{0,5}^{6}$$
$$\approx 23,7583\,.$$

In die Vase passen also knapp 24 l Wasser.

Um das Materialvolumen der Vase zu bestimmen, muss man vom Rotationskörper, der durch die Rotation von f_a in den Grenzen von – 6 bis 6 entsteht, das Zweifache des eben ermittelten Wasservolumens abziehen.
Es ist also der folgende Ausdruck auszuwerten:

$$V_G = \pi \int_{-6}^{6} \left(1 + \frac{1}{40} x \right)^2 dx - 2 \cdot V_W\,.$$

Es gilt:

$$V_G = \pi \cdot \int_{-6}^{6} \left(1 + \frac{1}{40} x^2 \right)^2 dx - 2 \cdot V_W$$
$$= \pi \int_{-6}^{6} \left(1 + \frac{1}{20} x^2 + \frac{1}{1600} x^4 \right) dx - 2 \cdot V_W$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{8000} + \frac{x^3}{60} + x \right]_{-6}^{6} - 2 \cdot V_W$$
$$\approx 18,9092\,.$$

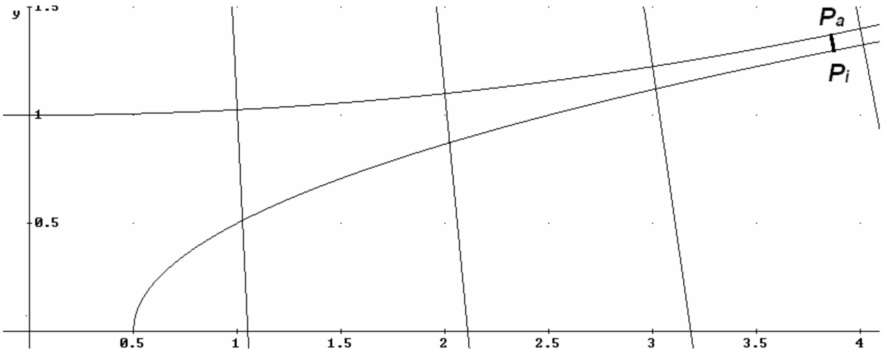
Dies ist im Rahmen der Genauigkeit der angegebene Wert. — II: 35

e) Die Differenz $d(x) = f_a(x) - f_i(x)$ gibt bei der Vase stets die Strecke von Außen- zu Innenwand in der Waagerechten an (die Vase ist gegenüber der Darstellung mit Funktionsgraphen ja in der Realität „um 90° gekippt"). Die Wände stehen aber nirgendwo lotrecht, also ist diese Differenz an jeder Stelle stets größer als der jeweils kürzeste Weg von Wand zu Wand.

Um die Glasstärke an einem Punkt z.B. auf der Außenfläche zu bestimmen, müsste man von diesem Punkt aus das Minimum aller Abstände zu Punkten auf der Innenfläche bestimmen. Wegen der Rotationssymmetrie genügt es, den Sachverhalt zweidimensional zu betrachten, also die Abstände zwischen Punkten auf den Graphen von f_a und f_i. Da die Funktion f_i differenzierbar ist,

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

steht die minimale Verbindungsstrecke von einem beliebigen Punkt auf dem Graphen f_a zu allen Punkten auf dem Graphen von f_i senkrecht auf der zugehörigen Tangente an den Graphen von f_i. Um die Forderung der Materialexperten zu erfüllen, müsste der <u>globale</u> Minimalabstand größer oder gleich 7 mm sein, d.h. man müsste den oben bestimmten Minimalabstand als Funktion des ausgewählten Punktes auf dem Graphen von f_a nochmals minimieren. Mit dem gleichen Argument folgt, dass der gesuchte Minimalabstand durch eine Verbindungsstrecke von je einem Punkt auf dem Graphen von f_a und f_i realisiert wird, die normal zu beiden Graphen ist.



Die Länge dieses Weges $\overline{P_iP_a}$ ergibt dann wirklich die minimale Glasstärke.

<u>Bemerkung:</u> *In dieser Präzision wird keine Schülerlösung erwartet, aber wesentliche Gedanken dieser Argumentation sollten deutlich werden.*

Tatsächlich haben f_a und f_i bei $x \approx 3{,}85847$ dieselbe Steigung.
Da die Steigung der beiden Randkurven im betrachteten Bereich etwa 0,2 ist, weisen die Normalen eine Steigung von etwa –5 auf. Bei 1 cm Glasdicke würden also Eintritts- und Austrittsstelle um etwa 2 mm – entsprechend 0,02 in den verwendeten Einheiten – differieren. Diese Differenz ist so klein, dass die verwendete Näherung zulässig ist.
Es ist $d(3{,}855847) \approx 7{,}63\ mm$; auf der Normalen reduziert sich dieser Wert zur (sehr genau bestimmten) Glasstärke von ca. 7,5 mm.

</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

ANALYSIS 2

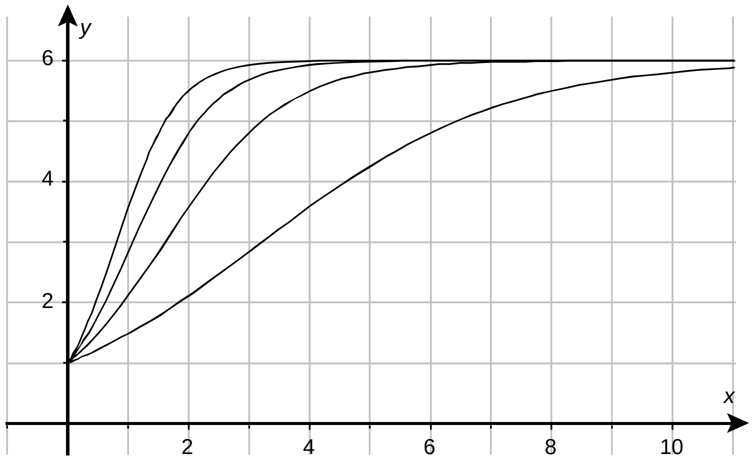
I.2 Wachstumsvorgänge

Von dem belgischen Biomathematiker Pierre-Francois Verhulst wurden Funktionen der Form

$$f_{k,b} : x \to \frac{k}{1+(k-1)\cdot e^{-b\cdot x}} \ , \ x \in \mathbb{R}_0^+ \qquad \text{mit } k > 0 \ , \ b > 0$$

zur Modellierung von logistischem Wachstum eingeführt.

Die nebenstehende Abbildung zeigt vier Graphen von Funktionen dieses Typs.
b durchläuft dabei die Werte von 0,5 bis 2 mit der Schrittweite 0,5,
k ist in allen vier Fällen gleich.



a) Berechnen Sie den Wert von k, der in diesen Fällen vorliegt. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.
Geben Sie die Werte für den Parameter b in den vier Graphen an.
Begründen Sie Ihre Zuordnung und kennzeichnen Sie dabei die Graphen eindeutig, z.B. durch Farben.

b) Bestätigen Sie, dass alle Graphen der Funktionen $f_{k,b}$ mit der y-Achse den Punkt (0 | 1) gemeinsam haben.
Zeigen Sie, dass die Graphen aller Funktionen $f_{k,b}$ mit gleichem b nur diesen einen Punkt gemeinsam haben.

c) Betrachten Sie die Funktion $f_{6,2}$.
Bestimmen Sie für diese Funktion die Stelle, an der die lokale Wachstumsrate am größten ist.

In einer Formelsammlung sind die Funktionen des Verhulst'schen Typs mit anderen Parametern dargestellt: $l_{a,P,\lambda} : x \to \dfrac{a\cdot P}{a+(P-a)\cdot e^{-\lambda P x}}$.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung der Parameter a, P und λ im Kontext des logistischen Wachstums. Bestimmen Sie die Parameterwerte a, P und λ , so dass $f_{k,b}(x) = l_{a,P,\lambda}(x)$ gilt.
Gelingt Ihnen dies nicht in voller Allgemeinheit, versuchen Sie es mit $f_{6,2}$ (k = 6, b = 2).

e) Die Differentialgleichung für das logistische Wachstum lautet:

$$l'_{a,P,\lambda}(x) = \lambda \cdot l_{a,P,\lambda}(x) \cdot (P - l_{a,P,\lambda}(x)) \ .$$

Interpretieren Sie diese Gleichung.
Zeigen Sie, dass $l_{a,P,\lambda}$ diese Differentialgleichung erfüllt.
(Zur Kontrolle: $l_{a,P,\lambda}{}'(x) = \dfrac{a\cdot P^2 \cdot \lambda \cdot (P-a)e^{-\lambda P x}}{(a+(P-a)e^{-\lambda P x})^2}$.)

Erwartungshorizont

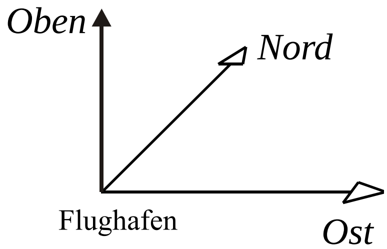
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gilt: $x \to \infty \Rightarrow e^{-bx} \to 0$. Damit strebt für große x der Nenner gegen 1. Ebenso gilt, wie aus der Abbildung ersichtlich: Für große x streben die Funktionswerte aller dieser gezeigten Funktionen gegen 6. Zusammen gilt: $x \to \infty \Rightarrow f_{k,b}(x) \to 6 = \frac{k}{1} = k$. Also ist für die gegebenen Funktionen, die voraussetzungsgemäß den gleichen Parameterwert für k aufweisen sollen, $k = 6$. Je größer der Wert des Parameters b ist, desto kleiner ist bei festem x der Term e^{-bx}. Damit wird mit wachsendem b bei festem x der Nenner kleiner und somit der Bruch größer. Also weisen die Graphen, von links nach rechts geordnet, die Werte für den Parameter b von 2; 1,5; 1 und 0,5 auf. Ebenso möglich ist ein Test durch Einsetzen in den Taschenrechner: $f_{6,2}(3) \approx 5{,}93;\ f_{6,1.5}(3) \approx 5{,}68;\ f_{6,1}(3) \approx 4{,}80;\ f_{6,0.5}(3) \approx 2{,}84$. Auch mit diesen Werten ist die eindeutige Zuordnung gegeben.	10	5	
b)	i) $P(0 \mid 1)$ liegt auf allen Graphen: Einsetzen in die allgemeine Funktionsgleichung liefert $f_{k,b}(0) = \frac{k}{1+(k-1)\cdot e^{-b\cdot 0}} = \frac{k}{1+(k-1)\cdot 1} = \frac{k}{k} = 1$ und damit das gewünschte Ergebnis. ii) Graphen mit gleichem b haben nur einen gemeinsamen Punkt: Sei $k \neq m$. Einsetzen in die allgemeine Funktionsgleichung liefert $\frac{k}{1+(k-1)\cdot e^{-bx}} = \frac{m}{1+(m-1)\cdot e^{-bx}}$ $k \cdot \left(1+(m-1)\cdot e^{-bx}\right) = m \cdot \left(1+(k-1)\cdot e^{-bx}\right)$ $k - m = (k-m)\cdot e^{-bx}$ $1 = e^{-bx}$ Diese letzte äquivalente Gleichung ist nur gültig für $x = 0$, also ist $P(0 \mid 1)$ der einzige gemeinsame Punkt.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	$f_{6,2}(x) = \dfrac{6}{1+5e^{-2x}}$. Die lokale Wachstumsrate wird von der 1. Ableitung beschrieben, damit diese maximal wird, muss die 2. Ableitung dort Null sein: $f_{6,2}{}'(x) = \dfrac{-6\cdot 5e^{-2x}\cdot(-2)}{(1+5e^{-2x})^2} = \dfrac{60e^{-2x}}{(1+5e^{-2x})^2}$. $f_{6,2}{}''(x) = \dfrac{60\cdot(-2)e^{-2x}\cdot(1+5e^{-2x})^2 - 60e^{-2x}\cdot 2\cdot(1+5e^{-2x})\cdot(-10e^{-2x})}{(1+5e^{-2x})^4}$ $= \dfrac{-120e^{-2x}\cdot(1+5e^{-2x})+1200e^{-4x}}{(1+5e^{-2x})^3}$ $= \dfrac{-120e^{-2x}-600e^{-4x}+1200e^{-4x}}{(1+5e^{-2x})^3} = \dfrac{-120e^{-2x}+600e^{-4x}}{(1+5^{-2x})^3}$ $= \dfrac{-120e^{-2x}\cdot(1-5e^{-2x})}{(1+5e^{-2x})^3}$ <u>Nullstelle(n) der 2. Ableitung:</u> Dazu muss der Zähler Null sein. Da der 1. Faktor nicht Null werden kann, muss der 2. Faktor Null sein. $1-5e^{-2x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}=e^{-2x}$. Logarithmieren führt auf $x = 0{,}5 \ln 5 \approx 0{,}805$ als einzige Lösung. Die Grafik zeigt, dass zwischen $x = 0$ und $x = 2$ die Krümmung wechselt, also ein Wendepunkt vorliegen muss. Die lokale Wachstumsrate von $f_{6,2}$ ist bei $x \approx 0{,}805$ am größten.	10	15	
d)	Im Kontext des logistischen Wachstums bedeutet P den Grenzwert, gegen den die Population strebt (die Wachstumsgrenze), a den Anfangswert oder den Anfangsbestand, und λ ist ein Maß für die Wachstumsgeschwindigkeit. Die Lösung erfolgt durch Koeffizientenvergleich. Es soll gelten: $f_{k,b}(x) = \dfrac{k}{1+(k-1)e^{-bx}} = \dfrac{a\cdot P}{a+(P-a)\cdot e^{-\lambda Px}} = \dfrac{P}{1+\left(\dfrac{P}{a}-1\right)\cdot e^{-\lambda Px}}$. Dies ergibt $P = k$, $\dfrac{P}{a} = k$ und $\lambda\cdot P = b$ und damit $P = k$, $a = 1$ und $\lambda = \dfrac{b}{k}$. Analog liefert der Koeffizientenvergleich mit $f_{6,2}$ $P = 6$, $\dfrac{P}{a} - 1 = 5$ und $\lambda\cdot P = 2$ und damit $P = 6$, $a = 1$ und $\lambda = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. *(Die Berechnung beim Spezialfall k = 6 und b = 2 hat etwa gleiche Anforderungen)*		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Änderungsrate der die Population beschreibenden Funktion l (also die lokale Wachstumsrate) ist proportional sowohl zum Bestand als auch zum Abstand vom Bestand zur Sättigungsgrenze. Es ist $l_{a,P,\lambda}(x) = \frac{a \cdot P}{a + (P-a)e^{-\lambda P x}}$. Damit ist $l_{a,P,\lambda}{}'(x) = \frac{-a \cdot P \cdot (P-a)e^{-\lambda P x} \cdot (-\lambda P)}{(a + (P-a)e^{-\lambda P x})^2} = \frac{a \cdot P^2 \cdot \lambda \cdot (P-a)e^{-\lambda P x}}{(a + (P-a)e^{-\lambda P x})^2}$ Rechte Seite der Behauptung wird umgeformt: $\lambda \cdot l_{a,P,\lambda}(x) \cdot (P - l_{a,P,\lambda}(x)) = \frac{\lambda \cdot a \cdot P}{a + (P-a)e^{-\lambda P x}} \cdot \left(P - \frac{a \cdot P}{a + (P-a)e^{-\lambda P x}} \right)$ $= \frac{\lambda \cdot a \cdot P}{a + (P-a)e^{-\lambda P x}} \cdot \frac{Pa + P(P-a)e^{-\lambda P x} - aP}{a + (P-a)e^{-\lambda P x}}$ $= \frac{\lambda a P \cdot P(P-a)e^{-\lambda P x}}{(a + (P-a)e^{-\lambda P x})^2}$ und es ergibt sich der Term der Ableitungsfunktion. Damit ist die Gültigkeit der Differentialgleichung bewiesen.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 1

II.1 Flugrouten



Wir betrachten zunächst in den Aufgabenteilen a) und b) ein **lokales** dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem.

Im Koordinatenursprung befindet sich ein Flughafen (genauer: der Abhebepunkt auf einer Startbahn).

$(x \mid y \mid z) = (\text{Osten} \mid \text{Norden} \mid \text{Oben})$.

Die *x*-*y*-Ebene beschreibt also die horizontale Ebene, in der der Flughafen liegt. Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.

Ein Flugzeug startet näherungsweise geradlinig, seine Flugbahn kurz nach dem Abheben lässt sich durch die Gleichung

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 43 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}^+$$

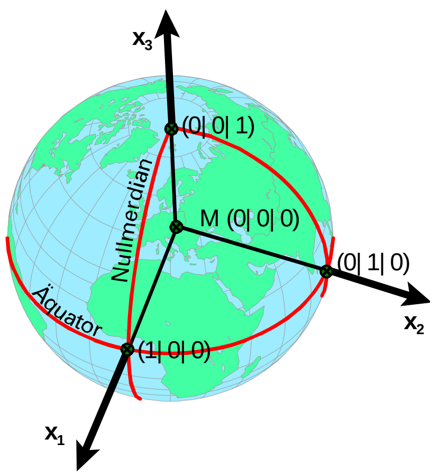
beschreiben.

a) Geben Sie begründet die Himmelsrichtung an, in die das Flugzeug startet, und berechnen Sie den Steigungswinkel.

b) Als das Flugzeug vom Abflugort 30 km zurückgelegt hat, verschwindet es in einer Wolkendecke. Bestimmen Sie die Höhe der Wolkendecke an dieser Stelle über der *x*-*y*-Ebene (Horizontalebene am Flughafen).
Der Abstand von 30 km vom Startpunkt ist zwar klein verglichen mit dem Erdradius *R*. Dennoch ist durch die Erdkrümmung die Höhe der Wolkendecke über der Erdoberfläche etwas größer als die zuvor berechnete Höhe über der *x*-*y*-Ebene. Ermitteln Sie diesen Unterschied. (Rechnen Sie mit $R = 6370$ km).

Hinweis: Der Erdmittelpunkt hat in dem betrachteten Koordinatensystem die Koordinaten $M(0 \mid 0 \mid -6370)$.

c) Der betrachtete Start-Flughafen sei Oslo (geografische Koordinaten: 60,2° Nord; 11,1° Ost). Der Zielflughafen sei Quebec (geografische Koordinaten: 46,8° Nord; 71,2° West).
Beschreiben Sie ohne zu rechnen mit geometrischen Argumenten den Verlauf der kürzesten Flugroute.



Im Weiteren betrachten wir ***ein globales erdgebundenes*** rechtwinkliges dreidimensionales Koordinatensystem (vgl. Abbildung rechts). Die Längeneinheit in allen drei Richtungen sei also gerade der Erdradius (1 LE $\triangleq$ 6 370 km).

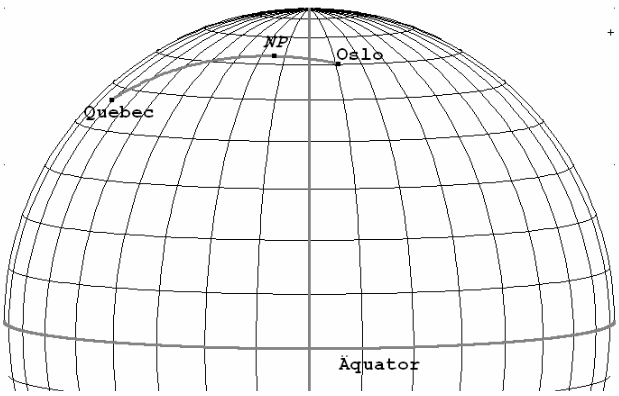
d) Ermitteln Sie die Koordinaten von Oslo und Quebec in diesem Koordinatensystem und dann den (sphärischen) Winkel $\sphericalangle(Oslo, M, Quebec)$
Bestimmen Sie die Länge der kürzesten Flugroute von Oslo nach Quebec <u>in km</u>. Gehen Sie dabei der Einfachheit halber davon aus, dass die Flughöhe konstant 10 km beträgt (dass das Flugzeug also auf einer Kugel mit dem Radius 6 380 km fliegt).

e) Begründen Sie ein mögliches Verfahren, wie man den nördlichsten Punkt dieser Flugroute bestimmen könnte.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Flugzeug fliegt genau nach Nordwesten, da die Ostkomponente und die Nordkomponente des Flug-Richtungsvektors dem Betrage nach gleich sind und außerdem die Nordkomponente positiv ist und die Ostkomponente negativ (d.h. West) ist. Der Steigungswinkel kann entweder elementargeometrisch bestimmt werden: • Wenn sich das Flugzeug in horizontaler Richtung $\sqrt{100^2+100^2}$ km bewegt, steigt es 43 km. Also gilt für den Steigungswinkel: $\alpha = arc\tan\left(\frac{43}{\sqrt{2}\cdot 100}\right) \approx 16{,}9°$. oder mit den Methoden der Analytischen Geometrie: • Für den Winkel *ß* zwischen dem Flug-Richtungsvektor und einem Normalenvektor zur Horizontalebene – z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ – gilt: $\beta = arc\cos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}\right) = arc\cos\left(\frac{43}{\sqrt{100^2+100^2+43^2}}\right)$ $= arc\cos\left(\frac{43}{\sqrt{21\,849}}\right) \approx 73{,}1°$. Die gesuchte Größe des Neigungswinkels α ist komplementär zu β bzgl. 90°, also α = 16,9°.	15		
b)	Sei P der Punkt, in dem das Flugzeug in die Wolkendecke eintaucht. Es gilt $\vec{P} = s\cdot\begin{pmatrix}-100\\100\\43\end{pmatrix}$ und $\lvert\vec{P}\rvert = s\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-100\\100\\43\end{pmatrix}\right\rvert = 30$. Also $s = \frac{30}{\sqrt{21\,849}}$. Und damit: $\vec{P} = \frac{30}{\sqrt{21\,849}}\cdot\begin{pmatrix}-100\\100\\43\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-20{,}296\\20{,}296\\8{,}727\end{pmatrix}$ Die *z*-Komponente von $\vec{P}$ ist die Höhe der Wolkendecke an dieser Stelle über der *x*-*y*-Ebene (Horizontalebene am Flughafen). Die gesuchte Höhe ist also 8 727 m. Der Erdmittelpunkt liegt (bei Annahme der Erde als einer idealen Kugel) im Abstand des Erdradius lotrecht unter jedem Punkt der Erdoberfläche, hat also in dem betrachteten lokalen Koordinatensystem die Koordinaten M (0 | 0 | –6370). Der Abstand von *M* zu *P* beträgt $\left\lvert\vec{P}-\vec{M}\right\rvert = 6378{,}79$. Um die Höhe von *P* über der idealen Erdoberfläche zu bestimmen, muss von diesem Wert der Erdradius subtrahiert werden. Es ergibt sich eine Höhe von 8 792 m.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Differenz der beiden Höhen beträgt also ca. 65 m. <u>Bemerkung:</u> *Natürlich ist die hier verwendete Rechengenauigkeit für den Erdmittelpunkt M unsinnig, da bekanntlich der Abstand von Punkten auf der Erdoberfläche (selbst bei NN) um bis zu ca. 20 km schwankt, und somit der Wert für den Erdradius nur ein sehr grober Näherungswert ist. Dennoch ist das Ergebnis nicht unsinnig, da dieser Fehler bei der Differenzbildung* $\left\|\vec{P}-\vec{M}\right\|$ – Erdradius *im Wesentlichen selbst korrigiert wird. Diese Betrachtung wird hier aber nicht erwartet. Wichtig ist die Größenordnung des Ergebnisses von gut 60 m.*		20	10
c)	Die kürzeste Verbindung von zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche (hier mit dem Radius 6 370 km +10 km) liegt auf einem Großkreis durch die beiden Punkte. Das ist ein Weg mit der geringsten Krümmung. Liegen die beiden Punkte nicht polar gegenüber, so ist der Großkreis und der zugehörige Verbindungsbogen eindeutig. Man erhält diesen Großkreis als Schnittkreis der Kugel mit der Ebene durch die beiden Punkte und den Kugelmittelpunkt.	10	10	
d)	Die Bestimmung der kartesischen Koordinaten von Oslo und Quebec im globalen erdgebundenen Koordinatensystem erfolgt mit Hilfe der Formel $(\cos\lambda\cdot\cos\varphi \mid \sin\lambda\cdot\cos\varphi \mid \sin\varphi)$, wobei φ jeweils die geographische Breite und λ jeweils die geographische Länge bezeichnet. Die Umrechnung der geographischen Koordinaten von Oslo ergibt: $Os\,(0{,}48767690 \mid 0{,}095678 \mid 0{,}867765)$. Die Umrechnung der geographischen Koordinaten von Quebec ergibt: $Qu\,(0{,}220606 \mid -0{,}648026 \mid 0{,}728969)$. Berechnung des Winkels $\varepsilon = \sphericalangle(Oslo, M, Quebec)$ Da |*Os*| = 1 und auch |*Qu*| = 1, ist die Rechnung mit Hilfe des Skalarproduktes sehr einfach: $\varepsilon = arc\cos(Os\cdot Qu) \approx 47{,}3°$. Der Umfang des ganzen Flug-Großkreises beträgt: $U = 2\pi\cdot 6380$ km, und somit beträgt die gesuchte Länge des Großkreisbogens: $B = \frac{\varepsilon}{360°}\cdot U \approx 5\,267$ km. <u>Bemerkung:</u> *Wenn man* ε *im Bogenmaß hat, kann man einfacher rechnen:* $B = 6380\text{ km}\cdot\varepsilon$.		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Der nördlichste Punkt auf dem Kreisbogen B ist derjenige Punkt, der in dem betrachteten globalen erdgebundenen Koordinatensystem den größten x_3-Wert hat. *Dieser liegt lotrecht 10 km über dem nördlichsten Punkt des Großkreises auf der Erdoberfläche durch Oslo und Quebec, wir können uns deshalb der Einfachheit halber auf diesen Großkreis konzentrieren und nicht auf die 10 km höher liegende Flugroute.* Ein möglicher Weg, den gesuchten nördlichsten Punkt zu finden, besteht z.B. darin, eine geeignete Parametrisierung des Großkreisbogens *B'* von Oslo nach Quebec zu betrachten, die x_3-Komponente als Funktion dieses Parameters aufzufassen und dann das zugehörige Maximierungsproblem zu lösen. • Der Parameter könnte z.B. der sphärische Winkel von Oslo bis zu dem betrachteten Punkt sein. • Ein anderer Weg – am einfachsten im Ansatz – besteht darin, dass man zunächst die Strecke zwischen Oslo und Quebec durch $\overrightarrow{F} = (1-t)\cdot\overrightarrow{Os} + t\cdot\overrightarrow{Qu}\ ,\ \ 0 \le t \le 1$ darstellt und dann diese Punkte (Vektoren) normiert, denn die Punkte (Vektoren) auf B' haben ja alle den Betrag 1: $\overrightarrow{B'} = \dfrac{(1-t)\cdot\overrightarrow{Os} + t\cdot\overrightarrow{Qu}}{\left\|(1-t)\cdot\overrightarrow{Os} + t\cdot\overrightarrow{Qu}\right\|}\ ,\ \ 0 \le t \le 1 \qquad (*)$ • Ein dritter Weg betrachtet gleichzeitig die Gleichung der Kugeloberfläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ und eine Parameterform der Ebene durch den Erdmittelpunkt (=Nullpunkt), *Os* und *Qu*, also $E : s\cdot Os + t\cdot Qu \quad s,t \in \mathbb{R}$. Die Kugelgleichung erlaubt es, einen der beiden Parameter der Ebene als Funktion des anderen zu betrachten, also zu eliminieren. Dann bleibt ein Parameter, der die wichtige x_3-Komponente bestimmt, die maximiert werden muss.  			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

<u>Bemerkung:</u> Mehr als dieser oder ein vergleichbarer Text ist hier nicht verlangt. Als Hinweis für die Korrektur führen wir die Rechnung hier noch aus:

Wir rechnen mit stark gerundeten Werten:

$Os = \left(0{,}488 \mid 0{,}096 \mid 0{,}868\right)$, $Qu = \left(0{,}220606 \mid -0{,}648026 \mid 0{,}728969\right)$.

Eingesetzt in (*) erhält man für die x_3*-Komponente:*

$x_3(t) = \dfrac{0{,}707106 \cdot (868 - 139 \cdot t)}{\sqrt{322073 \cdot t^2 - 322372 \cdot t + 500392}}$ *. Abgeleitet ergibt sich*

$x_3'(t) = \dfrac{353553 \cdot (7035496 - 25715451 \cdot t)}{5000 \cdot \sqrt{(322073 \cdot t^2 - 322372 \cdot t + 500392)^3}}$ *mit der Nullstelle*

$t_1 \approx 0{,}27359$.

Diesem Parameter entspricht ungefähr der Punkt:

$NP\left(0{,}4442 \mid -0{,}11513 \mid 0{,}88849\right)$.

Aus inhaltlichen Gründen kann dem nur ein <u>maximaler</u> Wert von x_3 *entspre-chen.*

Wir rechnen die geographischen Koordinaten zurück:

$\varphi \approx \arcsin 0{,}88849 \approx 62{,}7°$,

$\lambda \approx \arcsin\left(\dfrac{-0{,}115134}{\cos\varphi}\right) \approx -14{,}5°$,

also ein Punkt im Nordatlantik knapp südöstlich von Island.

</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

LA/AG 2

II.2 Populationen

Mäuse in einer bestimmten Population können bis zu zwei Jahre alt werden.
Sie sind in die Altersklasse M_1 der bis zu einjährigen Mäuse und in die Altersklasse M_2 der bis zu zweijährigen Mäuse unterteilt. Die jungen Mäuse M_1 produzieren jährlich durchschnittlich vier überlebende Nachkommen. 50 % der jungen Mäuse werden zwei Jahre alt und haben als alte Mäuse in M_2 noch jährlich durchschnittlich zwei überlebende Nachkommen, bevor sie sterben.

a) Geben Sie eine grafische Darstellung dieses Lebenszyklus' an (Übergangsgraph) und die zugehörige Populationsmatrix (Übergangsmatrix) M.

b) Rechnen Sie im Folgenden mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.

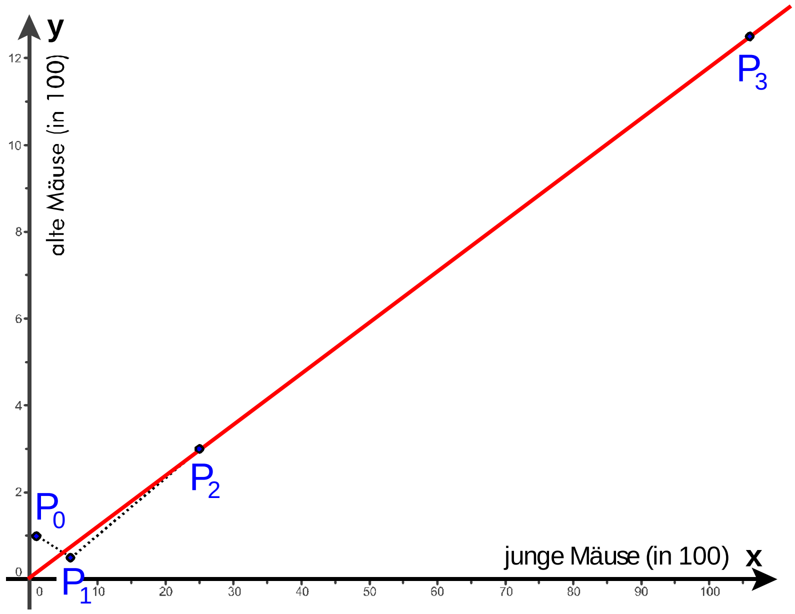
Berechnen Sie die Mäusepopulation nach zwei Jahren bei einer Ausgangspopulation von 100 Mäusen der Altersklasse M_1 und 100 Mäusen der Altersklasse M_2.
Geben Sie an, wann die M_1-Population erstmals die Zahl von 10 000 überschreitet.

c) Durch Umwelteinflüsse wird die Anzahl der Nachkommen (jung und alt) halbiert, während die Sterblichkeit der lebenden Tiere dadurch nicht beeinflusst wird. Geben Sie begründet eine Matrix H an, die die Halbierung der Nachkommen beschreibt.

d) Es wird vorausgesetzt, dass es doppelt so viele M_1-Mäuse wie M_2-Mäuse gibt.
Die Zahl der Nachkommen soll nun durch Maßnahmen zur Geburtenkontrolle (angewendet auf die jungen und die alten Mäuse) mit einem Faktor r auf einen Bruchteil reduziert werden.
Bestimmen Sie – ausgehend von der Matrix M – den Faktor r so, dass eine beliebige Population von Mäusen im Verhältnis $M_1 : M_2 = 2:1$ im Laufe der Jahre den Anzahlen nach unverändert bleibt.

Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die Matrix M aus b) .

e) Betrachten Sie auch wieder eine Ausgangspopulation von 100 M_1-Mäusen und 100 M_2-Mäusen.
Zeichnet man für die einzelnen Generationen Populationspaare in ein Koordinatensystem (siehe Abb. rechts: Anfangspopulation $P_0 = (1 \mid 1)$, nach einem Jahr $P_1 = (6 \mid 0{,}5)$ usw.), so scheinen die Populationspaare immer besser auf einer Geraden zu liegen und von Jahr zu Jahr „in immer größeren Sprüngen nach rechts oben zu wandern".



Interpretieren Sie diese Beobachtungen als Aussagen über die Populationsentwicklung.
Bestimmen aus Sie aus der grafischen Darstellung (näherungsweise) die Gleichung dieser Geraden.

Wenn ein Populationsvektor $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und der Vektor $P' = M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der Population im nächsten Jahr beide auf einer Ursprungsgeraden liegen, dann gilt: $P' = \lambda \cdot P$ mit einer geeigneten reellen Zahl λ, also $M \cdot P = \lambda \cdot P$. Dann gilt auch $M \cdot P' = M \cdot (\lambda P) = \lambda (M \cdot P) = \lambda P'$. Das heißt, auch im nächsten Jahr und in allen weiteren Jahren findet eine Vervielfachung der vorherigen Generation mit demselben Faktor λ statt. Um das langfristige Verhalten beliebiger Populationen mathematisch zu verstehen, sind solche besonderen Populationen sehr aufschlussreich:

f) Zeigen Sie, dass es genau zwei Paare $(a\ , \lambda)$ reeller Zahlen gibt, die die folgende Gleichung lösen:

$$M \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(Zur Kontrolle: 1. Lösung: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$, $a_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{5} \approx 8{,}47$ und
2. Lösung: $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0{,}24$, $a_2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{5} \approx -0{,}47$).

Begründen Sie, dass jede Lösung von (∗) auch die folgende Gleichung (für alle Generationen) erfüllt:

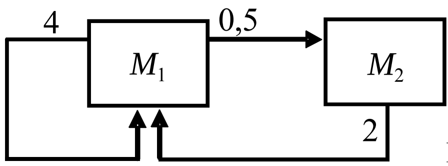
$$M^n \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\ , n \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

g) Weil a_1 und a_2 verschieden sind, sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

Jeder tatsächliche Anfangsvektor, insbesondere z.B. $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$, lässt sich deshalb eindeutig darstellen als Linearkombination von $\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Begründen Sie ohne s und t konkret zu bestimmen, dass daraus für die langfristige Entwicklung folgt: $M^n \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \lambda_1^n s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n t \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und
dass die Beobachtungen aus e) in diesem mathematischen Modell für die gesamte Populationsentwicklung tatsächlich zutreffen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Matrix in b)	10		
b)	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 50 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 300 \end{pmatrix}$ nach 2 Jahren $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2500 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10600 \\ 1250 \end{pmatrix}$ Die Grenze von 10 000 wird schon nach 3 Jahren überschritten.	15		
c)	Durch die Umwelteinflüsse halbieren sich die Werte der Matrix in der ersten Zeile, die ja die Neugeburten beschreiben, die Überlebensraten in der zweiten Zeile bleiben unverändert. Das führt auf die Matrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.		10	
d)	$\begin{pmatrix} 4r & 2r \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Übergangsmatrix mit der Reduzierung der Nachkommen um den Faktor *r*. Der Ansatz $\begin{pmatrix} 4r & 2r \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$ führt auf $\begin{aligned} 8ry + 2ry &= 2y \\ y &= y \end{aligned}$, und da $y > 0$ (es gibt Mäuse), folgt aus *I*: $r = 0,2$. Damit die Population nicht weiter wächst, muss $r = 0,2$ sein. Die Anzahl der Geburten muss also um genau 80 % reduziert werden.		20	
e)	Das Verhältnis der M_1-Mäuse zu den M_2-Mäusen ändert sich nach wenigen Generationen praktisch nicht mehr, aber die Gesamtzahl der Mäuse nimmt „explosionsartig" zu (*tatsächlich exponentiell, aber das ist aus der Skizze noch nicht unbedingt zu erkennen*). Wir betrachten $P_2 = (25\|3)$ oder $P_3 = (106\|12,5)$ als (Fast-)Punkte der Geraden.. Steigung (1. Fall): $\frac{3}{25} = 0,12$, Steigung (2. Fall): $\frac{12,5}{106} \approx 0,1179$. Die Gleichung der Ursprungsgeraden lautet gerundet also $y = 0,12 \cdot x$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Jeder Punkt auf der Geraden, als Vektor gedeutet, hat die Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ 0{,}12x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}12 \end{pmatrix}$. Das bedeutet für die langfristig zu erwartende Altersstruktur, dass die Anzahl der M_1-Mäuse stets gut 8-mal so groß ist wie die der M_2-Mäuse (oder dass die Anzahl der M_2-Mäuse knapp 12 % der Anzahl der M_1-Mäuse ausmacht).		15	
f)	<u>Lösen der Gleichung:</u> $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4a+2 = \lambda \cdot a \\ 0{,}5a = \lambda \end{matrix}$ und damit $\begin{matrix} \mathrm{I} & (4-\lambda)\cdot a + 2 = 0 \\ \mathrm{II} & a = 2\lambda \end{matrix}$. Einsetzen von II in I und Division durch 2 ergibt die quadratische Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Aus Gleichung II folgt unmittelbar $a_{1/2} = 2 \cdot \lambda_{1/2}$, und wir erhalten die folgenden beiden Lösungen: 1. Lösung: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$, $a_1 = 2\lambda_1 = 4 + 2\cdot\sqrt{5} \approx 8{,}47$ und 2. Lösung: $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0{,}24$, $a_2 = 2\lambda_2 = 4 - 2\cdot\sqrt{5} \approx -0{,}47$. *<u>Bemerkung:</u> Die beiden zugehörigen Vektoren* $\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *beschreiben keine real möglichen Mäusepopulationen, sie sind nur mathematische Konstrukte zur Gewinnung von Struktureinsichten über die realen Mäusepopulationen.* Wenn $M\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ (∗), erhält man durch Multiplikation von links mit *M:* $M^2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = M \cdot \left(\lambda\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda\left(M \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda\left(\lambda\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda^2\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$. Dieses Argument kann man mehrfach wiederholen. Multiplikation von links mit *M* bedeutet also einfach nur Multiplikation mit λ. Also gilt unter der Annahme (∗) für jede natürliche Zahl *n* auch: $M^n\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^n\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ (∗∗) *<u>Bemerkung:</u> Streng genommen müsste man hier mit vollständiger Induktion argumentieren, das wird aber nicht erwartet.*		10	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Indem man die Gleichung $\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}a_1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}a_2\\1\end{pmatrix}$ wiederholt von links mit M multipliziert und beachtet,
• dass die Multiplikation von Vektoren mit der festen Matrix M mit der Addition und der Skalarmultiplikation vertauschbar ist (Linearität),
• dass gilt: $M^n\begin{pmatrix}a_{1/2}\\1\end{pmatrix} = \lambda_{1/2}{}^n\begin{pmatrix}a_{1/2}\\1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$ (vgl. f))
erhält man die gewünschte Gleichung:
$M^n\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix} = \lambda_1{}^n s\begin{pmatrix}a_1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2{}^n t\begin{pmatrix}a_2\\1\end{pmatrix}$ (***)
Es gilt $\lambda_1 > 1$ und $|\lambda_2| < 1$ (Zur Erinnerung: $\lambda_1 \approx 4{,}24$, $\lambda_2 \approx -0{,}24$).
Der rechte Summand in (***) konvergiert deshalb für $n\to\infty$ komponentenweise gegen Null, und der linke Summand wächst für $n\to\infty$ exponentiell (mit dem Faktor $\lambda_1 \approx 4{,}24$) komponentenweise gegen Unendlich und dominiert sehr schnell das Geschehen. Die Vektoren des linken Summanden beschreiben also die langfristige Entwicklung der Population und liegen – wie schon in e) beobachtet – alle auf einer Ursprungsgeraden.
<u>Bemerkung:</u> Die Steigung dieser Ursprungsgeraden kann nun auch leicht exakt berechnet werden, da ja der Vektor $\begin{pmatrix}a_1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+2\cdot\sqrt{5}\\1\end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegen muss. Die Steigung beträgt $\frac{1}{4+2\cdot\sqrt{5}} \approx 0{,}118$, was mit den abgelesenen Werten gut übereinstimmt, da die Konvergenzgeschwindigkeiten in diesem Beispiel sehr hoch sind.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 1

III.1 Medikamententest

Im Rahmen einer Studie über die Wirksamkeit des neuen Mittels Mathysol gegen die häufig lang andauernde Krankheit Mathephobie werden 1 200 Patienten mit diesem Medikament behandelt, 697 Patienten davon werden innerhalb eines kurzen Zeitraums nach der Behandlung gesund; die Behandlung wird dann als erfolgreich bezeichnet. Parallel dazu wurden 1 200 weitere Patienten (Kontrollgruppe) mit denselben Symptomen mit einem Placebo behandelt und 491 davon mit Erfolg.

a) Von den insgesamt 2 400 an Mathephobie erkrankten Patienten der Studie wird ein erfolgreich behandelter Patient zufällig für genauere Untersuchungen ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Patient mit Mathysol therapiert wurde.

Die insgesamt 2 400 Patienten wurden in zwei Kliniken behandelt, die Tabelle gibt einen Überblick über die Behandlungsart und den Erfolg:

Klinik	**Anzahl der Patienten und Behandlungsart**	**Behandlungsergebnis**	
Universitätsklinik	200 mit Medikament	149 Misserfolge	51 Erfolge
	1 000 mit Placebo	667 Misserfolge	333 Erfolge
Kreiskrankenhaus	1 000 mit Medikament	354 Misserfolge	646 Erfolge
	200 mit Placebo	42 Misserfolge	158 Erfolge

b) Interpretieren Sie die Daten in Bezug auf die Wirksamkeit von Mathysol aus der Sicht der Krankenhäuser und aus der Sicht des Herstellers von Mathysol, der alle diese Daten hat.

c) Begründen Sie, unter welchen Bedingungen es bei solchen Studien grundsätzlich sinnvoll ist, bei einer ausgewählten Patientengruppe die Anzahl X der erfolgreich behandelten Patienten als binomialverteilt anzunehmen. Nennen Sie auch sachliche Gründe, die in diesem Zusammenhang der Annahme einer Binomialverteilung entgegenstehen können.

Gehen Sie im Weiteren davon aus, dass bei jeder der folgenden Gruppen von Patienten die Anzahl der erfolgreichen Behandlungen binomialverteilt ist.
Ein Arzt behandelt nacheinander Patienten mit Mathysol. Der Arzt geht aufgrund der Studie von einer Erfolgswahrscheinlichkeit von ca. $\frac{7}{12}$ aus.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Behandlung von 8 Patienten 3 oder mehr geheilt werden.

e) Von acht Behandlungen ist keine erfolgreich, und dem Arzt kommen Zweifel.

Untersuchen Sie, ob es stochastische Gründe für den Arzt gibt, seine Vorgehensweise zu überdenken.

Man kann hier auch die Frage untersuchen, wie viele Patienten man im Mittel mit Mathysol behandeln müsste, bis der erste Behandlungserfolg eintritt. Dieser Erwartungswert werde hier mit *ew* bezeichnet. Begründen Sie, dass für diese Zahl *ew* folgende Gleichung gelten muss:

$$ew = 1 \cdot \frac{7}{12} + (1 + ew) \cdot \frac{5}{12}.$$

Berechnen Sie eine Lösung dieser Gleichung und untersuchen Sie nochmals im Kontext dieses Ergebnisses die Frage, ob es stochastische Gründe für den Arzt gibt, seine Vorgehensweise zu überdenken.

f) Aus vielen vorangegangenen Studien weiß man, dass ca. 40 % aller „Behandlungen" von Mathephobie-Patienten mit Placebos erfolgreich sind. Die obige Studie weckt Hoffnungen in die Wirksamkeit des Medikamentes Mathysol. Diese Hoffnungen sollen wissenschaftlich abgesichert werden.
Dazu soll in einer weiteren Studie das statistische Instrument des Hypothesentests auf dem 1 %-Niveau verwendet werden, um gegebenenfalls zu begründen, dass Mathysol wirksamer ist als Placebos.

5 000 an Mathephobie erkrankte Personen sollen mit Mathysol behandelt werden. Beschreiben und begründen Sie das weitere Vorgehen bei diesem Test.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
		I	II	III
a)	$P(\text{Mathysol}\mid\text{Erfolgreich}) = \dfrac{P(\text{Mathysol} \cap \text{Erfolgreich})}{P(\text{Erfolgreich})}$ $= \dfrac{\frac{697}{2400}}{\frac{(697+491)}{2400}} = \dfrac{697}{1188} \approx 59\,\%$.	15		
b)	Bei beiden Kliniken ist der relative Behandlungserfolg von Placebos (ca. 33 % und 79 %) größer als der beim Einsatz von Mathysol (ca. 26 % und 65 %). Nimmt man aber alle mit Placebos behandelten Patienten zusammen, so ist der relative Behandlungserfolg nur ca. 41 % gegenüber dem aller Mathysol-Behandlungen von 58 %. (*Dieses erstaunliche Phänomen ist unter dem Namen Simpson-Paradoxon bekannt.)* Wenn man davon ausgeht, dass die Unterschiedlichkeit der beiden Kliniken keine Rolle spielt, dann ist die Gesamtstatistik mit den größeren Fallzahlen am aussagekräftigsten, und die Hoffnung in die Wirksamkeit von Mathysol wird gestärkt.		15	
c)	In einer Bernoullikette ist die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Einzelversuches von den Ausgängen der anderen Versuche stochastisch unabhängig und für alle Einzelversuche gleich. Diese Annahme kann man rechtfertigen, wenn die Auswahl der Patientengruppe aus der Menge aller Mathephobiker „rein zufällig" erfolgte. Dies wäre z.B. dann nicht der Fall, wenn begründete Vermutungen über Ursachen der Krankheit bei der Auswahl eine Rolle gespielt hätten.		10	
d)	Sei X = Anzahl der bei einer Behandlung von 8 Patienten geheilten Patienten. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(\left(\frac{5}{12}\right)^8 + 8 \cdot \frac{7}{12} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^7 + \binom{8}{2}\left(\frac{7}{12}\right)^2\left(\frac{5}{12}\right)^6 \right)$ $\approx 1 - 0{,}061 = 0{,}939$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Behandlung von 8 Patienten 3 oder mehr geheilt werden, ist also fast 94 %.	10		
e)	Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{7}{12}$. Dass 8 Behandlungen nicht zu einem Erfolg führen, tritt dann mit der Wahrscheinlichkeit $P(\text{"8 Misserfolge"}) = \left(\frac{5}{12}\right)^8 \approx \frac{1}{1100}$. Die Wahrscheinlichkeit ist so klein, dass man an den bisherigen Annahmen zweifeln muss. Entweder hat der Arzt beim ersten Patienten Erfolg, dann betrug die betrachtete Anzahl 1, oder der Arzt hat keinen Erfolg, dann ist er wieder in der Ausgangssituation, die erwartete Anzahl an Patienten bis zum ersten ist aber um 1 größer als *ew*. Die Mathematisierung dieser Überlegung führt auf die (lineare)			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Gleichung $ew = 1 \cdot \frac{7}{12} + (1+ew) \cdot \frac{5}{12}$, die die Lösung $ew = \frac{12}{7} \approx 1,7$ hat.

In der konkreten Situation ist die Anzahl bis zum ersten Erfolg größer als 8, weicht also deutlich von dem Erwartungswert 1,7 nach oben ab. Dies ist ein Indiz dafür, dass entweder der angenommene Wert von $p = \frac{7}{12}$ nicht stimmt, oder ein Fehler bei der Behandlung mit Mathysol aufgetreten ist.</td><td>5</td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es sei p die unbekannte Erfolgswahrscheinlichkeit bei der Behandlung von Mathephobikern mit Mathysol. Die Nullhypothese, dass die Behandlung mit Mathysol wirkungslos ist (also nicht besser als die Behandlung mit Placebos) soll nach Möglichkeit verworfen werden. Also wählen wir als Nullhypothese:

$H_0 : p \leq 0,4$. Da nicht anzunehmen ist, dass Mathysol schlechter wirkt als Placebos, setzen wir: $H_0' : p = 0,4$.

Diese Vereinfachung ist auch rein formal gerechtfertigt, da dadurch die Wahrscheinlichkeit $P(H_0 \text{ wird verworfen} \mid H_0)$ nach oben abgeschätzt wird.

Es sei X die Anzahl der erfolgreichen Behandlungen. Große Werte von X sprechen gegen H_0'.

X ist unter der Bedingung H_0' 5000-0,4-binomialverteilt. Diese Verteilung können wir mit Hilfe der Normalverteilung approximieren:

$\frac{X - 2000 + 0,5}{\sqrt{1200}}$ ist in ausreichender Näherung standard-normal-verteilt.

Da das gewünschte Signifikanzniveau 1 % betragen soll, lösen wir mit Hilfe der Tabelle in der Formelsammlung die Gleichung normal(x) = 0,99: Man erhält

$x \approx 2,326$, also $P\left(\frac{X - 2000 + 0,5}{\sqrt{1200}} \leq 2,326\right) \approx 0,99$ und damit

$P(X > 2080,1) \approx 0,01$.

$K = 2081$ ist also die kleinste Anzahl für die gilt

$P(X > 2081) \leq 0,01$.

Wenn also mehr als 2 081 von den 5 000 Patienten mit Mathysol erfolgreich behandelt werden, kann die Nullhypothese auf dem 1 % Signifikanzniveau verworfen werden.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 Mathematikwettbewerb

Beim Wettbewerb „Känguru der Mathematik“ der Humboldt-Universität zu Berlin handelt es sich um einen Multiple-Choice-Test. Im Jahr 2006 bestand er für die Klassenstufen 7 und 8 aus 30 Aufgaben mit jeweils 5 Antworten, von denen genau eine richtig war. Die Punktergebnisse der Teilnehmer wurden nach folgendem Schema ermittelt:

Jeder Teilnehmer startet mit 30 Punkten auf seinem Punktekonto.
Zusätzlich zu diesen 30 Punkten werden für die richtigen Lösungen Punkte addiert:

für die ersten zehn Aufgaben	für die nächsten zehn Aufgaben	für die letzten zehn Aufgaben
jeweils 3 Punkte	jeweils 4 Punkte	jeweils 5 Punkte

Für falsche Antworten werden Punkte abgezogen, und zwar jeweils ein Viertel der erreichbaren:

bei den ersten zehn Aufgaben	bei den nächsten zehn Aufgaben	bei den letzten zehn Aufgaben
jeweils 0,75 Punkte	jeweils 1 Punkt	jeweils 1,25 Punkte

Eine nicht bearbeitete Aufgabe, in der also keine Antwort angekreuzt ist, wird mit 0 Punkten bewertet.

a) Weisen Sie nach, dass nach diesem Bewertungsschema die erreichbare Punktzahl zwischen 0 und 150 Punkten liegt.

Geben Sie drei verschiedene Möglichkeiten an, wie ein Teilnehmer eine Endpunktzahl von 30 Punkten erreichen kann.

Ein Teilnehmer hat ein Ergebnis von 125 Punkten erreicht. Bestimmen Sie die Mindestanzahl von Aufgaben des 5-Punkte-Typs, die er richtig gelöst haben muss.

b) Ein pubertierender Teilnehmer macht sich einen Witz daraus, ohne nachzudenken 30 Antworten anzukreuzen und nach zwei Minuten den Lösungsbogen mit der Bemerkung abzugeben: „Ich bin schon fertig.“
Bestimmen Sie, welche Gesamtpunktzahl bei dieser Vorgehensweise zu erwarten ist.

Lina hingegen nimmt den Wettbewerb ernst. Sie hat 24 Aufgaben sorgfältig gelöst, die anderen 6 bereiten ihr Probleme. Bei 3 der fehlenden Aufgaben versteht sie die Aufgabenstellung nicht, bei 2 Aufgaben kann sie jeweils eine der 5 Antwortmöglichkeiten ausschließen, bei einer Aufgabe erkennt sie zwei Antworten als falsch.
Entscheiden Sie, in welcher Situation es aus stochastischer Sicht sinnvoll sein kann zu raten, in welcher nicht.

Am Känguru-Wettbewerb 2006 haben aus den Klassenstufen 7 und 8 insgesamt 107 921 Schülerinnen und Schüler teilgenommen. Die Punkteverteilung ist in der beigefügten Tabelle dargestellt. In der Tabelle ist als Durchschnitt (Mittelwert) 55 Punkte angegeben.

c) Beschreiben Sie, wie Sie bei der Bestimmung des Mittelwertes und der Varianz der Punkteverteilung der 107 921 Schülerinnen und Schüler aus den Klassenstufen 7 und 8 mit den gegebenen Daten in der Tabelle vorgehen würden (ohne die ziemlich umfangreichen Rechnungen wirklich durchzuführen).

d) Geht man von den Werten in der Ihnen vorliegenden Tabelle aus, so ergibt sich ein Mittelwert von 55,2. Die Wettbewerbsleitung nennt jedoch einen Punktedurchschnitt von 55,0.

Begründen Sie, wie es zu dieser Abweichung kommen kann. Gehen Sie davon aus, dass Rechenfehler nicht die Ursache sind.

Im Folgenden geht es darum, die gegebene Punkteverteilung mit einer Normalverteilung zu vergleichen.

e) Betrachten Sie die Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 55$ und $\sigma = 18{,}5$.

Bestimmen Sie die Anzahl der 107 921 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die nach dieser Normalverteilung zwischen 20 und 49,75 Punkten hätten erreicht haben müssen und berechnen Sie die prozentuale Abweichung vom tatsächlichen Wert.

Begründen Sie, dass bereits an den absoluten Häufigkeiten in der Tabelle zu erkennen ist, dass die Näherung mit dieser Normalverteilung zu deutlichen Abweichungen führen muss.

Känguru-Wettbewerb 2006 Ergebnisse

Punkte	Anzahl in Klassenstufen			
	5/6	7/8	9/10	11/13
150,00	5	2	0	7
140,00 - 149,75	38	7	8	18
130,00 - 139,75	233	33	28	38
120,00 - 129,75	733	110	64	58
110,00 - 119,75	1 984	376	133	155
100,00 - 109,75	4 286	1 106	467	348
90,00 – 99,75	8 256	2 820	1 292	672
80,00 – 89,75	14 293	6 162	3 179	1 108
70,00 – 79,75	21 852	11 324	6 588	2 181
60,00 – 69,75	28 532	17 702	11 209	3 631
50,00 – 59,75	32 318	23 101	15 395	5 009
40,00 – 49,75	27 774	23 021	15 159	5 070
30,00 – 39,75	16 711	15 270	9 276	2 908
20,00 – 29,75	6 509	5 682	2 991	880
10,00 – 19,75	1 335	1 114	499	129
0,00 - 9,75	95	91	67	71
Insgesamt	**164 954**	**107 921**	**66 355**	**22 283**
Durchschnitt	**60,9**	**55,0**	**54,3**	**56,3**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Werden alle Aufgaben richtig gelöst, so ergibt sich als Endpunktzahl $30+10\cdot 3+10\cdot 4+10\cdot 5=150$. Werden nur falsche Antworten angekreuzt, so sind die 30 Punkte Startguthaben aufgebraucht: $30-10\cdot 0{,}75-10\cdot 1-10\cdot 1{,}25=0$. 30 Punkte als Endergebnis kommen z.B. zustande, wenn man • keine Aufgabe bearbeitet, die 30 Startpunkte also das Endergebnis sind, • alle Aufgaben bearbeitet und von jeder "Sorte" zwei richtig und acht falsch gelöst hat: $30+2\cdot 3-8\cdot 0{,}75+2\cdot 4-8\cdot 1+2\cdot 5-8\cdot 1{,}25=30$, • nur 5 Aufgaben bearbeitet hat, eine 4-Punkte-Aufgabe richtig, zwei 3-Punkte-Aufgaben und zwei 5-Punkte-Aufgaben falsch: $30+4-2\cdot 0{,}75-2\cdot 1{,}25=30$. Wurden alle 3-Punkte-Aufgaben und alle 4-Punkte-Aufgaben richtig gelöst, so ist eine Punktsumme von $30+30+40=100$ erreicht. Es müssen also noch mindestens 5 Aufgaben aus dem letzten Drittel richtig gelöst werden.	10	20	
b)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ohne nachzudenken eine richtige Antwort ankreuzt, beträgt 0,2. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ohne nachzudenken eine falsche Antwort ankreuzt, beträgt 0,8. Für jede der Teilaufgaben mit *B* Bewertungspunkten gilt: $E(T)=0{,}2\cdot B-0{,}8\cdot 0{,}25\cdot B=0$. Der Erwartungswert für die Gesamtpunktzahl ist also die Startpunktzahl 30. Aus stochastischer Sicht ist es nicht sinnvoll zu raten, wenn der Erwartungswert für die zu erreichende Punktzahl negativ ist. Im ersten Fall ist siehe c) der Erwartungswert pro Aufgabe 0. In den anderen Fällen sind die Erwartungswerte positiv: $E(T_2)=0{,}25\cdot B-0{,}75\cdot 0{,}25\cdot B=0{,}0625\cdot B$. $E(T_3)=\frac{1}{3}B-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}B=\frac{1}{6}B$. Es ist also aus stochastischer Sicht in allen Fällen sinnvoll zu raten.	10	15	
c)	Zu beachten ist, dass in der Tabelle nicht die einzelnen Ergebnisse aufgeführt sind, sondern Klassen eingeteilt wurden. Nur die absolute Häufigkeit, mit der die maximale Punktzahl 150 erreicht wurde, ist gesondert aufgeführt. Zur Berechnung des Mittelwerts und der Varianz kann man nur sinnvollerweise jeweils die Klassenmitten benutzen. Mittelwert: Statt die Summe der einzelnen Daten kann man deshalb nur die Produkte aus Klassenmitten und zugehörigen Anzahlen aufaddieren und dann durch die Gesamtzahl teilen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Varianz: • Entweder man summiert die Produkte aus den quadrierten Abweichungen von Klassenmitten und zuvor berechnetem Mittelwert mit den zugehörigen Anzahlen und teilt dann diese Summe durch die Gesamtzahl. *Wenn hier die Division durch n – 1 genannt wird, ist dies ebenso zu akzeptieren, der Sinn dieser Unterschiede soll nicht diskutiert werden* • oder rechentechnisch besser: man summiert die Produkte aus den Quadraten der einzelnen Klassenmitten und zugehörigen Anzahlen, teilt das Ergebnis durch die Gesamtzahl und subtrahiert noch das Quadrat des zuvor bestimmten Mittelwertes.		10	
d)	Vermutlich wurde der Mittelwert von 55 aus den genauen Punktzahlen berechnet. Die Einteilung der Punkte in die Klassen ermöglicht eine kompakte Darstellung der Ergebnisse, die exakte Berechnung des Mittelwerts ist jedoch nicht mehr möglich.			10
e)	Wenn *X* normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 55$ und $\sigma = 18{,}5$, so gilt: $P(20 \le X \le 49{,}75) = \Phi\left(\frac{49{,}75-55}{18{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{20-55}{18{,}5}\right) \approx \Phi(-0{,}28) - \Phi(-1{,}89)$ $\approx (1-0{,}6103) - (1-0{,}9706) = 0{,}3897 - 0{,}0294 = 0{,}3603 \approx 36{,}0\,\%$. Danach müssten ca. $0{,}36 \cdot 107\,291 \approx 38\,850$ Teilnehmerinnen und Teilnehmer zwischen 20 und 49,75 Punkten erreicht haben. Laut Tabelle waren es jedoch 43 973. Die Abweichung vom Tabellenwert beträgt ca. 12 %. Während eine Glockenkurve mit einem Maximum bei 55 symmetrisch nach beiden Seiten abfällt, ist die absolute Häufigkeit von Punkten im Bereich $[40{,}00\,;\,49{,}75]$ fast identisch mit der im Bereich $[50{,}00\,;\,59{,}75]$. Es erstaunt daher nicht, dass die mit der Normalverteilung prognostizierten Werte deutlich kleiner sind.		15	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20