Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2007/2008

22. Februar 2008, 9.00 Uhr

Leistungskurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, Berufliche Schulen

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer – Haupttermin

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines
2 Rückmeldebogen
3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
4 Hinweise zum Korrekturverfahren
5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **300 Minuten.**
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an BM 3 faxen!

Institut für Bildungsmonitoring
BM 3

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Leistungskurs **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: _______________

Unterschrift: __________________________________

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **zwei Aufgaben** aus, davon eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet I** (Analysis) und eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet II** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) bzw. dem **Sachgebiet III** (Stochastik). Beide Aufgaben reichen Sie an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten beide Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen „Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur“ (S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es aufgrund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen aufgrund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere aufseiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders vorgegangen ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 200 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte	Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 190	≥ 95 %	15	≥ 110	≥ 55 %	7
≥ 180	≥ 90 %	14	≥ 100	≥ 50 %	6
≥ 170	≥ 85 %	13	≥ 90	≥ 45 %	5
≥ 160	≥ 80 %	12	≥ 80	≥ 40 %	4
≥ 150	≥ 75 %	11	≥ 66	≥ 33 %	3
≥ 140	≥ 70 %	10	≥ 52	≥ 26 %	2
≥ 130	≥ 65 %	9	≥ 38	≥ 19 %	1
≥ 120	≥ 60 %	8	< 38	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht worden sind.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre			**BeBo EKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →	

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre			**BeBo ZKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Analysis 1

I.1 Neubesiedlung von Biotopen

Eine Forschergruppe beobachtet in den Tropen die natürliche Neubesiedlung von Seen bei Überschwemmungen durch bisher in diesen Seen nicht vorhandene Ruderfußkrebse.

Ihre Untersuchungen und theoretische Überlegungen legen nahe, dass für diesen Fall die ***lokale Änderungsrate*** der Krebsdichte im Wasser einer Funktion des Typs

$$f_k(t) = k \cdot \frac{e^t}{(1+e^t)^2}, \ k > 0, t \geq 0$$

folgt, d.h. $f_k(t)$ gibt zum Zeitpunkt t (in Monaten) die ***Zuwachsrate*** in Krebsen pro Kubikmeter Wasser pro Monat an, Letzteres näherungsweise, da ganzzahlige Funktionswerte die Ausnahme sind.

Zunächst sollen Sie diese Funktionenschar untersuchen und Ihre Ergebnisse dann im oben geschilderten Sachkontext deuten.

a) • Begründen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar f_k keine Nullstellen aufweisen, und zeigen Sie, dass gilt: $f_k(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

• Berechnen Sie die Extrempunkte und bestimmen Sie die Wendepunkte von f_k im oben angegebenen Definitionsbereich.

Hinweis: Sie können dabei ohne Nachweis $f_k''(t) = k \cdot \frac{e^t(1-4e^t+e^{2t})}{(1+e^t)^4}$ verwenden.

• Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{40} im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in das Koordinatensystem in der Anlage. **30 P**

b) Interpretieren Sie Ihre in Teilaufgabe a) gewonnenen Erkenntnisse über die Funktionenschar in Bezug auf die Entwicklung der Krebsdichte im Wasser.
Gehen Sie dabei auch auf die langfristige Entwicklung der Dichte ein. **10 P**

c) Bestätigen Sie, dass F_k mit $F_k(t) = \frac{-k}{1+e^t}$ eine Stammfunktion von f_k ist. **5 P**

d) Bei einem der beobachteten Seen ergaben die Untersuchungen durch Kontrollentnahmen, dass drei Monate nach dem ersten Auftauchen der Ruderfußkrebse in diesem See von einer ***Dichte*** von 40 000 Krebsen pro Kubikmeter auszugehen war.

• Ermitteln Sie aus dieser Beobachtung den Parameter k der Modellierung.
Weisen Sie zunächst nach, dass sich für die Dichte ergibt: $D_k(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$.

• Bestimmen Sie mit diesem Modell, wie viele Ruderfußkrebse pro Kubikmeter in der ersten Woche (also im ersten Viertelmonat) ungefähr in den See gelangt sind.

• Bestimmen Sie, wie groß mit diesem Modell die Dichte der Krebse „nach langer Zeit“ in dem See sein wird. **20 P**

e) Die Kollegen der Forscher im Heimatland wollen untersuchen, ob diese ***Änderung*** der Dichte an Ruderfußkrebsen auch bei bereits besiedelten Seen zu beobachten ist, deren Besiedlungsdichte durch äußeren Einfluss erhöht wird.

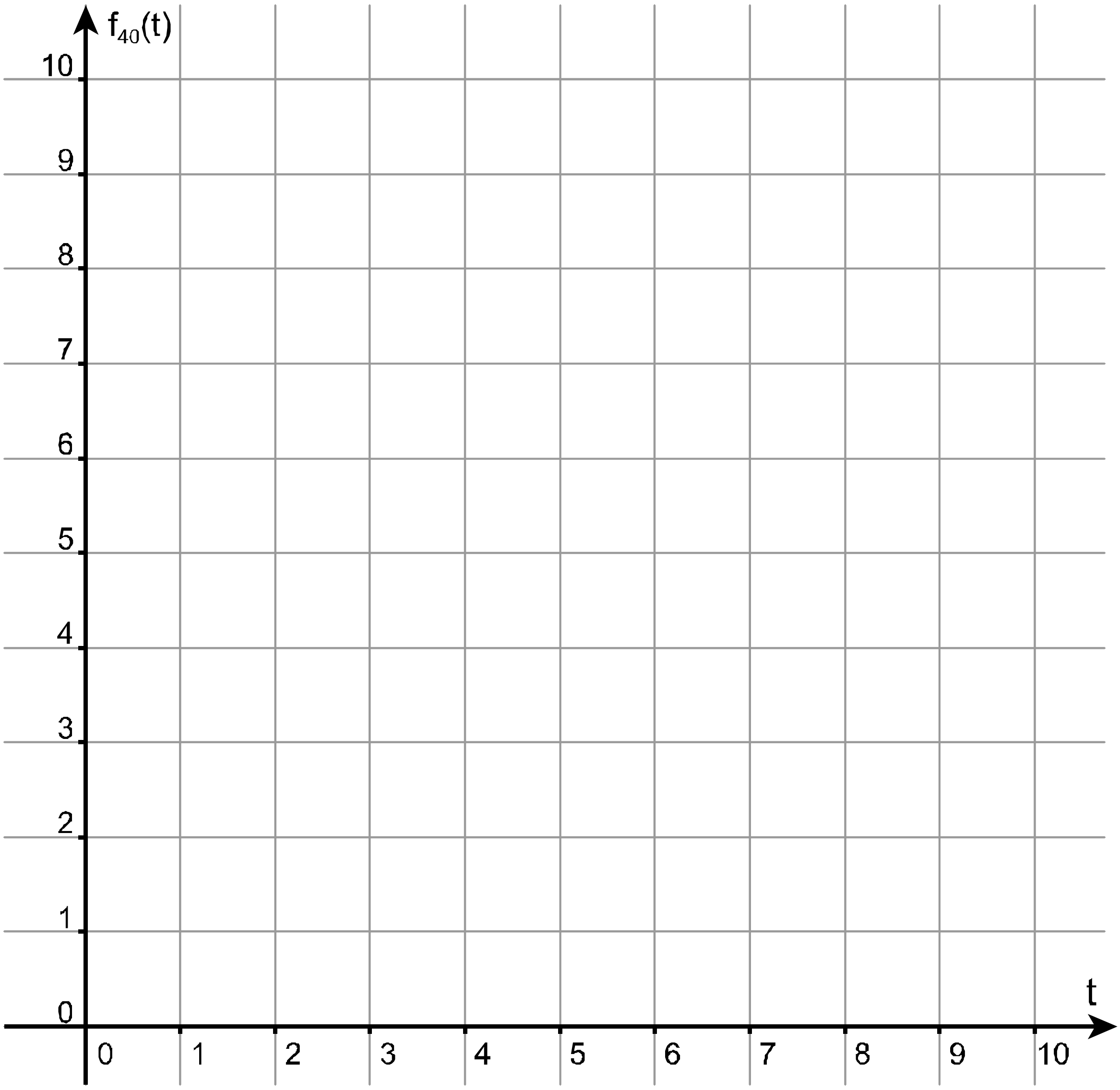
Sie arbeiten daher mit der Stammfunktion D von f_k mit $D(t) = D_{anf} + \int_0^t f_k(z)dz$.

- Beschreiben Sie, was an diesem Modell gegenüber jenem aus Aufgabenteil d) geändert wurde.
- Begründen Sie durch Interpretation von f_k, welche Voraussetzungen im Sachkontext gegeben sein müssen, damit dieses Modell für bereits besiedelte Seen <u>sinnvoll</u> sein kann. **10 P**

f) In einem der Seen beobachteten die Forscher eine Sterblichkeitsrate der Krebse, die nicht mehr dem bisherigen Modell entsprach: Die Sterblichkeitsrate war im Wesentlichen proportional zu der Dichte, die aktuell nach dem alten Modell zu erwarten war. (Dieser Proportionalitätsfaktor möge mit s bezeichnet werden.)

- Weisen Sie nach, dass die Änderungsrate nun durch die Funktion
$$f^*_{k;\,s}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - s \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t} \right) \right)$$
beschrieben werden kann.
- Begründen Sie für $s = 0,04$, dass die Dichte der Ruderfußkrebse in diesem Fall nach etwa 4 Monaten ein Maximum erreicht.
Führen Sie die nötigen Berechnungen exakt oder näherungsweise durch. **25 P**

Anlage zur Aufgabe „Neubesiedlung von Biotopen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

a) **Nullstellen, Randverhalten**

Die Funktionen haben keine Nullstellen, da der Zähler nie Null wird, allerdings nähern sich die Graphen beliebig der x-Achse (aus dem Positiven):

Für $t \to \infty$ gilt: $1+e^t \to e^t \;\Rightarrow k\cdot\frac{e^t}{(1+e^t)^2} \to k\cdot\frac{1}{e^t}$. Da für $t\to\infty$ $\;k\cdot\frac{1}{e^t}\to 0$ gilt, ist die x-Achse die Asymptote. Zusammen mit dem ersten Resultat ergibt sich, dass die Funktionswerte aus dem Positiven gegen diese Asymptote gehen.

Extrem- und Wendepunkte

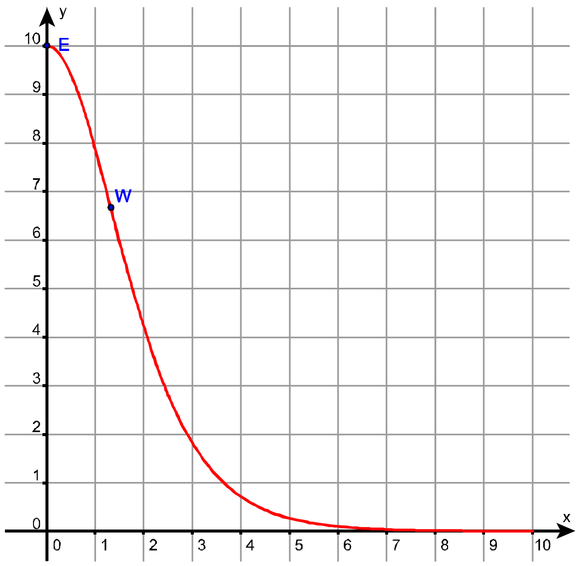
Ableiten liefert $f_k'(t) = k\cdot\frac{e^t(1-e^t)}{\left(1+e^t\right)^3}$.

Diese Funktion hat eine einzige Nullstelle bei $t = 0$. Für die 2. Ableitung gilt $f_k''(0) = k\cdot\frac{(1-4+1)}{(1+1)^4} < 0$, denn k ist positiv, es handelt sich um ein Maximum *(genauer ein Randmaximum mit waagerechter Tangente, da der Definitionsbereich auf nichtnegative t beschränkt ist).*

Da $f_k(0) = k\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{k}{4}$, gilt für das Maximum: $E\,(0 \mid \frac{1}{4}k)$.

Auswertung der gegebenen 2. Ableitung führt zur Lösung der quadratischen Gleichung $u^2-4u+1=0$ mit $u=e^t$. Diese Gleichung hat im Positiven eine Lösung mit $x_W \approx 1{,}3$. Damit ist gerundet $W\,(1{,}3|0{,}17\cdot k)$, denn bedingt durch den Hochpunkt E (Rechtskrümmung) und das Verhalten für $t\to\infty$ (Linkskrümmung) muss sich die Krümmungsrichtung ändern.

Skizze von f_{40}



		I	II	III
		20	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
b)	**Interpretation im Sachkontext** (Vorschlag) Mit $t = 0$ beginnt eine plötzliche, starke Populations- bzw. Dichtezunahme. Die Populationszunahme verringert sich zunächst immer stärker (bis zum Wendepunkt – nach mehr als 5 Wochen), danach verringert sie sich langsamer; die Dichte wächst zwar immer weiter, aber auch in immer kleinerem Maße, bis das Wachstum der Dichte schließlich gegen Null geht. Anfangs kommt eine große Menge an Ruderfußkrebsen hinzu; deren Dichte vermehrt sich kontinuierlich – sei es durch Fortpflanzung, sei es durch weitere Einschwemmung – jedoch geschieht die Dichteerhöhung in immer kleiner werdendem Umfang. Nach einigen Monaten hat sich die Entwicklung der Dichte beruhigt, die Ruderfußkrebs-Dichte bleibt dann annähernd gleich (im Modell).		10	
c)	Die Ableitung von F_k belegt die Aussage: $F_k'(t) = \frac{k \cdot e^t}{(1+e^t)^2} = k \cdot \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f_k(t)$	5		
d)	**Parameter *k* bestimmen** Hier ist zum Ersten die Gesamtpopulationsdichte D als eine Stammfunktion zu f gefragt. Mit der Vorgabe aus c) folgt: $D_k(t) = \int_0^t f_k(z)dz = F_k(t) - F_k(0)$. Da $F_k(t) = k \cdot \frac{-1}{1+e^t}$ und $D_k(0) = 0$, gilt $F_k(0) = \frac{-k}{2}$. Also ist $D_k(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$. Damit ist hier die Gleichung $40000 = D_k(3) = k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^3}\right)$ zu lösen: Da $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^3}\right) = \frac{1+e^3-2}{2+2\cdot e^3} = \frac{e^3-1}{2e^3+2}$, folgt $k = 40000 \cdot \frac{2e^3+2}{e^3-1} \approx 88400$. Das Ergebnis ist $k \approx 88400$. **Dichte nach einer Woche** Die Dichte im ersten Viertelmonat ergibt sich durch $D_{88400}(0{,}25) = 88400 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{0,25}}\right)$ zu etwa 5500 Krebsen pro m³. **Dichte nach „langer Zeit"** Für $t \to \infty$ gilt $D_{88400}(t) \to \frac{88400}{2} \approx 44200$, da der zweite Term in der Klammer gegen Null geht.		15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	**Modelländerung** Der Stammfunktion ist eine additive Konstante hinzu gefügt. Sie steht offenbar für die zur Zeit $t = 0$ bereits vorhandene Dichte an Krebsen. **Voraussetzungen** Grundsätzlich setzt dieses Modell eine plötzliche Zunahme im Zeitpunkt $t = 0$ voraus. Das ist auch bei einem bereits besiedelten See denkbar – z. B. auch hier durch eine Einleitung einer weiteren Population von Krebsen durch eine plötzliche Änderung der Strömungsverhältnisse oder auch durch eine durch Menschen verursachte Zufuhr. Ebenso muss allerdings diese Zunahme noch eine Weile anhalten, auch wenn diese dabei immer geringer wird.		10	
f)	**Neue Änderungsrate** Wenn die Sterberate *st(t)* proportional zum Bestand nach dem bisherigen Modell sein soll, so gilt $st(t) = s \cdot B_k(t) = s \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)$. Da die Sterberate in der Bilanz ein negatives Vorzeichen haben muss, ergibt sich die angegebene Beziehung $f^*_{k;\,s}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - s \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)\right)$. Für $s = 0{,}04$ folgt dann $f^*_{k;\,0,04}(t) = k \cdot \left(\frac{e^t}{(1+e^t)^2} - 0{,}04 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t}\right)\right)$. **Maximum der Population** Sinnvoll ist es, diesen Ausdruck zu $f^*_{k;\,0,04}(t) = k \cdot \left(\frac{0{,}02 + e^t - 0{,}02 \cdot e^{2t}}{(1+e^t)^2}\right)$ zu vereinfachen. Da $f^*_{k;\,0,04}(0) = \frac{k}{4} > 0$ und z.B. $f^*_{k;\,0,04}(6) \approx -0{,}0174k < 0$, weist die Änderungsrate in diesem Bereich eine Nullstelle auf und die Population aufgrund des Monotonieverhaltens in ihrer Umgebung ein Maximum. Die Berechnung der Nullstelle führt auf folgende Gleichung: $0{,}02 + e^t - 0{,}02 \cdot e^{2t} = 0$. Über die Substitution $e^t = u$ sowie anschließende Umwandlung in die Normalform einer quadratischen Gleichung erhält man: $u^2 - 50u - 1 = 0$ sowie $u = 25 \pm \sqrt{626}$. Eingesetzt für e^t ergibt sich schließlich $t = 3{,}91...$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Ein hinreichend genaues Rechnen z. B. mit einem Intervall-Verkleinerungsverfahren liefert ebenfalls in kurzer Zeit das hinreichend genaue Ergebnis: Die Population erreicht also nach etwa vier Monaten ihr Maximum. *Hinweis: Die Ergebnisse in diesem Aufgabenteil gelten unabhängig vom Wert des Parameters a, eine Lösung von d) ist hier also nicht erforderlich.*		10	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

ANALYSIS 2

I.2 Zitronenpresse

Eine Zitronenpresse besteht aus der eigentlichen Presse als Deckel und einem Auffanggefäß. Beides wird in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

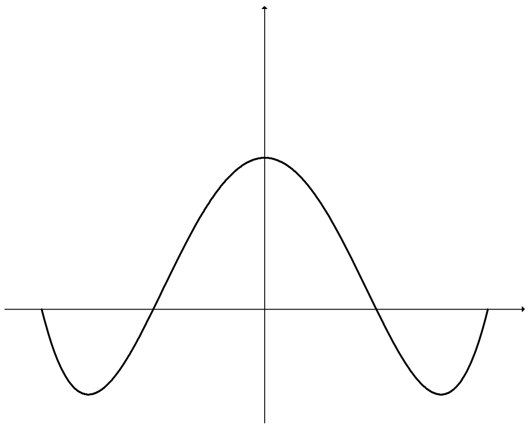
Die Zitronenpresse ist insgesamt 9 cm hoch; Deckel und Auffanggefäß haben einen Durchmesser von 12 cm.

Als Modellgrundlage für die Form des Deckels wird im Folgenden von der Rotation des Graphen einer Funktion $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = ax^4 + bx^2 + 4 \text{ (mit } a, b \neq 0)$$

um die y-Achse ausgegangen.

Die Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm.



a) Bestätigen Sie zunächst, dass jeder Funktionsgraph dieser Funktionenschar einen Extrempunkt auf der y-Achse besitzt, und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an. **5 P**

b) Bestimmen Sie nunmehr im Hinblick auf eine brauchbare Modellierung der Zitronenpresse Bedingungen für a und b, so dass der Extrempunkt auf der y-Achse ein Hochpunkt ist und außerdem genau zwei Tiefpunkte vorliegen. **15 P**

c) Berechnen Sie nun a und b so, dass $x = 3$ und $x = 6$ Nullstellen von $f_{a;b}$ sind; damit soll der Durchmesser der Zitronenpresse sinnvoll berücksichtigt werden. **10 P**

Verwenden Sie für die weiteren Berechnungen:

$$f(x) = \frac{1}{81}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + 4 .$$

d) Ermitteln Sie für diese Funktion f die Extrempunkte und berechnen Sie die Wendepunkte jeweils im Intervall $[-6;6]$.

Zur Kontrolle:

Die Koordinaten der Tiefpunkte lauten: $T_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\middle|-\frac{9}{4}\right)$ bzw. $T_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{10}\middle|-\frac{9}{4}\right)$. **25 P**

Das Auffanggefäß hat die Form eines Kegelstumpfes. Sein Mantel wird durch die Rotation der Geraden t um die y-Achse gebildet; t ist dabei die Tangente an den Graphen von f im Punkt (6 | 0). Der Boden des Auffanggefäßes liegt bei $y = -5$.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t und den Radius r der Bodenfläche. Skizzieren Sie nun den gesamten Längsschnitt der Zitronenpresse im Koordinatensystem der Anlage 1. **10 P**

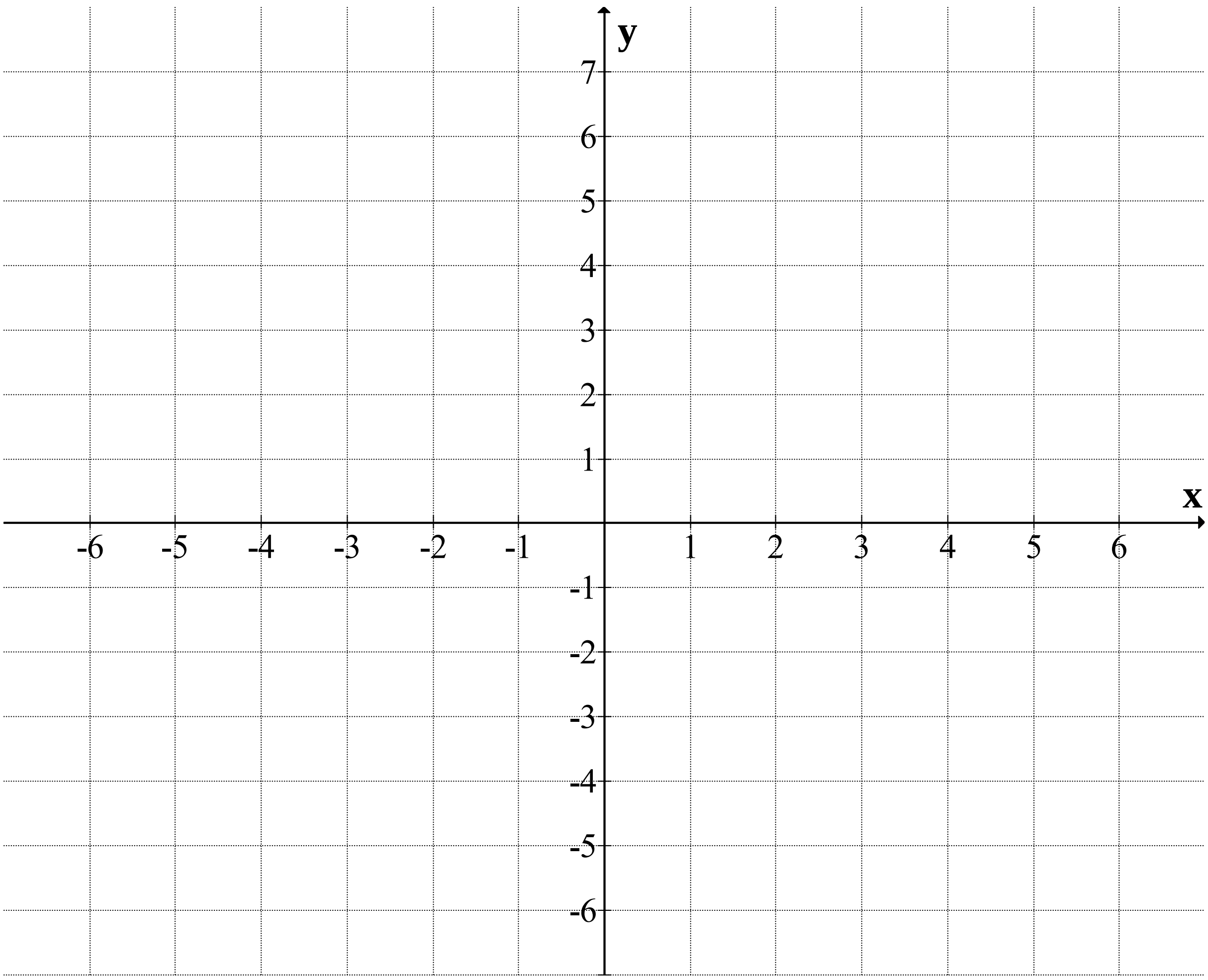
f) Wenn man Zitronen auspresst, so sammelt sich das Ausgepresste anfangs im Rand des Deckels.

- Bestimmen Sie zunächst den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich zwischen den beiden positiven Nullstellen.
- Beschreiben Sie ein sinnvolles Näherungsverfahren zur Berechnung des Fassungsvermögens des Randes, bei dem Sie den oben berechneten Flächeninhalt verwenden.
- Bestimmen Sie mit Ihrem Verfahren das Fassungsvermögen. (Der exakte Wert liegt bei $V = 127{,}2\ \text{cm}^3$.) **20 P**

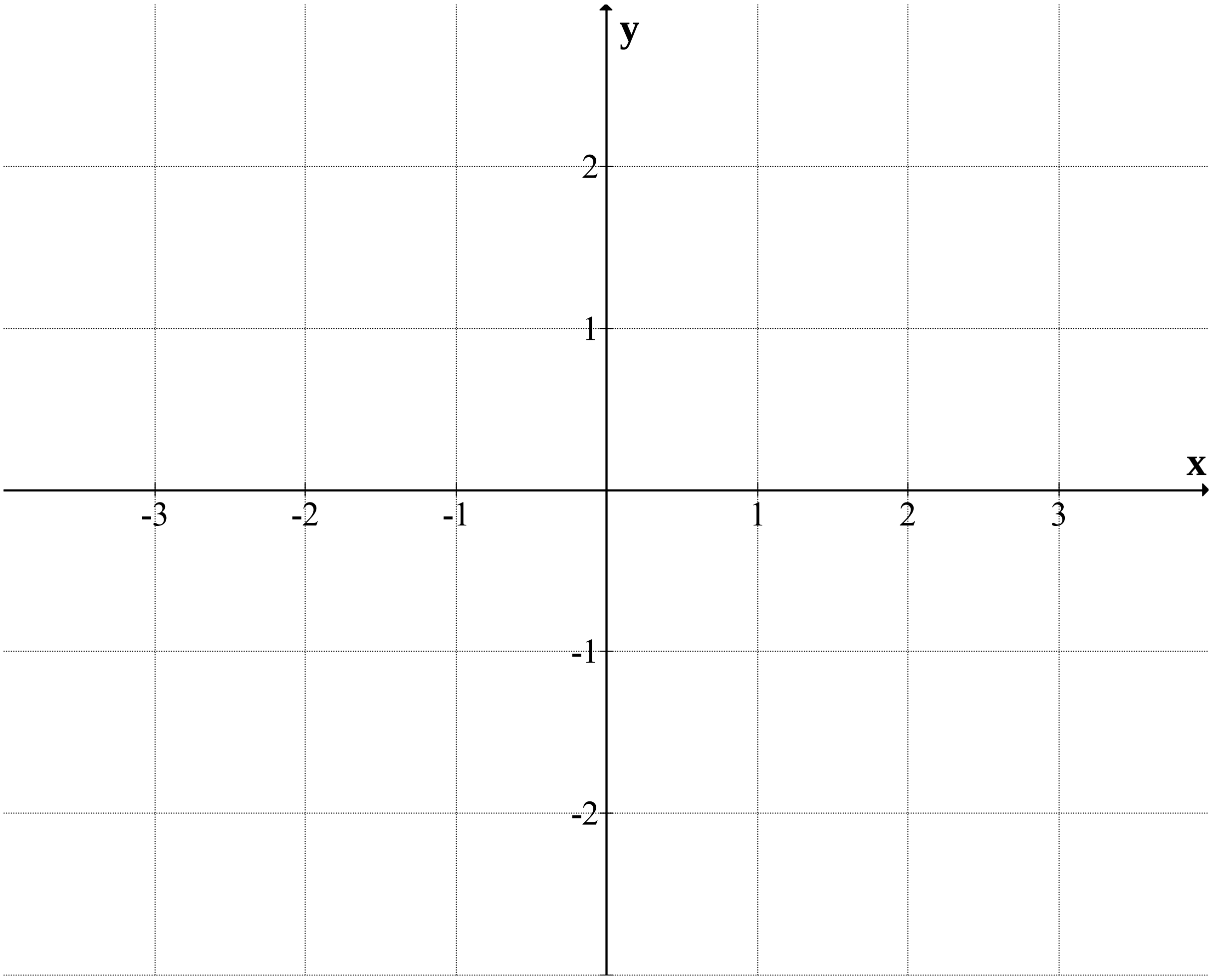
Zitronen haben in etwa die Form so genannter Rotationsellipsoide, d.h. <u>ein</u> Querschnitt ist eine Ellipse, deren oberer Teil hier durch die Funktionsgleichung $g(x) = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ bestimmt ist.

g) Skizzieren Sie im Koordinatensystem der Anlage 2 maßstäblich den Querschnitt einer solchen Modell-Zitrone und zeigen Sie mit der Formel $V = \pi \cdot \int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx$, dass diese Zitrusfrucht ein Volumen von ca. 50 cm³ besitzt. **15 P**

Anlage 1 zur Aufgabe „Zitronenpresse“, Teil e)



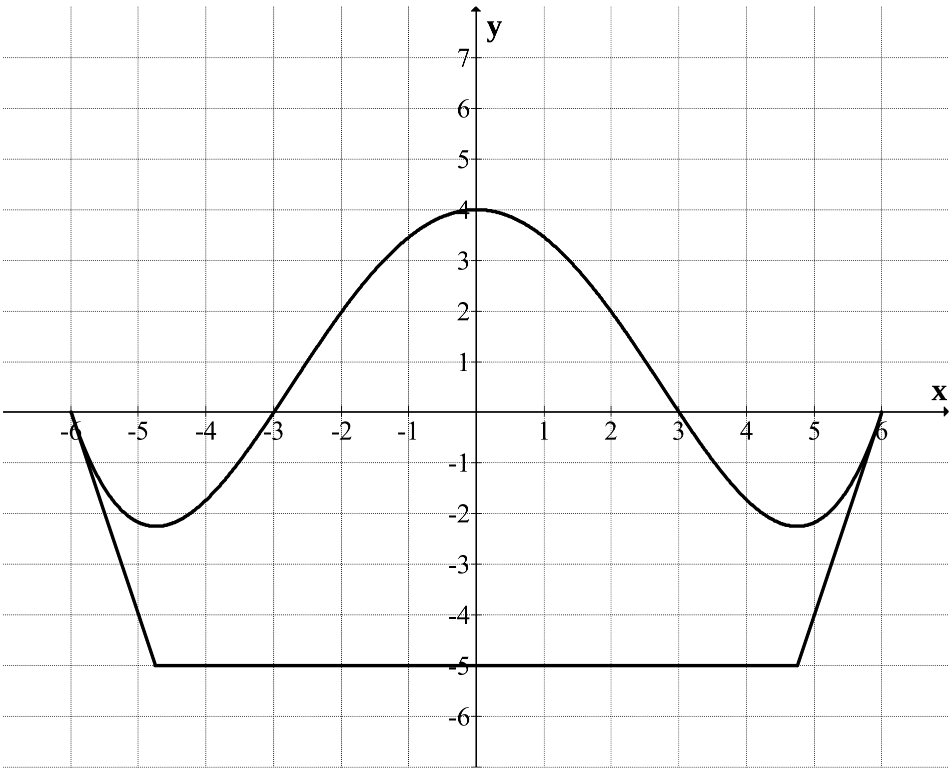
Anlage 2 zur Aufgabe „Zitronenpresse“, Teil g)

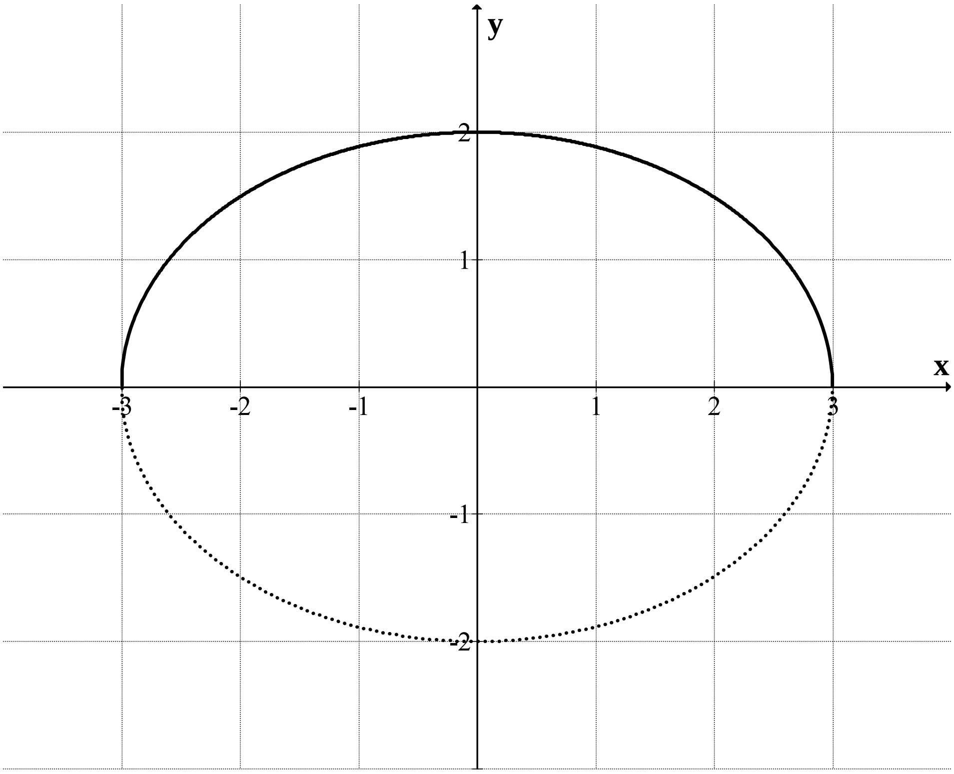


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Aus der Achsensymmetrie des Graphen folgt, dass jeder Graph auf der y-Achse einen Extrempunkt hat, und zwar (0 | 4). *Diese Teilaufgabe kann auch auf andere Weise oder auch zusammen mit der Teilaufgabe b) gelöst werden.*	5		
b)	Berechnung der Extremstellen: $f'_{a;b}(x) = 4ax^3 + 2bx = x \cdot (4ax^2 + 2b)$ $f''_{a;b}(x) = 12ax^2 + 2b$ $x \cdot (4ax^2 + 2b) = 0$, d.h. eine Extremstelle liegt bei $x = 0$ (siehe a)). Bei $x = 0$ soll ein Hochpunkt vorliegen, d.h. für die 2. Ableitung muss gelten: $f''_{a;b}(0) = 2b < 0$, woraus $b < 0$ folgt. Berechnung weiterer Extremstellen: $4ax^2 + 2b = 0$ $x^2 = -\frac{b}{2a}$ $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Damit diese Gleichung zwei Lösungen hat und damit zwei weitere Extremstellen existieren, müssen a und b unterschiedliche Vorzeichen haben. Da $b < 0$, muss $a > 0$ gelten. Nachweis, dass es sich um Tiefpunkte handelt: $f''_{a;b}\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = 12a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + 2b = -4b > 0$, da $b < 0$. Zusammenfassung: Die Bedingungen lauten: $a > 0$ und $b < 0$.		15	
c)	Die beiden Bedingungen liefern das folgende Gleichungssystem: $f(3) = 0: \quad 81a + 9b + 4 = 0$ $f(6) = 0: \quad 1296a + 36b + 4 = 0$. Multiplikation der ersten Gleichung mit –4 und anschließende Addition liefert $972a - 12 = 0$ und damit $a = \frac{1}{81}$. Durch Einsetzen von a in die erste Gleichung erhält man: $9b + 5 = 0$ und schließlich $b = -\frac{5}{9}$. Damit erhält man für die gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{81}x^4 - \frac{5}{9}x^2 + 4$.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Extrempunkte: $f'(x)=\frac{4}{81}x^3-\frac{10}{9}x=0$. Daraus folgt $\frac{1}{81}x\cdot\left(4x^2-90\right)=0$. $x_1=0$ ist Lösung der Gleichung (siehe a) und b)). Weiterhin gilt $4x^2-90=0$ und damit $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{90}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$. Dass 0 Maximalstelle ist, ist bereits bekannt. $f''(x)=\frac{4}{27}x^2-\frac{10}{9}$ und danach $f''\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)=\frac{20}{9}>0$, also handelt es sich bei $x_{2,3}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$ um Minimalstellen. $f\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}\right)=-\frac{9}{4}$. Eine andere Variante der Berechnung der weiteren Extremstellen ergibt sich über die in a) festgestellte Beziehung $x_{2,3}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Setzt man die Werte für *a* und *b* ein, erhält man: $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{5}{9}\cdot\frac{81}{2}}=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}=\pm\sqrt{\frac{90}{4}}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}.$ Damit sind $T_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\middle\|-\frac{9}{4}\right)$ und $T_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{10}\middle\|-\frac{9}{4}\right)$ die Tiefpunkte und $H\left(0\|4\right)$ der Hochpunkt des Graphen. Wendepunkte: $f''(x)=\frac{4}{27}x^2-\frac{10}{9}=0$. Daraus folgt $x^2=\frac{30}{4}$ und schließlich $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}$. $f'''(x)=\frac{8}{27}x.$ $f'''\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{2}\right)\neq 0.$ $f\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{2}\right)=\frac{19}{36}.$ *Eine Argumentation ohne Zuhilfenahme der 3. Ableitung ist ebenfalls möglich.* Danach sind $W_1\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\middle\|\frac{19}{36}\right)$ und $W_2\left(-\frac{\sqrt{30}}{2}\middle\|\frac{19}{36}\right)$ die Wendepunkte des Graphen im angegebenen Intervall.	5	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Tangentengleichung hat die Form: $t(x) = f'(6)\cdot(x-6) + f(6) = 4(x-6) + 0 = 4x - 24.$ Den Radius r bestimmt man mit der Gleichung: $t(r) = 4r - 24 = -5$. Es folgt: $r = \frac{19}{4} = 4{,}75$. 		10	
f)	• <u>Bestimmung des Flächeninhaltes:</u> $A = \left\| \int_3^6 f(x)dx \right\| = \left\| \left[\frac{1}{405}x^5 - \frac{5}{27}x^3 + 4x \right]_3^6 \right\| = \|3{,}2 - 7{,}6\| = 4{,}4$. • <u>Mögliches Näherungsverfahren:</u> Der Randkörper entsteht durch Rotation der Fläche um die y-Achse. Der Körper hat näherungsweise die Gestalt eines halben „Reifens“. Denkt man sich den „Reifen“ aufgeschnitten und gestreckt, so nimmt er ungefähr die Form eines „Troges“ mit der Länge $2\pi R$, wobei für R der Wert 4,5 (Mittelwert der Intervallgrenzen) angesetzt wird. • Damit erhalten wir die folgende Näherung für das Volumen: $\tilde{V} = 2\cdot\pi\cdot 4{,}4\cdot 4{,}5 \approx 124{,}4$.		10	5 5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	Skizze:  Berechnung des Näherungswertes für das Zitronenvolumen: $V = 2\pi \cdot \int_0^3 4 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = 8\pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{27}\right]_0^3 = 8\pi \cdot 2 = 16\pi \approx 50.$ Die Zitrusfrucht hat also tatsächlich ein Volumen von ca. 50 cm³.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

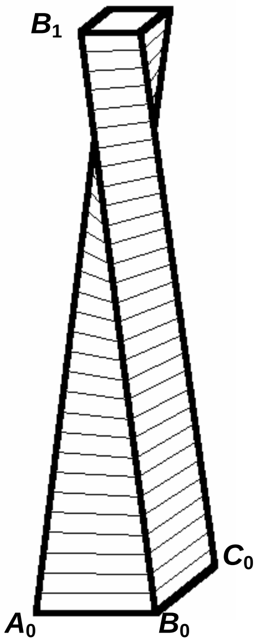
LA/AG 1

II.1 Quadrille

Der **Turning Torso** ist ein Hochhaus in der schwedischen Stadt Malmö. Der 57 Etagen hohe Wolkenkratzer erreicht eine Höhe von 190 Metern und ist damit der höchste Wolkenkratzer Skandinaviens und das zweithöchste Wohngebäude in Europa. Er wurde im Sommer 2005 eingeweiht und gilt seither als ein Wahrzeichen der Stadt.

Die einzelnen Stockwerke sind gegeneinander verdreht und haben alle eine gleich große, im Wesentlichen quadratische Grundfläche.

Der „Turning Torso“ regte einen anderen Architekten an, das rechts unten skizzierte Hochhaus **„Quadrille“** zu entwerfen, auf das sich alle Aufgabenteile beziehen.



Das Hochhaus „Quadrille“ hat eine quadratische horizontale Grundfläche der Seitenlänge 20 m und schließt in 120 m Höhe ab mit einer dazu parallelen kleineren (im Gegensatz zu Malmö) quadratischen Dachfläche mit der Seitenlänge von nur 10 m.

Die Mittelpunkte von Dach- und Bodenfläche sind lotrecht übereinander und liegen in dieser Aufgabe auf der z-Achse.

Die Dachfläche ist gegenüber der Bodenfläche von oben gesehen um 90° nach rechts gedreht.

Das Hochhaus hat 30 Stockwerke gleicher Höhe mit jeweils waagerechtem Boden und waagerechter Decke.

Alle Hauskanten sind gerade Strecken (dies auch im Gegensatz zu Malmö).

Aus Symmetriegründen folgt, dass alle vier von oben nach unten verlaufenden Gebäudekanten gleich lang sind und dass alle Stockwerke (alle horizontalen Schnittflächen) Quadrate sind.

a) Geben Sie für ein geeignetes Koordinatensystem (Einheit entspricht 1 m), in dem der Eckpunkt A_0 (siehe Abbildung) die Koordinaten $(10 \mid -10 \mid 0)$ hat, die Koordinaten der anderen 7 Eckpunkte des Hochhauses an. **10 P**

Wenn Ihnen das nicht gelingt, verwenden sie für die weiteren Aufgabenteile die folgenden 8 Punkte:

$$A_0(10 \mid 10 \mid 0)\ ,\ B_0(-10 \mid 10 \mid 0)\ ,\ C_0(-10 \mid -10 \mid 0)\ ,\ D_0(10 \mid -10 \mid 0)$$
$$A_1(5 \mid -5 \mid 120)\ ,\ B_1(5 \mid 5 \mid 120)\ ,\ C_1(-5 \mid 5 \mid 120)\ ,\ D_1(-5 \mid -5 \mid 120)$$

Die Stockwerke werden – wie üblich – von unten nach oben gezählt, und es gelte hier die Verabredung, dass das Erdgeschoss die Nummer 1 trägt, also als erstes Stockwerk bezeichnet wird.

b) – Berechnen Sie die Längen der von oben nach unten verlaufenden Hauskanten.

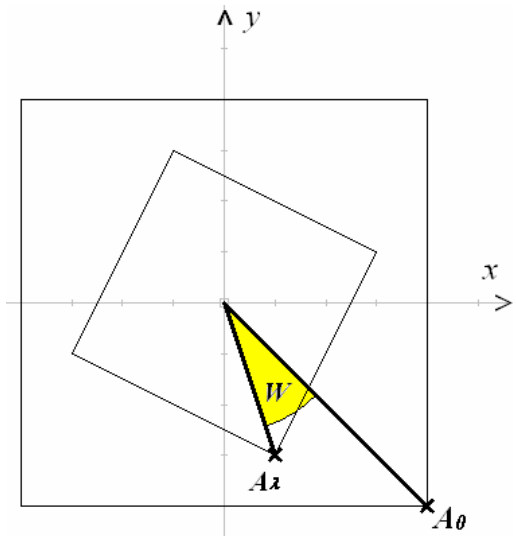
– Bestätigen Sie, dass in der Höhe h der zugehörige Punkt A_λ auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ die Koordinaten $\left(10-\frac{h}{8}\,|\,-10+\frac{h}{24}\,|\,h\right)$ hat.

– Berechnen Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte der Bodenfläche in 40 m Höhe, also in Höhe der Bodenfläche des 11. Stockwerkes. **15 P**

c) Es werden in diesem Aufgabenteil die Winkel untersucht, um die – von oben gesehen – die Bodenflächen der einzelnen Stockwerke gegenüber der Bodenfläche des Erdgeschosses nach rechts verdreht sind.
(Die z-Koordinaten brauchen also nicht betrachtet zu werden!)

– Bestimmen Sie den Winkel W, um den die Bodenfläche des 16. Stockwerks in 60 m Höhe gegenüber der des Grundgeschosses (1. Stock) gedreht ist.

– Bestimmen Sie das Stockwerk, bei dem $W = 45°$, bei dem also die Bodenfläche gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses um 45° gedreht ist. **20 P**



d) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Bodenfläche in der Höhe h – gemessen in m^2 – gilt: $F(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)$ und dass das 25. Stockwerk (h = 96 m) die geringste Bodenfläche hat. **15 P**

e) Die Miete p pro Quadratmeter steigt – wegen der immer schöneren Aussicht – linear mit der Höhe der einzelnen Stockwerke über dem Boden. Im Erdgeschoss – also bei der Höhe 0 m – kostet der Quadratmeter 10 € Miete, im 30. Stockwerk – also in 116 m Bodenhöhe – hat sich die Miete pro Quadratmeter auf 20 € verdoppelt.
Bestimmen Sie das Stockwerk mit der geringsten Miete und das Stockwerk mit der höchsten Miete (dabei sollen Fahrstuhlschächte, Treppenhäuser etc. als Teil der Mietfläche mitgerechnet werden). **15 P**

f) Die Seitenflächen des Hochhauses werden durch die Schar der waagerechten Verbindungsstrecken zwischen den entsprechenden von oben nach unten verlaufenden Hauskanten gebildet.
Begründen Sie,

– dass zwei benachbarte von oben nach unten verlaufende Hauskanten windschief sind,

– dass die Punkte P und Q als Endpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen zwei benachbarten Hauskanten nicht auf gleicher Höhe liegen,
zur Kontrolle: Die Punkte haben die Koordinaten $\left(-\frac{1132}{581}\,|\,-\frac{3496}{581}\,|\,\frac{55536}{581}\right)$ bzw. $\left(\frac{3476}{581}\,|\,-\frac{1192}{581}\,|\,\frac{56016}{581}\right)$,

– dass der Mittelpunkt von P und Q genau in Höhe der minimalen Bodenfläche liegt,

– dass der Mittelpunkt von P und Q nicht auf der zugehörigen Seitenfläche liegt, dass die Seitenflächen des Hauses also gekrümmt sein müssen. **25 P**

Erwartungshorizont

Die in a) vorgegebene Alternative wird als Ersatzlösung bezeichnet und im Folgenden bei Abweichungen erwähnt.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Wir wählen die *x*-*y*-Ebene als Erdgeschossebene, dann kann man für die Eckpunkte des Erdgeschossbodens z. B. folgende Punkte wählen: $A_0(10 \mid -10 \mid 0)$, $B_0(10 \mid 10 \mid 0)$, $C_0(-10 \mid 10 \mid 0)$, $D_0(-10 \mid -10 \mid 0)$. Als Eckpunkte des Daches kann man wählen: $A_1(-5 \mid -5 \mid 120)$, $B_1(5 \mid -5 \mid 120)$, $C_1(5 \mid 5 \mid 120)$, $D_1(-5 \mid 5 \mid 120)$. Dabei wurden die von oben nach unten verlaufenden Hauskanten jeweils durch zwei Punkte mit dem gleichen Buchstaben als Bezeichner gekennzeichnet.	10		
b)	– Es genügt, eine der vier gleich langen Kantenlängen zu berechnen: $\left\|\overline{A_0A_1}\right\| = \sqrt{(-5-10)^2 + (-5+10)^2 + (120-0)^2}$ $= \sqrt{225+25+14400} = \sqrt{14650} = 121{,}037...$ Jede von oben nach unten verlaufende Hochhauskante ist etwa 121 m lang. – Die vier von oben nach unten verlaufenden Kanten haben die Parameterformen: $\vec{a_\lambda} = \vec{a_0} + \lambda \cdot \left(\vec{a_1} - \vec{a_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\vec{b_\lambda} = \vec{b_0} + \lambda \cdot \left(\vec{b_1} - \vec{b_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\vec{c_\lambda} = \vec{c_0} + \lambda \cdot \left(\vec{c_1} - \vec{c_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\vec{d_\lambda} = \vec{d_0} + \lambda \cdot \left(\vec{d_1} - \vec{d_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$. Betrachtet man beispielsweise die Kante $\overline{A_0A_1}$, so erhält man diese in Koordinatenform: $(-15\lambda + 10 \mid 5\lambda - 10 \mid 120\lambda)$. In der Höhe *h* ist die *z*-Komponente gleich *h* und damit $\lambda = \frac{h}{120}$. Einsetzen ergibt: $\left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h\right)$, was zu zeigen ist. Da die Bodenfläche des 11. Stockwerkes bei *h* = 40 liegt, erhält man auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ den Punkt $\left(5 \mid -\frac{25}{3} \mid 40\right)$ bzw. $\left(5 \mid -8{,}\overline{3} \mid 40\right)$. Auf die gleiche Weise oder durch Ausnutzen der Symmetrie erhält man die Koordinaten aller vier Fußbodeneckpunkte des 11. Stockwerks: $A_{\frac{1}{3}}\left(5 \mid -8{,}\overline{3} \mid 40\right)$, $B_{\frac{1}{3}}\left(8{,}\overline{3} \mid 5 \mid 40\right)$, $C_{\frac{1}{3}}\left(-5 \mid 8{,}\overline{3} \mid 40\right)$, $D_{\frac{1}{3}}\left(-8{,}\overline{3} \mid -5 \mid 40\right)$.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Ersatzlösung: $A_{\frac{1}{3}}\left(8{,}\overline{3}\mid 5\mid 40\right)$, $B_{\frac{1}{3}}\left(-5\mid 8{,}\overline{3}\mid 40\right)$, $C_{\frac{1}{3}}\left(-8{,}\overline{3}\mid -5\mid 40\right)$, $D_{\frac{1}{3}}\left(5\mid -8{,}\overline{3}\mid 40\right)$. *<u>Bemerkung:</u> Diese Werte können entweder durch Einsetzen in alle vier Parameterdarstellungen oder durch Einsetzen in nur eine der vier Parameterdarstellungen und Ausnutzen der Symmetrie gewonnen werden.*			
c)	– Da waagerechte Geschossböden betrachtet werden, spielt die z-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x-y-Ebene betrachtet werden (vgl. die in der Aufgabenstellung gegebene Skizze). Die Verbindungslinie von z. B. A_0 zum Ursprung schließt mit der y-Achse einen Winkel von 45° ein. Der eingezeichnete Punkt A_λ hat die Form: $\left(10-\frac{h}{8}\mid -10+\frac{h}{24}\mid h\right)$. Der Fußboden des 16. Stockwerkes liegt auf halber Höhe bei h = 60, die entsprechende Ecke A_λ hat also die Koordinaten $\left(2{,}5\mid -7{,}5\mid 60\right)$, liegt also – wie in der Skizze – im 4. Quadranten. Für den Winkel α, den der zugehörige Ortsvektor mit der x-Achse bildet, gilt also $\tan\alpha = 3$, also $\alpha \approx 71{,}6°$. Für den gesuchten Winkel gilt also $W \approx 71{,}6° - 45° = 26{,}6°$. Der Fußbodeneckpunkt im 16. Stockwerk ist also gegenüber dem entsprechenden Eckpunkt im 1. Stockwerk um 26,6° weiter rechts herum um die z-Achse gedreht.		10	
	– Um das Stockwerk zu bestimmen, bei dem die Bodenfläche um W = 45° gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses gedreht ist, kann man z. B. denjenigen Punkt $\left(10-\frac{h}{8}\mid -10+\frac{h}{24}\mid h\right)$ berechnen, für den der x-Wert Null ist, also h = 80. Im 21. Stockwerk ist der Fußboden gegenüber dem Erdgeschoss um 45° nach rechts gedreht.		10	
	<u>Alternativer Lösungsweg:</u> Wir betrachten im 16. Stockwerk – also in der Höhe 60 m – die Fußbodenkante, die zwischen der „A-Kante“ und der „B-Kante“ verläuft, also zwischen $\overrightarrow{a_0}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_0}\right)=\left(2{,}5\mid -7{,}5\mid 60\right)$ und $\overrightarrow{b_0}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_0}\right)=\left(7{,}5\mid 2{,}5\mid 60\right)$. *Ersatzlösung:* $\left(7{,}5\mid 2{,}5\mid 60\right)$ *bzw.* $\left(-2{,}5\mid 7{,}5\mid 60\right)$. Der Differenzvektor $\left(5\mid 10\mid 0\right)$ (Ersatzlösung: (–10 | 5 | 0)) ist also ein Richtungsvektor der betrachteten Fußbodenkante.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Im 1. Stockwerk (Erdgeschoss) ist $\overrightarrow{b_0}-\overrightarrow{a_0}=(0\,|\,20\,|\,0)$ (Ersatzlösung: $(-20\,|\,0\,|\,0)$) ein Richtungsvektor der entsprechenden Fußbodenkante. Diese beiden Richtungsvektoren bilden einen Winkel von
$arccos\left(\frac{(5\,|\,10\,|\,0)\cdot(0\,|\,20\,|\,0)}{|(5\,|\,10\,|\,0)|\cdot|(0\,|\,20\,|\,0)|}\right)\approx 26{,}6°$.
Ersatzlösung: $arccos\left(\frac{(-10\,|\,5\,|\,0)\cdot(-20\,|\,0\,|\,0)}{|(-10\,|\,5\,|\,0)|\cdot|(-20\,|\,0\,|\,0)|}\right)\approx 26{,}6°$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Der Flächeninhalt $F(h)$ einer Bodenfläche als Funktion von h ist das Quadrat des Abstandes von zwei zugehörigen benachbarten Bodenecken. Solche zwei Ecken haben z. B. die Koordinaten
$a_0+\frac{h}{120}\cdot(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_0})=\left(10-\frac{h}{8}\,\middle|\,-10+\frac{h}{24}\,\middle|\,h\right)$ und
$\overrightarrow{b_0}+\frac{h}{120}\cdot(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_0})=\left(10-\frac{h}{24}\,\middle|\,10-\frac{h}{8}\,\middle|\,h\right)$.
Ersatzlösung: $\left(10-\frac{h}{24}\,\middle|\,10-\frac{h}{8}\,\middle|\,h\right)$ *und* $\left(-10+\frac{h}{8}\,\middle|\,10-\frac{h}{24}\,\middle|\,h\right)$.
Ein Geschoss hat eine quadratische Grundfläche. Der Betrag des Differenzvektors gibt die Seitenlänge an. Zur Bestimmung des Flächeninhalts muss diese also quadriert werden.
Differenzvektor: $\left(\frac{h}{12}\,\middle|\,-\frac{h}{6}+20\,\middle|\,0\right)$. Quadrat: $F(h)=\frac{5}{144}\cdot(h^2-192h+11520)$.
Die quadratische Funktion F hat ihr Minimum bei $h = 96$, also hat das 25. Stockwerk in der Höhe von 96 m die minimale Bodenfläche.
<u>*Alternative:*</u> Es genügt, das Quadrat des Abstandes von $\left(10-\frac{h}{8}\,\middle|\,-10+\frac{h}{24}\,\middle|\,h\right)$ von der z-Achse zu betrachten (halbe Diagonale im entsprechenden Bodenquadrat) und (wenn man will, zu verdoppeln), denn
$2F(h)=\left(10-\frac{h}{8}\right)^2+\left(-10+\frac{h}{24}\right)^2$.
So erhält man auch den Term für $F(h)$ bzw. $\frac{F(h)}{2}$.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Aus d) hat man die Flächenfunktion $F(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)$ und somit gilt für die Miete:

$$mi(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)\cdot 10\cdot\left(1+\frac{h}{116}\right)$$
$$=\frac{50}{144}\left(\frac{1}{16}h^3-\frac{19}{29}h^2-\frac{2688}{29}h+11520\right).$$

Die Ableitung dieser Funktion ist $mi'(h)=\frac{50}{16704}\left(3h^2-152h-10752\right)$.

Das einzige innere Extremum dieser Funktion liegt bei $h_E=\frac{1}{3}\cdot\left(4\sqrt{2377}+76\right)$ $\approx 90{,}34$, und es handelt sich um ein Minimum. Das diesem Wert nächste Geschoss – das 24. – liegt bei h = 92 m.

(Die zugehörige Miete beträgt 1444,44 €, im 23. Geschoss bei einer Höhe von 88 m beträgt die Miete 1445,98 €.)

Die höchste Miete kann dann nur ein Randwert sein, d. h. für das 1. Stockwerk (Grundgeschoss, Bodenebene in h = 0 m) oder das 30. Stockwerk (Bodenebene h = 116). Einsetzen ergibt die Werte 4 000 € und 1 878 €. Also ist die Miete im Grundgeschoss am höchsten.
</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>
– Man zeigt, dass die beiden von den Hauskanten $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{B_0B_1}$ gebildeten Geraden keinen Punkt gemeinsam haben (parallel sind sie offensichtlich nicht).

Zu lösen wäre: $\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)=\vec{b_0}+\mu\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$,

also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}10-15\lambda&=10-5\mu\\-10+5\lambda&=10-15\mu\\120\lambda&=120\mu.\end{aligned}\qquad \textit{Ersatzlösung:}\ \begin{aligned}10-5\lambda&=-10+15\mu\\10-15\lambda&=10-5\mu\\120\lambda&=120\mu\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt $\lambda=\mu$ und die erste Gleichung zeigt dann sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

Die beiden Geraden (Kanten) sind also windschief.

<u>*Alternative Lösung:*</u> Die Windschiefe ist auch dadurch einzusehen, dass anderenfalls aus Symmetriegründen je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der z-Achse zusammen, in einer Spitze also, und der Turm wäre ein(e) gewöhnliche(r) quadratische(r) Pyramide(-nstumpf). Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte.

Auch die in d) erkannte Existenz einer minimalen Bodenfläche könnte hier als Begründung herangeführt werden.
</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

– Die Bestimmung der Punkte P und Q kann entweder über Orthogonalitätsbetrachtungen oder über die Minimierung der Abstandsfunktion (mit zwei Variablen, also über partielle Ableitungen) erfolgen. Hier wird der erste Weg dargestellt:

$\overrightarrow{PQ}$ muss (z. B.) orthogonal zu $\overrightarrow{A_1A_0}$ und orthogonal zu $\overrightarrow{B_1B_0}$ sein:

$$\left(\left(\vec{b_0}+\mu\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)\right)-\left(\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)=0$$
$$\left(\left(\vec{b_0}+\mu\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)\right)-\left(\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)=0 \quad , \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \ .$$

Einsetzen ergibt:

$$293\lambda-288\mu=2$$
$$288\ \lambda-293\mu=-6 \quad , \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \ .$$

mit den Lösungen

$\lambda=\dfrac{2314}{2905}=0,7965...$ und $\mu=\dfrac{2334}{2905}=0,803...$ und den zugehörigen Punkten

$$P\left(-\frac{1132}{581}\,|-\frac{3496}{581}\,|\,\frac{55536}{581}\right)\approx\left(-1,948365\ |-6,017212\,|\,95,586919\right) \text{ und}$$
$$Q\left(\frac{3476}{581}\,|-\frac{1192}{581}\,|\,\frac{56016}{581}\right)\approx\left(5,982788|-2,051635\,|\,96,413081\right).$$

10

Ersatzlösung:

$$P\left(\frac{3496}{581}\,|-\frac{1132}{581}\,|\,\frac{55536}{581}\right)\approx\left(6,017212\ |-1,948365\,|\,95,586919\right) \text{ und}$$
$$Q\left(\frac{1192}{581}\,|\,\frac{3476}{581}\,|\,\frac{56016}{581}\right)\approx\left(2,051635\,|\,5,982788\ |96,413081\right).$$

Die Punkte liegen knapp unterhalb bzw. oberhalb der minimalen Bodenfläche.

– Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ hat die Koordinaten

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right)=\left(\frac{1172}{581}\,|-\frac{2344}{581}\,|\,96\right)\approx\left(2,017212\,|-4,034423\,|\,96\right),$$

liegt also exakt auf der Höhe der minimalen Bodenfläche.

5

– Wenn dieser Punkt auf der Seitenfläche läge, müsste er auf der entsprechenden Fußbodenkante liegen, also auf der Strecke $\overline{A_{\frac{96}{120}}B_{\frac{96}{120}}}$.

Es gilt: $A_{\frac{96}{120}}\left(-2\,|-6\,|\,96\right)$ und $B_{\frac{96}{120}}\left(6|-2\,|\,96\right)$.

Ersatzlösung: $A_{\frac{96}{120}}\left(6|-2\,|\,96\right)$ und $B_{\frac{96}{120}}\left(2\,|\,6\,|\,96\right)$.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es müsste also gelten: $\vec{m} = \overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{b_{\frac{96}{120}}} - \overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}} \right)$, also $\begin{pmatrix} \frac{1172}{581} \\ -\frac{2344}{581} \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix} \right)$. Dies führt auf die beiden Gleichungen $8\lambda - 2 = \frac{1172}{581}$ und $4\lambda - 6 = -\frac{2344}{581}$, die offensichtlich nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Der Punkt M liegt also nicht auf der entsprechenden Seitenfläche. Wäre die Seitenfläche eben, dann müsste der Punkt M auf ihr liegen. Dies ist aber nicht der Fall. Dass die Seitenflächen nicht eben sind, folgt auch aus der Windschiefe der jeweils zugehörigen zwei von oben nach unten verlaufenden Kanten. Denn diese liegen ja in der Seitenfläche und könnten nicht windschief sein, wenn die Seitenfläche eben wäre.			5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 2

II.2 Insektenpopulation

In den Tropen legen die Weibchen einer in Deutschland unbekannten Insektenpopulation jedes Jahr kurz vor Beginn der Regenzeit jeweils 90 Eier und sterben bald darauf. Aus den Eiern schlüpfen wenig später Larven. Der Larvenbestand nimmt von Jahr zu Jahr durch Witterungseinflüsse, aber auch durch den Verzehr durch andere Tiere, ab. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven, und aus einem Teil der Puppen entwickeln sich im darauf folgenden Jahr Weibchen, die wieder 90 Eier legen. Die jährliche Entwicklung dieser Insektenpopulation wird durch die nachstehende Populationsmatrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Übergangsgraphen dar und beschreiben Sie die biologischen Bedeutungen der von Null abweichenden Koeffizienten der Matrix A. **15 P**

b) In der folgenden Tabelle ist eine Anfangspopulation $\vec{p}_0$ der oben genannten Insekten gegeben, die jeweils ihrem Alter entsprechend gegliedert sind:

Alter	Name	Anzahl
1 Jahr	Larven 1	9000
2 Jahre	Larven 2	3000
3 Jahre	Puppen	900
4 Jahre	Weibchen	700

- Bestimmen Sie den Populationsvektor nach einem Jahr ($\vec{p}_1$).
- Geben Sie an, wie Sie die Population nach 4 Jahren unter ausschließlicher Verwendung des Anfangspopulationsvektors $\vec{p}_0$ und der Matrix A berechnen könnten. **10 P**

Betrachten Sie folgende Übersicht. Dabei ist die Zeit in Jahren angegeben, der Populationsvektor besteht aus den Individuen der in b) genannten Teilgruppen, und die Gesamtpopulation ist die Summe der Individuen in den Teilgruppen, also ohne die männlichen Insekten.

Zeit	Populationsvektor	Gesamtpopulation (Summe)
0	$\vec{p}_0 = (9000 \mid 3000 \mid 900 \mid 700)$	13 600
1	$\vec{p}_1 = (63000 \mid 3000 \mid 1000 \mid 90)$	67 090
2	$\vec{p}_2 = (8100 \mid 21000 \mid 1000 \mid 100)$	30 200
3	$\vec{p}_3 = (9000 \mid 2700 \mid 7000 \mid 100)$	18 800
4	$\vec{p}_4 = \vec{p}_0 = (9000 \mid 3000 \mid 900 \mid 700)$	13 600

c) • Skizzieren Sie die jeweiligen Werte der Gesamtpopulation in anliegendes Koordinatensystem.

- Beschreiben Sie, wie sich die Populationsvektoren und damit die Gesamtpopulation in den kommenden Jahren nach dem Modell entwickeln werden, und skizzieren Sie entsprechend den weiteren Verlauf der Gesamtpopulation bis zum Jahr 10.
- Bestimmen Sie den Populationsvektor nach 25 Jahren ($\vec{p}_{25}$) und den Populationsvektor im Jahr vor Beginn der Beobachtung ($\vec{p}_{-1}$) (bei Verwendung des bisherigen Modells). **20 P**

d) Die in c) betrachtete Eigenart des verwendeten Modells kann von der Matrix abhängen, aber auch von der Startpopulation.

- Geben Sie begründet die Eigenschaft der Matrix *A* an, die unabhängig von der Startpopulation zu Ergebnissen wie in c) beschrieben führt.
- Untersuchen Sie, ob es Populationsvektoren ($\vec{p}_x$) gibt, die sich jährlich wiederholen, und bestimmen Sie gegebenenfalls einen dieser Populationsvektoren. **15 P**

Zu den eben angesprochenen Ursachen für bestimmte Eigenschaften der Population folgt jetzt ein rein mathematisches Beispiel:

Gegeben ist eine allgemeine Populationsmatrix *P*: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{N}^*$ und $0 < b, c, d < 1$.

e) Eine quadratische Matrix *M* heißt zyklische Matrix, wenn es eine natürliche Zahl *n* gibt, so dass gilt: $M^n = E$.

- Zeigen Sie, dass die obige Populationsmatrix *P* für $n = 2$ und für $n = 3$ nicht zyklisch sein kann.
- Ermitteln Sie die Bedingungen für *a*, *b*, *c* und *d*, damit gilt: $P^4 = E$. **15 P**

Die folgenden beiden Aufgaben beziehen sich wieder auf das durch die Matrix A beschriebene Modell, das jetzt neuen Situationen angepasst werden soll:

f) Durch eine spürbare Veränderung der Trocken- und Regenzeiten, die von Wissenschaftlern auf den allseits diskutierten Klimawandel zurück geführt wird, halbiert sich seit einigen Jahren bei sonst gleich bleibenden Überlebensraten die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier.

- Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu} .
- Es gilt: $A_{neu}^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

  Interpretieren Sie, wie sich diese Veränderung auf die langfristige Entwicklung der Insektenpopulation auswirkt. **10 P**

g) Inzwischen lässt sich sogar feststellen, dass die schon erwähnten Veränderungen der Trocken- und Regenzeiten nicht nur die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier halbiert hat, sondern auch dazu geführt hat, dass ein Zwölftel der Larven 1 sich bereits verpuppt, also eine Generation überspringt. Damit entwickelt sich nur noch ein Viertel der Larven 1 zu Larven 2, also wie bisher.

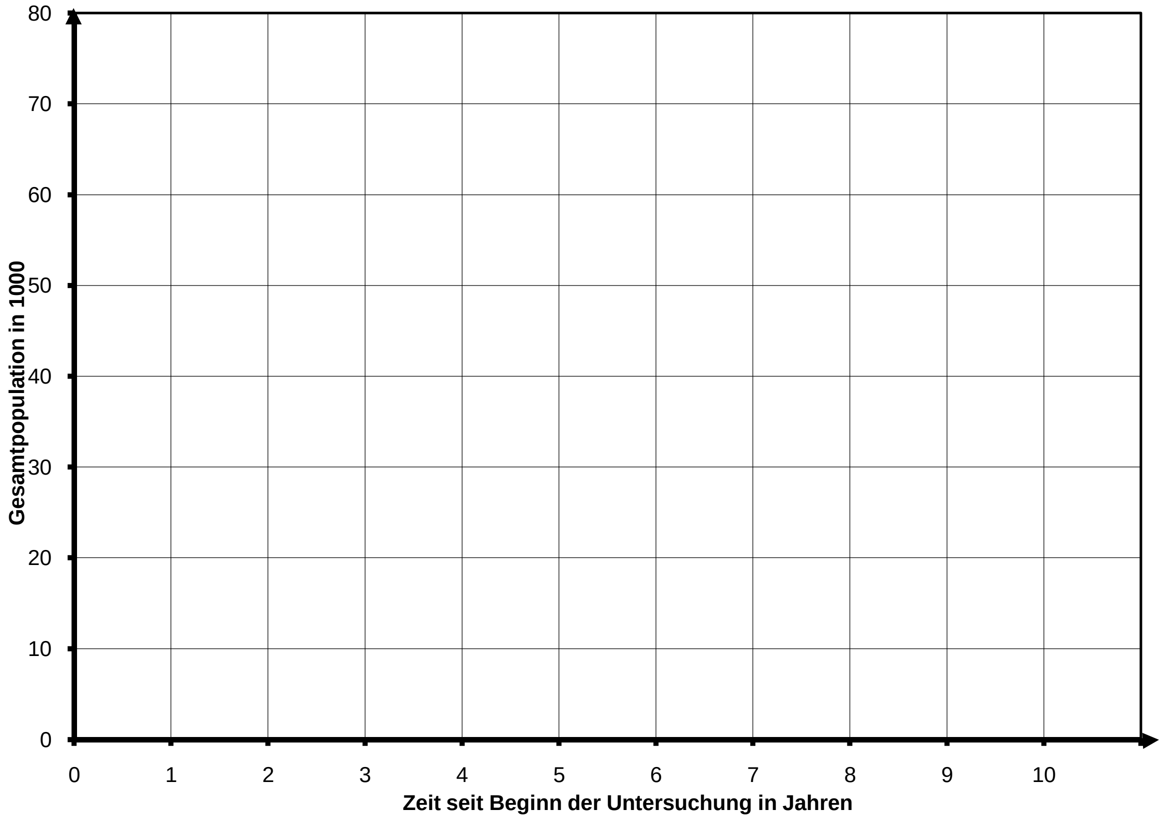
- Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu2} .
- Begründen Sie, warum bei dieser Populationsentwicklung die Bestimmung von Vorjahresbeständen nicht zu jedem beliebigen Populationsvektor möglich ist, und interpretieren Sie diese Fälle im Sachkontext der Aufgabe. **15 P**

Anlage zur Aufgabe „Insektenpopulation“

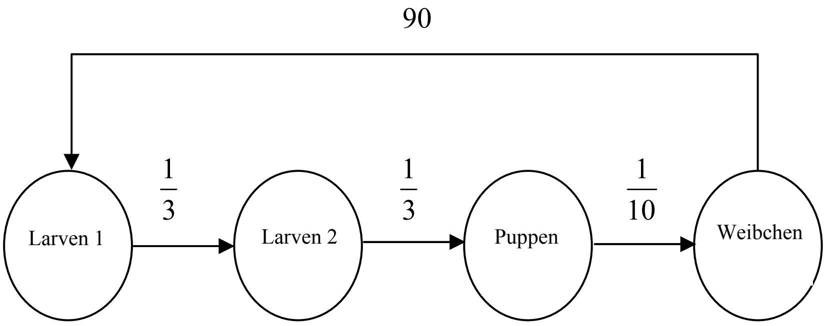
Bitte beachten Sie:

In x-Richtung wird die Zeit der Beobachtung in Jahren aufgetragen, „0“ steht für den Beginn der Beobachtung der Insektenpopulation.

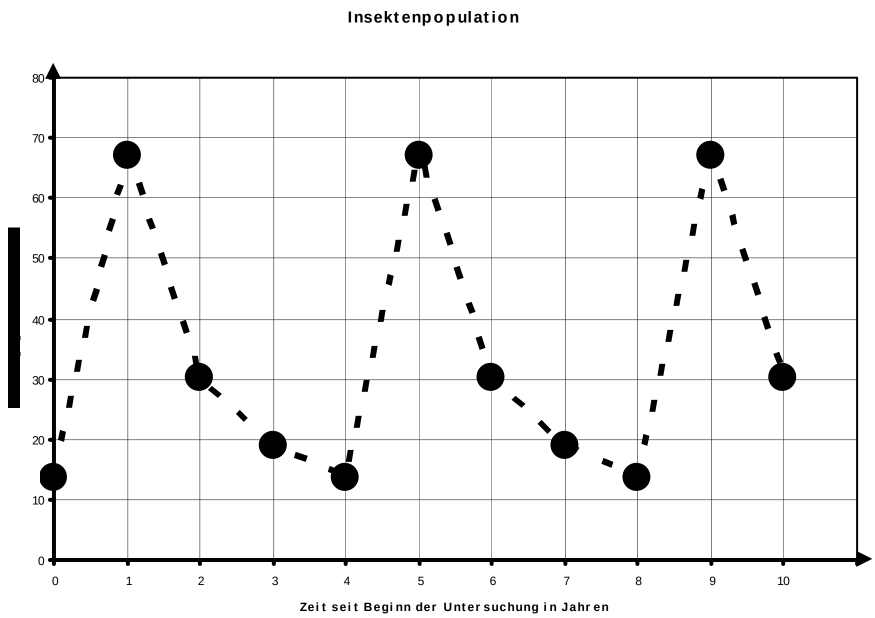
In y-Richtung wird jeweils die Anzahl der Gesamtpopulation (als Summe der Teilgruppen) in 1000 aufgetragen.



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Biologische Bedeutung der Koeffizienten: $a_{14} = 90$ ist die Vermehrungsrate $a_{21} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 1. Jahr (Larven 1) $a_{32} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 2. Jahr (Larven 2) $a_{43} = \frac{1}{10}$ ist die Überlebensrate der verpuppten Larven im 3. Jahr (Puppen)	10	5	
b)	Bestimmung von $\vec{p}_1$: $\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}.$ Darstellung des Populationsvektors $\vec{p}_4$ (Population nach 4 Jahren): $\vec{p}_4 = A^4 \cdot \vec{p}_0$.	5	5	
c)	Skizze zur Gesamtpopulation *(Verbindung der Punkte nicht notwendig, sie erhöht aber den optischen Eindruck.)* Nach vier Jahren ist der Populationsvektor identisch mit jenem zu Beginn der Untersuchung und ebenso die Gesamtpopulation. Da die Berechnung der Populationsvektoren nach dem Schema $\vec{p}_{n+1} = A \cdot \vec{p}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ abläuft, wiederholt sich alle 4 Jahre der Populationsverlauf. Die Gesamtpopulation P_{10} nach 10 Jahren ist also gleich der Gesamtpopulation nach 2 Jahren P_2.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III



Folgerung für $\vec{p}_{25}$:

$\vec{p}_{24} = \vec{p}_0$, da 4 ein Teiler von 24 ist. $\Rightarrow$ $\vec{p}_{25} = \vec{p}_1$.

Bestimmen von $\vec{p}_{-1}$:

Nimmt man an, dass das verwendete Populationsmodell schon vor dem Untersuchungsbeginn gültig war, kann von dem zyklischen Vorgang auch in der Vergangenheit (ausgedrückt durch negative Indizes) ausgegangen werden. Damit ist $\vec{p}_{-1}$ der Populationsvektor vor $\vec{p}_0 = \vec{p}_4$, d. h. $\vec{p}_{-1} = \vec{p}_3$.

Natürlich kann $\vec{p}_{-1}$ auch durch Lösung eines LGS bestimmt werden.

		I	II	III
		5	15	

d) Eigenschaft der Matrix A:

Die Matrix A^4 ist identisch mit der Einheitsmatrix E, denn es muss gelten $A^4 \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_4 = \vec{p}_0 (= E \cdot \vec{p}_0)$.

Eigenschaft der Startpopulation:

Die Aufgabenstellung führt zum folgenden LGS: $A \cdot \vec{p}_x = \vec{p}_x$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 90x_4 \\ \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Hieraus ergibt sich die mehrdeutige Lösung:

$$x_1 = 90x_4,\ x_2 = 30x_4,\ x_3 = 10x_4,\ x_4 \in \mathbb{N}^*.$$

Die Bedingung ist immer dann erfüllt, wenn die Komponenten des Populationsvektors im Verhältnis 90:30:10:1 stehen.

Also lautet eine mögliche Lösung: $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.

</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Berechnung von P^2, P^3 und P^4:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \\ b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Diagonalelemente sowohl bei P^2 als bei P^3 jeweils Null sind, ist eine Einheitsmatrix in beiden Fällen nicht erreichbar.

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$$

Also: $P^4 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Neue Populationsmatrix: $A_{Neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$ Interpretation: Die Veränderung der Trocken- und Regenzeiten führt dazu, dass sich die Insektenpopulation in einem Zyklus von jeweils vier Jahren halbieren wird. Bleibt das Modell gültig, wird die Population langfristig aussterben.		5	5
g)	$A_{Neu2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$, denn $\frac{1}{12}$ der Larven 1 geht in die Gruppe „Puppen“ über, $\frac{1}{4}$ der Larven 1 wie bisher in die Gruppe Larven 2. Ermittlung von $\vec{p}_{(a_0)-1}$ aus einer beliebigen Anfangspopulation $\vec{p}_{a_0}$ führt zu dem Ansatz $\vec{p}_{a_0} = A_{Neu2} \cdot \vec{p}_{(a_0)-1}$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 45 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45x_4 \\ \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix}.$ Als Lösung ergibt sich: $x_1 = 4a_2,\ x_2 = 3a_3 - a_2,\ x_3 = 10a_4,\ x_4 = \frac{1}{45}a_1$ mit $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0 \wedge x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Aus $x_2 = 3a_3 - a_2$ ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Fälle $a_2 > 3a_3$ die Nichtnegativitätsbedingung für die Anzahl der zweijährigen Larven nicht mehr gegeben ist. Also lässt sich für alle Populationsvektoren, in denen die Anzahl der zweijährigen Larven mehr als dreimal so hoch ist wie die der Puppen, keine Vorjahrespopulation ermitteln. Außerdem muss x_4 ganzzahlig, a_1 (die Anzahl der Larven 1 des Populationsvektors) also ein Vielfaches von 45 sein. Die hier vorliegende Frage der Lösbarkeit des zugehörigen Gleichungssystems kann auch mit anderen Verfahren geklärt werden.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

STOCHASTIK 1

III.1 Falschparker

Der Berliner Senat überlegt, ob er die Parkgebühren (1 € / h) erhöhen muss, damit die Einnahmeverluste durch Parken ohne gültigen Parkschein (so genanntes „Falschparken") ausgeglichen werden können.
Nach Angabe des Senats beträgt der Anteil der Falschparker gemäß einer Studie aus dem Frühjahr ca. 15 %. Die mittlere Parkdauer beträgt zwei Stunden.

a) Zwei Politessen überprüfen zunächst den Parkplatz „Kudamm-Karree" mit 34 Autos, dann den Parkplatz „Wertheim Kurfürstendamm" mit 48 Autos.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf dem Parkplatz „Kudamm-Karree" genau drei Falschparker aufschreiben.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen mindestens vier Falschparker aufschreiben.
- Geben Sie an, mit wie vielen Falschparkern die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen rechnen sollten.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden. **25 P**

b) In der Senatsverwaltung wird überlegt und anschließend eine Stichprobe von 500 überprüften Autos ausgewertet.

- Berechnen Sie zunächst, wie viele parkende Autos hätten überprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einen Falschparker zu erwischen.
- Bestimmen Sie für die Stichprobe den kleinstmöglichen Bereich für die Zahl an Falschparkern symmetrisch zum Erwartungswert, in dem diese Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt. Verwenden Sie dabei die Normalverteilungs-Näherung. **15 P**

c) Es gibt nicht überall und jederzeit Politessen. Deswegen kann man davon ausgehen, dass nur etwa 10 % von allen Falschparkern durch Kontrollen von Politessen gefunden werden. Etwa die Hälfte davon kehrt nach wenigen Minuten zum Wagen zurück. Diese Falschparker werden verwarnt und müssen jeweils 1 € Parkgebühr nachträglich entrichten. Die andere Hälfte muss ein Bußgeld von 15 € pro Falschparker bezahlen.

- Zeigen Sie, dass ein Falschparker durch sein Verhalten im Mittel 1,15 € Mindereinnahmen für die Stadt Berlin verursacht.
- Bestimmen Sie den Betrag, auf den der Berliner Senat das Bußgeld erhöhen müsste, damit Falschparker keine Mindereinnahmen verursachen. **15 P**

d) Der Senat entschloss sich stattdessen zu einer drastischen Erhöhung der Parkgebühren. Im Gegensatz zum Senat befürchten die Medien, dass (deswegen) der Anteil der Falschparker deutlich angestiegen sein könnte.

- Leiten Sie ein Testverfahren für eine Kontrolle von 2400 Fahrzeugen her, mit dem man die Befürchtung der Medien gegebenenfalls statistisch (auf dem 5 %-Niveau) begründen kann.

- Nehmen Sie an, dass der Falschparkeranteil nach der Gebührenerhöhung tatsächlich bei (etwa) 17 % liegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der obige Test trotzdem kein signifikantes Ergebnis liefert. Kann sich in einem solchen Falle der Senat in seiner Ansicht bestätigt fühlen? Begründen Sie Ihre Antwort. **20 P**

e) Die Falschparker-Daten der Frühjahrs-Studie wurden vom Verwaltungsreferat Touristik ausgewertet. Die beobachteten Merkmale waren

B := Auto mit Berliner Kennzeichen
$\overline{B}$:= Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist")
F := Falschparker
$\overline{F}$:= Richtigparker.

- Geben Sie die fehlenden Werte in folgender Vierfeldertafel an:

	B	$\overline{B}$	Summe
F	5 %		15 %
$\overline{F}$			
Summe	70 %		

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein erwischter Falschparker ein „Tourist" ist. **15 P**

f) Aus der Sommer-Studie ist auch bekannt, dass die Anzahl der Fahrzeuge mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins im Sommer um 20 % angestiegen ist. Gleichzeitig ist der Anteil der Falschparker auf 18 % gestiegen (vgl. Teil d). Das Parkverhalten der „Touristen" hat sich dabei im Vergleich zum Frühjahr nicht verändert.

- Bestimmen Sie für die neue Situation im Sommer eine vollständige Vierfeldertafel.

- Interpretieren Sie die beiden Vierfeldertafeln im Hinblick auf das Parkverhalten der Berliner Autofahrer. **10 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die Anzahl der Falschparker unter den 34 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{34;0,15}$-verteilt: $\binom{34}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{31} \approx 13\%$. • Die Anzahl der Falschparker unter den 82 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{82;0,15}$-verteilt: P(„mind. 4 Falschparker") = 1 – P(„höchstens 3 Falschparker") = $1 - P(X \le 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \approx$ $1 - 0{,}0000016 - 0{,}000024 - 0{,}000169 - 0{,}000794 \approx 0{,}999$. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Falschparker zu ertappen, ist ca. 99,9%. • $E(X) = 82 \cdot 0{,}15 = 12{,}3$. Die Politessen müssen mit ca. 12 Falschparkern rechnen. • Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden, beträgt $\binom{34}{5} \cdot 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^{29} \cdot \binom{48}{6} \cdot 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^{42} \approx 0{,}1897 \cdot 0{,}1517 \approx 0{,}0288 \approx 2{,}9\%$.	15	10	
b)	• Y: Anzahl der ertappten Falschparker bei n überprüften Autos; Y ist $B_{n;0,15}$-verteilt. P(mindestens ein Falschparker) = $P(Y \ge 1)$ = $1 - P(Y = 0) > 0{,}99$, also $P(Y = 0) < 0{,}01$, d.h. $\binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n < 0{,}01 \iff n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}85)} \approx 28{,}34$. Man müsste mindestens 29 Autos kontrollieren. • Kleinstmöglicher Bereich symmetrisch zum Erwartungswert: $n = 500$ und $p = 0{,}15 \Rightarrow \mu = 75$ und $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 7{,}984$. Es gilt: $P(\lvert X - \mu \rvert \le d) = 2 \cdot \Phi(\frac{d}{\sigma}) - 1 \ge 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(\frac{d}{\sigma}) \ge \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$. Mit Hilfe einer Tabelle für die Normalverteilung folgt: $\frac{d}{\sigma} \approx 1{,}28 \Rightarrow d \approx 10{,}22 \Rightarrow d \ge 11$. Somit lautet das kleinstmögliche Intervall: [64; 86].	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Es ist G die „Einnahmedifferenz“, die ein Falschparker gegenüber einem regelgerechten Verhalten verursacht. | | Falschparker nicht ertappt | Falschparker verwarnt | Falschparker ertappt | | g_i (in €) | –2 | 0 | 15–2 = 13 | | $P(G=g_i)$ | 0,9 | 0,05 | 0,05 | Erwartungswert $E(G)=(-2)\cdot 0{,}90+13\cdot 0{,}05=-1{,}15$, d.h. pro Falschparker macht die Stadt im Durchschnitt einen Verlust von 1,15 €. Man müsste also eine Erhöhung des Bußgeldes beschließen, um mindestens ohne Verlust für die Stadt zu arbeiten. Ist B das erhöhte Bußgeld, so gilt: $E(G)=(-2)\cdot 0{,}90+(B-2)\cdot 0{,}05=0 \;\Leftrightarrow\; B\cdot 0{,}05=1{,}9 \;\Rightarrow\; B=38$. Damit kein Verlust entsteht, müsste das Bußgeld mindestens auf 38 € erhöht werden		10	5
d)	• Die Medien könnten ihre Behauptung statistisch belegen, wenn die Nullhypothese $H_0: p \le 0{,}15$ verworfen werden könnte, d.h. wenn die Anzahl X der in der Stichprobe auftretenden Falschparker genügend groß ist. Wir bestimmen eine möglichst kleine Schranke K so, dass $P(\{X>K\}\,\|\,H_0)\le 5\%$. Zunächst können wir abschätzen: $P(\{X>K\}\,\|\,H_0)\le P(\{X>K\}\,\|\,p=0{,}15)$. Unter der Bedingung $p = 0{,}15$ ist $\frac{X-\mu+0{,}5}{\sigma}$ in guter Näherung standard-normalverteilt mit $\mu=2400\cdot 0{,}15=360$ und $\sigma=\sqrt{2400\cdot 0{,}15\cdot 0{,}85}\approx 17{,}49$. Der Tabelle entnimmt man für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable N: $P(N>1{,}645)\approx 5\%$. Also $P\left(\frac{X-\mu+0{,}5}{\sigma}>1{,}645\,\|\,p=0{,}15\right)\le 5\%$ $\Leftrightarrow P(X>\mu-0{,}5+1{,}645\cdot\sigma\,\|\,p=0{,}15)\le 5\%$ $\Leftrightarrow P(X>388{,}3\,\|\,p=0{,}15)\le 5\%$ Die Nullhypothese kann also auf dem 5 %-Niveau verworfen werden, wenn in der Stichprobe mehr als 389 Falschparker angetroffen werden. In diesem Falle könnten die Medien sich – statistisch begründet – bestätigt fühlen.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

- Es gilt $P(\{X \leq 389\} \mid p = 0{,}17)$ zu bestimmen, also die Wahrscheinlichkeit für einen speziellen Fehler 2. Art.
Auch bei $p = 0{,}17$ können wir mit der Normalverteilung approximieren:
$\mu = 2400 \cdot 0{,}17 = 408$ und $\sigma = \sqrt{2400 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83} \approx 18{,}40$.
$P(X \leq 389 \mid p = 0{,}17)$
$\approx P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq \frac{389 - \mu + 0{,}5}{\sigma} \mid p = 0{,}17\right)$
$= P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \leq -1{,}005 \mid p = 0{,}17\right)$
$\approx \Phi(-1)$
$\approx 16\%$
Das ist ein ziemlich hoher Wert, es kann also leicht passieren, dass der obige Test kein signifikantes Ergebnis liefert, aber dann sind die Testergebnisse für beide Seiten wertlos: Mit solider Argumentation kann der Berliner Senat dann <u>nicht</u> behaupten, dass der Anteil an Falschparkern <u>nicht</u> gestiegen sei.

</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Vierfeldertafeln:</u>
B = Auto mit Berliner Kennzeichen
$\overline{B}$ = Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“)
F = Falschparker
$\overline{F}$ = Richtigparker
<u>Vierfeldertafel – Frühling:</u>

<table>
<tr><th></th><th>B</th><th>$\overline{B}$</th><th>Summe</th></tr>
<tr><td>F</td><td>0,05</td><td>0,10</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>$\overline{F}$</td><td>0,65</td><td>0,20</td><td>0,85</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td>0,70</td><td>0,30</td><td>1</td></tr>
</table>

Von allen Falschparkern sind zwei Drittel „Touristen“, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p \approx 67\%$.

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Vierfeldertafeln: B = Auto mit Berliner Kennzeichen $\overline{B}$ = Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“) F = Falschparker $\overline{F}$ = Richtigparker Wenn die Anzahl der Touristen um 20% gestiegen ist, hat man eine größere Gesamtheit und damit geänderte Anteile: Touristen: $\frac{36}{106} \approx 34\%$ Berliner: $\frac{70}{106} \approx 66\%$ Ein Drittel der Touristen parken nach wie vor falsch, das sind gerundet 11,3 %, zwei Drittel parken richtig, also gerundet 22,6 %. Die restlichen Werte ergeben sich durch Subtraktion bzw. Addition, da die rechte Spalte gegeben ist. *Es sind auch andere Begründungen für die Bestimmung der Werte möglich.* Vierfeldertafel – Sommer:			

	B	$\overline{B}$	Summe
F	0,067	0,113	0,18
$\overline{F}$	0,594	0,226	0,82
Summe	0,661	0,339	1

	Interpretation: Während im Frühjahr jedes 14. Berliner Fahrzeug falsch geparkt hatte (also ein Anteil von $ant = \frac{0{,}05}{0{,}70} \approx 7{,}1\%$), war dieser Anteil in der Sommeruntersuchung auf über 10,1% gestiegen, und das bei gleich bleibenden Verhalten der Touristen. Liegt dies möglicherweise an einer Verknappung des Parkraums im Sommer durch die höhere Zahl der Touristen?			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

STOCHASTIK 2

III.2 Rund um den HSV

Der Hamburger SV trägt seine Heimspiele in der 57 000 Zuschauer fassenden Arena im Volkspark aus (siehe nebenstehende Abbildung).

Arena des HSV

a) In der ersten Reihe eines Sitzbereichs befinden sich 31 Plätze, von denen im letzten Saisonspiel 29 besetzt werden.

- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die 29 (unterscheidbaren) Personen auf die 31 Plätze verteilen können.
- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die freien Plätze verteilen könnten. **15 P**

b) Die Bundesligastatistik über viele Jahre weist aus, dass im Mittel etwa 3 Tore pro Spiel (Spieldauer: 90 Minuten) fallen.

Ein Zuschauer verlässt während der Spielzeit für 3 Minuten seinen Sitzplatz, um die Toilette aufzusuchen. Auf dem Weg überlegt er sich, ob er bis zu seiner Rückkehr ein Tor „verpasst" haben wird. Sie sollen deshalb gleich die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ausgerechnet in diesen 3 Minuten mindestens ein Tor fällt. Bitte lesen Sie aber vorher den folgenden Hinweis:

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert μ der Anzahl T der in einem fest ausgewählten Zeitintervall fallenden Tore während eines Bundesligaspiels nur von der Länge dieses Zeitintervalls abhängig ist und zu dieser proportional ist.

Dann kann man für T die Poissonverteilung verwenden: $P(\{T=k\})=\frac{1}{e^{\mu}}\cdot\frac{\mu^k}{k!}$.

- Bestimmen Sie das hier passende μ und ermitteln Sie nun damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ausgerechnet in der Toilettenpause mindestens ein Tor fällt.
- Untersuchen Sie auch, ob die Annahmen aus dem Hinweis realistisch sind. **15 P**

Ein Busunternehmen aus Flensburg bietet den Transport zum Stadion an. Es setzt dazu zwei Busse mit insgesamt 92 Plätzen ein. Man kann einen Busplatz telefonisch oder per Internet buchen, braucht aber erst beim Fahrtantritt zu zahlen. Der Andrang bei Fußballspielen ist erfahrungsgemäß groß, und das Angebot ist stets ausgebucht. Allerdings werden im Mittel nur 90 % der gebuchten Plätze tatsächlich wahrgenommen. Wegen des Nichtwahrnehmens von gebuchten Fahrten bietet das Unternehmen deshalb 101 Plätze – also mehr als vorhanden – zur Buchung an. Nehmen Sie an, dass die Anzahlen der nicht kommenden bzw. kommenden Bucher binomialverteilt sind.

Für die folgenden Teile c) und d) können Sie die Tabelle in der Anlage 1 zur Hilfe nehmen oder näherungsweise mit der Normalverteilung rechnen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste erscheinen, dass also mindestens eine Person mit gebuchten Plätzen abgewiesen werden muss. **10 P**

d) Bestimmen Sie die Maximalzahl der Buchungen, die das Unternehmen zulassen kann, so dass es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % zu keinen Überbuchungen kommt. **15 P**

Das Busunternehmen will erreichen, dass der Anteil der Absagen sinkt. Deshalb ändert es seine Vertragsbedingungen dahingehend, dass schon gleich bei der Buchung eine Anzahlung von 5 € zu zahlen ist, die bei Nichterscheinen nicht zurückgezahlt wird.

e) Während der nächsten 1000 Buchungen soll untersucht werden, ob die neue Regelung zu einer Senkung der Absagerquote führt.
Leiten Sie dazu eine Entscheidungsregel her. (Ermitteln Sie die Anzahl K von Absagen so, dass man gerade noch – statistisch begründet – behaupten kann, dass die Maßnahme erfolgreich war. Gehen Sie dabei von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ aus, d.h. die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art soll höchstens 5 % sein). **15 P**

Für die Aufgabenteile f) und g) gehen Sie nun von folgenden Daten aus:

- Tatsächlich werden im Mittel nur noch **6 %** der gebuchten Plätze nicht in Anspruch genommen.
- Der Fahrpreis beträgt 20 €. Ein gebuchter Kunde, der nicht kommt, bringt dem Unternehmer also eine Einnahme von 5 € ein, ein gebuchter Kunde, der mitfährt, bringt eine Einnahme von 20 €.

f) Berechnen Sie die erwarteten Einnahmen, wenn das Busunternehmen keine Überbuchungen zulässt. **10 P**

g) Das Unternehmen lässt nun immerhin 5 Überbuchungen zu, nimmt also immer 97 Buchungen an. Kunden, welche die gebuchte Fahrt wegen Überbuchung nicht antreten können, bekommen die Anzahlung zurückerstattet und verursachen zusätzliche Entschädigungskosten von 25 €.

- Ermitteln Sie – je nachdem wie viele Absagen anfallen – die maximal mögliche und die minimal mögliche Einnahme des Unternehmens für eine Fahrt zu einem HSV-Spiel.
- Um eine Bilanz aufzustellen, begründen Sie die folgenden Aussagen:
  - Das Unternehmen hat sichere Einnahmen E_1 von 485 €.
  - Stellen Sie sich vor, dass alle Bucher, die zur Fahrt erscheinen, zunächst die fehlenden 15 € bezahlen.
    Der Erwartungswert E_2 für diese Einnahmen beträgt dann 1367,70 €.
  - Erst kurz vor der Abfahrt erhalten diejenigen Kunden, die wegen Überbuchung nicht mitfahren können, ihre Fahrtkosten von 20 € zurück und außerdem 25 € Entschädigung. Der Erwartungswert dieser Auszahlungen beträgt:

$$K = 45€ \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot B(97;0{,}06\,;\,0) + 4 \cdot B(97;0{,}06\,;\,1) + 3 \cdot B(97;0{,}06\,;\,2) \\ +2 \cdot B(97;0{,}06\,;\,3) + 1 \cdot B(97;0{,}06\,;\,4) \end{pmatrix}$$

  Dennoch lohnt es sich finanziell für das Unternehmen, die 5 Überbuchungen zuzulassen. **20 P**

Anlage 1 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteile c) und d)

Tabellenauszug für <u>akkumulierte</u> Binomialverteilungswerte

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

p = 0,1

	n											
k	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	0,0107	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	0,0291	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	0,0649	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	0,1234	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	0,2061	0,1972	0,1886	0,1803
8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	0,3094	0,2982	0,2872
9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	0,4254	0,4126
10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	0,5437
11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Anlage 2 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteil g)

Tabellenauszug für Binomialverteilungswerte

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

p = 0,06

	n								
k	92	93	94	95	96	97	98	99	100
0	0,0034	0,0032	0,0030	0,0028	0,0026	0,0025	0,0023	0,0022	0,0021
1	0,0198	0,0188	0,0179	0,0170	0,0161	0,0153	0,0145	0,0138	0,0131
2	0,0575	0,0552	0,0530	0,0509	0,0489	0,0469	0,0450	0,0432	0,0414
3	0,1101	0,1069	0,1038	0,1008	0,0978	0,0949	0,0920	0,0892	0,0864
4	0,1564	0,1536	0,1508	0,1480	0,1451	0,1423	0,1394	0,1366	0,1338
5	0,1756	0,1745	0,1732	0,1719	0,1705	0,1689	0,1673	0,1657	0,1639
6	0,1626	0,1634	0,1640	0,1646	0,1650	0,1653	0,1656	0,1657	0,1657
7	0,1275	0,1296	0,1316	0,1336	0,1354	0,1372	0,1389	0,1405	0,1420
8	0,0865	0,0889	0,0914	0,0938	0,0962	0,0985	0,1008	0,1031	0,1054
9	0,0515	0,0536	0,0557	0,0579	0,0600	0,0622	0,0644	0,0666	0,0687
10	0,0273	0,0287	0,0302	0,0318	0,0333	0,0349	0,0366	0,0382	0,0399
11	0,0130	0,0138	0,0147	0,0157	0,0166	0,0176	0,0187	0,0197	0,0209
12	0,0056	0,0060	0,0065	0,0070	0,0075	0,0081	0,0086	0,0092	0,0099
13	0,0022	0,0024	0,0026	0,0029	0,0031	0,0034	0,0036	0,0039	0,0043

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Die zuerst ankommende Person hat 31 Plätze zur Auswahl, die zweite 30, usw. und die letzte noch 3. Aufstellen des Terms liefert: $31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot ... \cdot 3 = \frac{31!}{2!} \approx 4{,}1 \cdot 10^{33}$. (Es gibt ungefähr $4{,}1 \cdot 10^{33}$ Möglichkeiten für die Belegung.) Da man den freien Plätzen nicht verschiedene Personen zuordnen kann, gibt es $\binom{31}{2} = 465$ Möglichkeiten für die freien Plätze.	15		
b)	Wenn man annimmt, dass in fest gewählten Spielzeitintervallen, die erwarteten Anzahlen an Toren proportional zur Läge der Intervalle ist, dann hat man aus der gegebenen Statistik für ein ganzes Spiel von 90 Minuten den Erwartungswert von 3 Toren, also für ein Zeitintervall von 3 Minuten den Erwartungswert von $\mu = 3 \cdot \frac{3}{90} = 0{,}1$ (Toren). Die angenommene Poissonverteilung für $\mu = 0{,}1$ ist teilweise in folgender Tabelle berechnet: K: 0 / 1 / 2 / 3 $P(\{T=k\})$: 0,905 / 0,090 / 0,005 / Praktisch Null Die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Tor“ beträgt also: $P = 1 - P(\{T=0\}) \approx 9{,}5\%$. *Mögliche Argumente:* Die Annahmen sind nicht unproblematisch: Handelt es sich um ein „normales“ Bundesligaspiel, für das der erwartete Wert 3 Tore insgesamt beträgt? Sicher ist die erwartete Torzahl in gleichlangen Intervallen auch nicht immer gleich, z.B. nehmen führende Mannschaften schon mal einen Gang heraus. Zum Spielende kann die Kondition nachlassen, andererseits fallen häufig in der letzten Spielminute noch Tore, weil die Konzentration der Verteidigung nachlässt oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt. Die erwartete Torausbeute kann auch zum Spielende abnehmen, weil eine Mannschaft sich schon mit einem Spielergebnis abgefunden hat oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt.		10	5
c)	Es erscheinen bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste, wenn zu wenig Personen absagen, genauer, wenn die Anzahl der absagenden Personen kleiner als 9 ist. Die Anzahl der absagenden Personen kann als $B(101 ; 0.1)$ verteilt angenommen werden:			

Lösungsskizze

Zuordnung Bewertung: I | II | III

$p = 0{,}1$

	n: 92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
k = 0	0,0001	**0,0001**	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0007	0,0006	**0,0006**	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2	0,0039	0,0036	0,0033	**0,0030**	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	**0,0107**	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	**0,0291**	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	**0,0649**	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	**0,1234**	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	**0,2061**	0,1972	0,1886	0,1803
8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	**0,3094**	0,2982	0,2872
9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	**0,4254**	0,4126
10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	**0,5437**
11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \sum_{k=0}^{8} \binom{101}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{101-k} \approx 31\% .$$

Das ist der fette Wert in der Tabelle bei $n = 101$.

Wegen $n \cdot p \cdot (1-p) = 101 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \approx 9{,}1$ kann das Ergebnis auch näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung bestimmt werden:

$$P(Y \leq 8) \approx \Phi\left(\frac{8{,}5-10{,}1}{\sqrt{9{,}09}}\right) \approx 0{,}3 .$$

II: 10

d) Es wird der größte Wert für n gesucht, für den der Ausdruck $\sum_{k=0}^{n-92-1} \binom{n}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{n-k}$ kleiner als 5% ist. Dazu muss man die fetten Werte in der obigen Tabelle nach rechts durchgehen, bis der Wert gerade noch $\leq 5\%$. Das ist für $n = 97$ der Fall.

Will man hier wieder mit normalverteilten Näherungen arbeiten, wählt man am besten als Zufallsvariable Y die möglichen Anzahlen der n Personen, die tatsächlich an der Fahrt teilnehmen wollen. Die Frage ist für welches n der Wert $P(\{Y \leq 92\})$ noch ≥ 95 % ist. Die Variable Y ist n-0,9-binomialverteilt.

Die Laplace-Bedingung ist ab $n = 94$ erfüllt. Man wird ein n schätzen, das größer als 93 ist. Somit rechnen wir:

$P(\{Y \leq 92\}) \approx \Phi\left(\frac{92{,}5-0{,}9n}{\sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot n}}\right)$. Der rechte Wert muss also noch gerade $\geq$ 95% sein, also muss das Argument $\geq 1{,}645$ sein. Mit der Substitution $m = \sqrt{n}$ und Rundungen auf vier Dezimalen folgt $n \leq 97{,}3...$.

II: 15

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Frage zielt auf die Bestimmung des Ablehnungsbereichs eines einseitigen Hypothesentests über den Parameter p einer Binomialverteilung mit

$H_0: p \geq 0{,}1$ und $H_1: p < 0{,}1$. p sei dabei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Buchung abgesagt wird. Wenige Absagen sprechen gegen H_0.

Die Testvariable T beschreibe die möglichen Anzahlen von Absagen. Wir nehmen auch hier an, dass T binomialverteilt ist.

Es ist also der größte Wert K zu bestimmen für den gilt
$\sum_{k=0}^{K} B(1000; 0{,}1; k) \leq 5\%$.

T sei B(100 ; 0.1) binomialverteilt.

Dann ist $\frac{T - 100 + 0{,}5}{\sqrt{90}}$ annähernd 0-1-normalverteilt.

Mit Hilfe der Tafel erhält man:
$P\left(\frac{X - 100 + 0{,}5}{\sqrt{90}} \leq -1{,}645\right) \approx 0{,}05 \Leftrightarrow P(T \leq 83{,}9) \approx 0{,}05$.

Wenn also unter 1 000 Buchungen nur 83 oder weniger Absagen auftreten, kann man von einer auf dem 5 %-Niveau signifikanten Senkung der Absagerquote ausgehen.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Wir rechnen den Erwartungswert für die Einnahmen aus, wobei <u>keine Überbuchungen</u> zugelassen werden:
Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen und den Restzahlungen.

Wir berechnen die zugehörigen Erwartungswerte:
$E_1 = 92 \cdot 5 € = 460 €$ und $E_2 = 92 \cdot 0{,}94 \cdot 15 € = 1297{,}20 €$.
Die Addition ergibt E = 1757,20 €.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>• Wenn genau 5 Personen absagen, sind die Einnahmen von $92 \cdot 20 € + 5 \cdot 5 € = 1\,865 €$ offenbar maximal:

Sagen nämlich weniger ab, entfallen für Überbuchungen die betreffenden 5 € und es fallen zusätzlich Kulanzkosten an. Sagt z. B. keiner ab, so ist die Einnahmebilanz $92 \cdot 20 € - 5 \cdot 25 € = 1\,715 €$.

Sagen mehr als 5 Personen ab, so werden bei jeder weiteren absagenden Person die Einnahmen von 20 € durch nur 5 € ersetzt.

Der Extremfall, (der auch extrem unwahrscheinlich ist) besteht darin, dass alle absagen, dann gäbe es nur noch Einnahmen in Höhe von $97 \cdot 5 € = 485 €$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Bemerkung: Abgesehen davon, dass dieser Fall praktisch unmöglich ist, wäre es natürlich noch schlimmer für das Busunternehmen, wenn nur eine Person nicht absagt, weil dann ein Bus fahren müsste. Ähnliches gilt, wenn so viele Personen absagen, dass man mit dem größeren Bus nicht auskommt, aber das sind Gewinnfragen, um die es hier nicht geht. • Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen, den Restzahlungen und den negativ gerechneten Kulanzkosten für die abzuweisenden Kunden. Die Rechnung wird dabei einfacher, wenn man sich – wie vorgeschlagen – vorstellt, dass die abzuweisenden Kunden erst die (5+15) € zahlen und dann nicht (25+5) €, sondern 45 € zurückbekommen. $E_1 = 97 \cdot 5€ = 485€$, $E_2 = 97 \cdot 0{,}94 \cdot 15€ = 1367{,}70€$, $K = \left(\sum_{i=0}^{4} (5-i)\; B(97;0{,}06,i) \right) \cdot 45€ = 24{,}60€$. Die 5 Werte der Binomialverteilung können schnell aus der Tabelle für $n = 97$ entnommen werden, also $K = \left(5 \cdot 0025 + 4 \cdot 0{,}0153 + 3 \cdot 0{,}0469 + 2 \cdot 0{,}0949 + 1 \cdot 0{,}1423\right) \cdot 45€ \approx 24{,}60€$. Die Addition ergibt ***E* = 1828,10 €.** Der Vergleich mit f) zeigt, dass es sich für das Unternehmen finanziell lohnt, die 5 Überbuchungen zuzulassen.			20
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25