Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2005/2006

# Leistungskurs Mathematik

**Technische Gymnasien**

**9. Februar 2006, 9.00 Uhr**

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind <u>nicht</u> für die Prüflinge bestimmt.

**Diese Unterlagen enthalten:**

1 Allgemeines
2 Rückmeldebogen
3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
4 Hinweise zum Korrekturverfahren
5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

## 1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen <u>nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer</u>, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **330 Minuten** einschließlich Lesezeit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

## 2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

*Bitte umgehend ausfüllen und an B 3-1 faxen!*

Behörde für Bildung und Sport
B 3-1

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

**in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung**

**Fach: Mathematik, Leistungskurs** **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

| Aufgabe Nr. | Anzahl | |
|---|---|---|
| I.1 | von | Prüflingen |
| I.2 | von | Prüflingen |
| I.3 | von | Prüflingen |
| II.1 | von | Prüflingen |
| II.2 | von | Prüflingen |
| III.1 | von | Prüflingen |
| III.2 | von | Prüflingen |

Datum: _______________

Unterschrift: ___________________________________

# 3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sieben** Aufgaben – **I.1, I.2, I.3** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

# 4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

# 5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

**Erwartungshorizont:**

*Kursiv gedruckte Passagen* sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

**Bewertung:**

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

| Bewertungs-einheiten | Erbrachte Leistung | Notenpunkte | Bewertungs-einheiten | Erbrachte Leistung | Notenpunkte |
|---|---|---|---|---|---|
| ≥ 285 | ≥ 95 % | 15 | ≥ 165 | ≥ 55 % | 7 |
| ≥ 270 | ≥ 90 % | 14 | ≥ 150 | ≥ 50 % | 6 |
| ≥ 255 | ≥ 85 % | 13 | ≥ 135 | ≥ 45 % | 5 |
| ≥ 240 | ≥ 80 % | 12 | ≥ 120 | ≥ 40 % | 4 |
| ≥ 225 | ≥ 75 % | 11 | ≥ 99 | ≥ 33 % | 3 |
| ≥ 210 | ≥ 70 % | 10 | ≥ 78 | ≥ 26 % | 2 |
| ≥ 195 | ≥ 65 % | 9 | ≥ 57 | ≥ 19 % | 1 |
| ≥ 180 | ≥ 60 % | 8 | < 57 | < 19 % | 0 |

**Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt**, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

**Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt**, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

**Abiturprüfung 2006**

**BeBo EKo M**

Bewertungsbogen Erstkorrektur

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schulchiffre | | | |
| Fach | Mathematik | **Schüler-Nummer** | |
| Kurstyp | LK | | |
| Kurs-Nummer | | | |

| Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ➔ | BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen) | | | | | | | BWE pro Aufgabe ➔ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | Summe der BWE ➔ | |

**Bewertungstext**

**Notenpunkte ➔**

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

**Abiturprüfung 2006**

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schulchiffre | | BeBo ZKo M | |
| Fach | Mathematik | **Schüler-Nummer** | |
| Kurstyp | LK | | |
| Kurs-Nummer | | | |

| Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ➜ | BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen) | | | | | | | BWE pro Aufgabe ➜ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | Summe der BWE ➔ | |

**Bewertungstext**

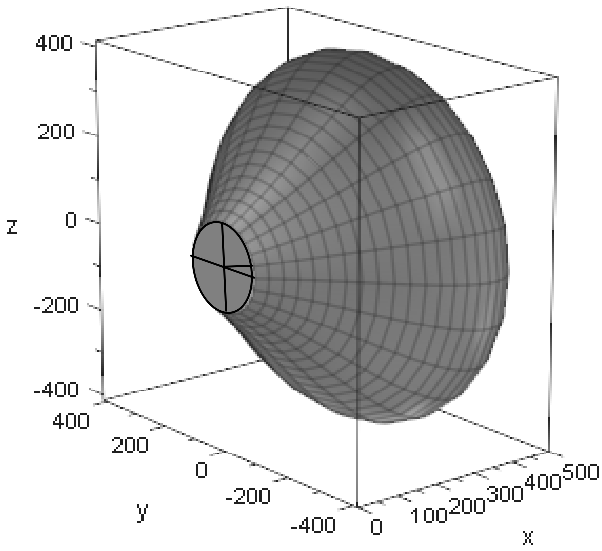
**Notenpunkte ➔**

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

## ANALYSIS 1

### I.1 Öltank

In der Entwicklungsabteilung eines Betriebes wird über die Form eines Zusatztanks für Hydrauliköl diskutiert. Der Tank soll als Rotationskörper realisiert werden, dessen Randkurve durch den Graphen einer Funktion über dem Intervall $0 \le x \le 500$ beschrieben werden kann und auf Grund konstruktiver Vorgaben die Punkte $P_1(0 \mid 100)$, $P_2(100 \mid 200)$, $P_3(300 \mid 400)$ und $P_4(500 \mid 200)$ enthalten muss (Angaben in mm).




Es werden folgende Alternativen diskutiert:

1. Eine ganzrationale Funktion $f_1$ dritten Grades.
2. Die Funktion $f_2$ mit der Gleichung $f_2(x) = 400 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{600}x\right) + 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{200}x\right)$.

Da der Tank aus Stabilitätsgründen durch zwei in Längsrichtung angeordnete Blechwände in vier gleich große Zellen aufgeteilt werden soll (siehe Darstellung), ist aus wirtschaftlicher Sicht neben der Mantelfläche $A_M$ und den Stirnflächen $A_S$ auch die Fläche $A_R$ zwischen der Randkurve und der $x$-Achse von Bedeutung.

Als Entscheidungshilfe für die wirtschaftliche Qualität einer Tankgeometrie wird in dem Betrieb das Effektivitätsverhältnis $K$ zwischen dem Tankvolumen und dem gesamten Blechbedarf $A = A_S + 4 \cdot A_R + A_M$ für seine Herstellung berücksichtigt: $K = \frac{V}{A}$.

Der Mantelflächeninhalt $A_M$ wird berechnet nach der Formel $A_M = 2\pi \cdot \int_0^{500} f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

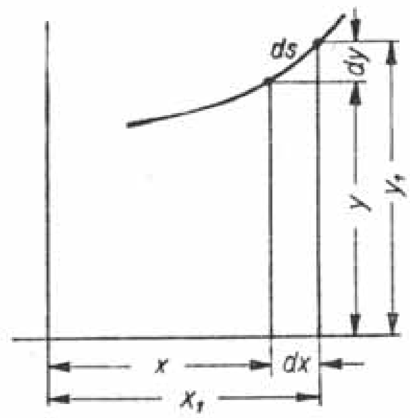
Der Mantelflächeninhalt beträgt $A_{M1} \approx 133{,}8 dm^2$ bei Auswahl der Funktion $f_1$ und $A_{M2} \approx 158{,}8 dm^2$ für die Funktion $f_2$.
Das Volumen des Tanks wurde für die Funktion $f_2$ zu $V_2 \approx 157{,}3 d\text{m}^3$ ermittelt.

a) Leiten Sie die Berechnungsformel für den Mantelflächeninhalt $A_M$ her.

b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, mit dem der Funktionsterm von $f_1$ ermittelt werden kann und begründen Sie Ihren Ansatz.
Ermitteln Sie die Lösung des Systems und geben Sie den Funktionsterm an.
*Hinweis*: $f_1(x) = -10^{-5}x^3 + 4 \cdot 10^{-3}x^2 + \frac{7}{10}x + 100$

c) Ermitteln Sie für die beiden diskutierten Alternativen das Verhältnis $K$, indem Sie jeweils den gesamten Blechbedarf berechnen und das Volumen $V_1$ (für die Funktion $f_1$) bestimmen.
Beurteilen Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich der wirtschaftlichen Effektivität.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Rotiert eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ um die $x$-Achse, so ist die Mantelfläche des Rotationskörpers<br>$A_M = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y ds = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) ds$ .<br><br><br>Es ist $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$<br>$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$<br>$ds = dx\sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}$<br>Dann wird $A_M = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$<br>oder $A_M = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ . | | 20 | |
| b) | <u>Ansatz:</u><br>$f_1(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ und einsetzen der Punkte $P_1$ bis $P_4$.<br>Mit $P_1$ folgt sofort $d = 100$.<br>Das Lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von $a$, $b$ und $c$ ist dann<br>$\left(\begin{array}{ccc\|c} 10000 & 100 & 1 & 1 \\ 90000 & 300 & 1 & 1 \\ 1250000 & 2500 & 5 & 1 \end{array}\right)$<br><u>Ermitteln der Lösung:</u><br>$\xrightarrow[III-5\cdot II]{II-I} \left(\begin{array}{ccc\|c} 10000 & 100 & 1 & 1 \\ 80000 & 200 & 0 & 0 \\ 800000 & 1000 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[III-10\cdot II]{} \left(\begin{array}{ccc\|c} 10000 & 100 & 1 & 1 \\ 80000 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 & -4 \end{array}\right)$<br>Es folgt $b = 4\ 10^{-3}$, eingesetzt in Gleichung $II$ ergibt sich $400\ a = -4\ 10^{-3}$ und damit $a = -10^{-5}$. Aus $I$ ergibt sich dann $c = 0{,}7$.<br>Die Funktionsgleichung für $f_1$(x) lautet $f_1(x) = -10^{-5} x^3 + 4 \cdot 10^{-3} x^2 + \frac{7}{10} x + 100$ | 10 | 15 | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| c) | Berechnung des Effektivitätsverhältnisses $K$ für die beiden Varianten:<br>$A_S = y_1^2 \cdot \pi + y_4^2 \cdot \pi = 100^2 \cdot \pi + 200^2 \cdot \pi = 50000\pi \approx 157080 mm^2 \approx 15,7 dm^2$<br>(Die Stirnfläche $A_S$ ist bei beiden Tankvarianten gleich.)<br>1. $A_{R1} = \int_0^{500} f_1(x)dx \approx 1{,}48 \cdot 10^5 mm^2 \approx 14{,}8 dm^2$<br>Gesamter Blechbedarf: $A_1 = A_S + 4 \cdot A_{R1} + A_{M1} \approx 208{,}7 dm^2$<br>$\left(f_1(x)\right)^2 = 10^{-10}x^6 - 8 \cdot 10^{-8}x^5 + 2 \cdot 10^{-6}x^4 + 0,0036x^3 + 1,29x^2 + 140x + 10^4$<br>Volumen: $V_1 = \pi \int_0^{500} (f_1(x))^2 dx \approx 1{,}517 \cdot 10^8 mm^2 \approx 151{,}7 dm^3$<br>Effektivitätsverhältnis: $K_1 = \frac{V_1}{A_1} = \frac{151,7 \text{ dm}^3}{208,7 \text{ dm}^2} \approx 0,727 \text{ dm}$.<br>2. $A_{R2} = \int_0^{500} f_2(x)dx \approx 1{,}49 \cdot 10^5 mm^2 \approx 14{,}9 dm^2$<br>Lösung durch lineare Substitution:<br>$A_2 = A_S + 4 \cdot A_{R2} + A_{M2} \approx 234,06 dm^2$.<br>$K_2 = \frac{V_2}{A_2} = \frac{157,3 dm^3}{234,06 dm^2} \approx 0,67 dm$.<br>Der Effektivitätsquotient ist bei Varianten 1 wesentlich größer als bei Variante 2. Das bedeutet, dass bei vorgegebenem Volumen weniger Material für die Herstellung des Tanks benötigt wird und damit geringere Herstellungskosten entstehen. | 15 | 20 | 20 |
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 55 | 20 |

**ANALYSIS 2**

## I.2 Gezeiten

*Für die gesamte Aufgabe können Sie Ihr Wissen über Eigenschaften der Sinus-Funktion verwenden, Methoden der Differenzialrechnung sind dann kaum nötig.*

Die Deutsche Bucht als Teil der Nordsee unterliegt den Gezeiten. In einem regelmäßigen Rhythmus von gut 6 Stunden verändert sich die Wassertiefe abwechselnd zu einem Hochstand (Hochwasser) und einem Niedrigstand (Niedrigwasser). Es stellen sich also an jedem Tag etwa 2 Hoch- und 2 Niedrigwasser ein.

Hinzu kommt, dass sich im Laufe eines Monats in Abhängigkeit von den Mondphasen die Hoch- und Niedrigwasserstände ändern mit jeweils zwei Maximal- und zwei Minimalwerten. Zur „Springzeit" und in zeitlicher Nähe (ca. ± 4 Tage) sind die Hochwasserstände besonders hoch und die Niedrigwasserstände besonders niedrig und zur „Nippzeit" und in zeitlicher Nähe sind die Hochwasserstände relativ gering und die Niedrigwasserstände relativ hoch.

Auf dem beigelegten Diagrammblatt sind drei Kurven abgebildet. Die $y$-Achsen zeigen an einem festen Ort (Hafen, z.B. Norderney) jeweils den Wasserstand (Pegel) in Metern bezogen auf den mittleren Wasserstand an, die $x$-Achse ist eine Zeitachse mit einer Einteilung in Tagen. Jeder Monat des Jahres wird mit 30 Tagen verrechnet.

a) Die Kurven 1 bis 3 auf dem beigefügten Diagrammblatt haben folgende Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \frac{3}{10}\cdot\sin\left(\frac{12}{30}x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2} \qquad g(x) = \sin(12x) \qquad h(x) = f(x)\cdot g(x)$$

Entscheiden Sie, welche Kurve zu welcher Funktionsgleichung gehört.

Die Funktion $h$ modelliert grob die Gezeiten in dem betreffenden Hafen.
$x = 0$ markiert den Beginn eines Monats.

b) Bestimmen Sie innerhalb der ersten 7 Tage des Monats die genauen Zeitpunkte (in Tagen, Stunden und Minuten) und die zugehörigen Wasserstände zur Springzeit für das höchste Hochwasser und für das niedrigste Niedrigwasser.

Berechnen Sie dabei zunächst die Extremstellen der beiden Funktionen $f$ und $g$ im Intervall $[0;7]$, um mit diesen Ergebnissen die Hoch- und Tiefpunkte der Gezeitenfunktion $h$ zu bestimmen.

Fortsetzung nächste Seite →

Seite 2 der Aufgabe **Gezeiten**

c) Durch die Gezeiten entstehen Strömungen, zum Beispiel in den engen Durchfahrten zwischen den ostfriesischen Inseln. Die Stärke dieser Wasserströmungen (die für die Schifffahrt wichtig ist) wird wesentlich auch davon bestimmt, wie stark das Wasser steigt oder fällt, mit anderen Worten durch die jeweiligen Änderungsraten des Wasserstandes. Deshalb sollen hier die absolut maximalen Änderungsraten des Wasserstandes und zugehörige Zeitpunkte bestimmt werden. Dazu müssten – nach üblichem Verfahren – Nullstellen der 2. Ableitung der Funktion $h$ ( s.o. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ) ermittelt werden, was aber – wenn man exakt rechnen will – relativ schwierig bzw. umständlich ist. Nun ändert sich aber die Funktion $f$ im Vergleich zur Funktion $g$ relativ wenig, so dass in der Nähe jedes Zeitpunktes $x_0$ der Wert $f(x_0)$ näherungsweise als konstanter Faktor auf $g(x)$ wirkt.

Betrachten Sie deshalb <u>zunächst</u> vereinfachend Gezeitenfunktionen, bei denen Hoch- und Niedrigwasser jeweils immer den gleichen Wasserstand erreichen, bei denen also der Wasserstand zum Zeitpunkt $x$ durch $k \cdot g(x)$ beschrieben wird mit einer Konstanten $k$ $(k > 0)$ und bestimmen Sie unter dieser Annahme die Stellen (Zeitpunkte), bei denen der Betrag der Änderungsrate des Wasserstandes maximal wird.

Bestimmen Sie nun <u>unter diesen</u> vielen Zeitpunkten die beiden, die benachbart zum ersten Springzeitpunkt sind, und begründen Sie, dass die dem Betrage nach absolut höchsten Änderungsraten ziemlich genau hier zu erwarten sind. Bestimmen Sie deshalb diese beiden Änderungsraten und rechnen Sie das Ergebnis auch in die Einheit cm/min um.

d) Die Funktion $f$ ist vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(bx+c)+d$ .

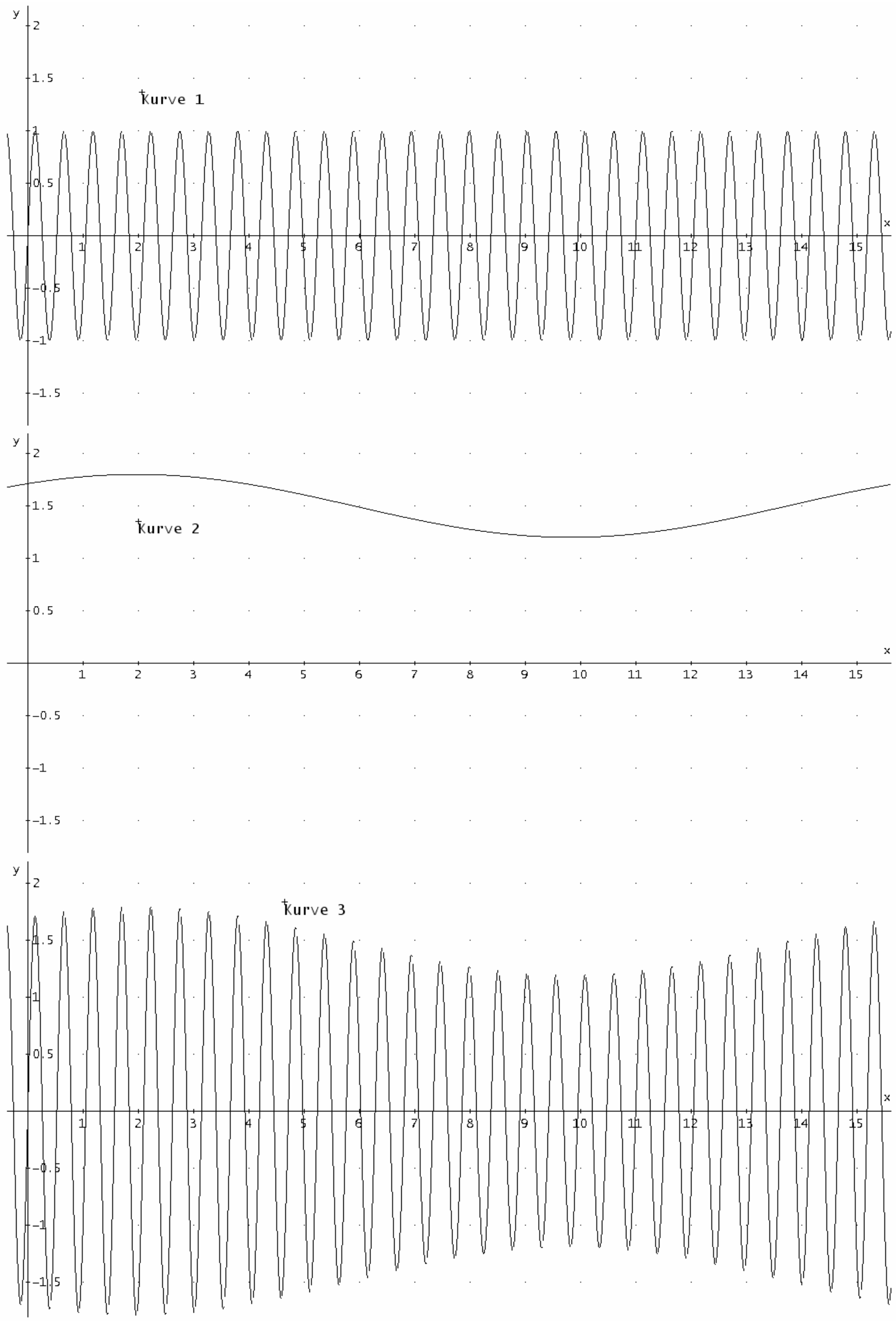
Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Variablen $a$, $b$, $c$ und $d$ und interpretieren Sie im Kontext der Gezeitenfunktion $h$ die dafür gewählten Zahlen:

$\frac{3}{10}$ für $a$, $\frac{12}{30}$ für $b$, $\frac{\pi}{4}$ für $c$ und $\frac{3}{2}$ für $d$.

e) Auf Java verhalten sich die Gezeiten aufgrund der geographischen Gegebenheiten und damit verbundenen Wellenüberlagerungen völlig anders. Hier treten eintägige Gezeiten auf, das heißt, dass im Laufe eines Tages lediglich ein Hochwasser und ein Niedrigwasser verzeichnet werden. Das maximale Hochwasser beträgt 0,60 m und das minimale 0,40 m. Am ersten Tag des betrachteten Monats findet das niedrigste Hochwasser statt.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die diese Gezeitenkurve wiedergibt.

## Anlage zur Aufgabe „Gezeiten“



## Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<ul>
<li>g gehört zur Kurve 1. Der Graph weist auf einer Intervalllänge von $2\pi$ [Tagen] 12 Perioden auf und hat die Amplitude von 1, hat also eine Periodenlänge von $2\pi \cdot \frac{1}{12}$ [Tagen], also von gut einem halben Tag.</li>
<li>f gehört zur Kurve 2. Dieser Graph ist eine Sinusfunktion mit einer Periode von $2\pi \cdot \frac{30}{12}$ [Tagen] also von gut 15 Tagen, oder anders gesagt, in einer Intervalllänge von $2\pi\ (\approx 6)$ Tagen sind es etwas weniger als eine halbe (genau $\frac{2}{5}$) Periode. Diese Sinuskurve hat die Amplitude 0,3 und ist um 1,5 angehoben, d.h. ihre Werte schwanken zwischen 1,2 und 1,8.</li>
<li>h bildet das Produkt aus f und g. und stellt die Kurve 3 dar. Fasst man f als Faktor auf, der die Ausgangstidenfunktion g multiplikativ verändert, dann schwanken die Hoch- bzw. Niedrigwasser zwischen ±1,2 m und ±1,8 m. Die Nullstellen von g bleiben erhalten. Man kann auch sagen: die Amplitude wird durch f variiert (Amplitudenmodulation).</li>
</ul>
</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Die reine Sinus-Funktion hat Maxima an den Stellen $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ und Minima an den Stellen $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.<br>
Extreme Hoch- und Niedrigwasserstände treten zur Springzeit ein, also wenn die modulierende Funktion $f(x) = \frac{3}{10} \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}$ maximal ist.<br>
Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{\pi}{4}\right)$ maximal ist, wenn also<br>
$\frac{2}{5}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,<br>
$x = \frac{5\pi \cdot (8k+1)}{8}$, d.h. $x = ....,-\frac{35\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{45\pi}{8}, ....$<br>
Von diesen Werten liegt nur $\frac{5\pi}{8} \approx 1{,}963$ in dem zu betrachtenden Zeitintervall (was auch an der entsprechenden Kurve 2 erkannt werden kann).<br>
Mit den gleichen Argumenten stellt man fest, dass die unmodulierte Tidenfunktion $g(x) = \sin(12x)$ Maxima (Hochwasser) hat bei<br>
$x = \frac{\pi \cdot (4k+1)}{24}$, d.h. $x = ....,-\frac{3\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, ...$
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>und Minima (Niedrigwasser) hat bei<br>$x = \frac{\pi \cdot (4k-1)}{24}$, d.h. $x = ....,-\frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, ...\frac{15\pi}{24}, ....$<br>Hieraus erkennt man insbesondere, dass bei $\frac{5\pi}{8} = \frac{15\pi}{24}$ Springzeit und gleichzeitig Niedrigwasser ist. Hieraus folgt (ohne Differenzialrechnung), dass zu diesem Zeitpunkt ein extremes (extrem niedriges) Niedrigwasser eintreten muss.<br>Die extremen (extrem hohen) Hochwasser müssen dann die benachbarten sein, also bei $\frac{13\pi}{24} \approx 1{,}702$ und bei $\frac{17\pi}{24} \approx 2{,}225$ Umgerechnet entsprechen die ermittelten Zeitpunkte folgenden Zeiten nach Monatsbeginn:<br>Springniedrigwasser: $\frac{5\pi}{8} \simeq 1$ Tag 23 Stunden und 7 Minuten.<br>1. Springhochwasser: $\frac{13\pi}{24} \simeq 1$ Tag 16 Stunden und 50 Minuten.<br>2. Springhochwasser: $\frac{17\pi}{24} \simeq 2$ Tage 5 Stunden und 24 Minuten.<br>Für die zugehörigen Wasserstände gilt:<br>$h\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -1{,}80$ [m], $h\left(\frac{13\pi}{24}\right) \approx 1{,}798$ [m], $h\left(\frac{17\pi}{24}\right) = 1{,}798$ [m].<br><u>Bemerkung:</u> Die Argumentation für die Spring<u>hoch</u>wasserstände ist nicht ganz vollständig, weil sich ja die Werte beider Funktionen f und g in einer Umgebung um die entsprechenden Zeitpunkte ändern. Die Änderungsraten sind für g aber stärker als für f, so dass die Ergebnisse tatsächlich exakt sind. Eine Extremwertbestimmung für die Funktion h wird also nicht erwartet.</td><td>10</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Ableitung der Wasserstandsfunktion beschreibt deren Änderungsraten. Für die Ableitung von $k \cdot g$ gilt: $(k \cdot g)'(x) = 12k\cos(12x)$. Die Kosinusfunktion hat Extremstellen bei $x = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, die Funktion $(k \cdot g)'$ also bei<br>$x = n \cdot \frac{\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$.<br>Das erste Maximum von $f$ liegt bei $\frac{5\pi}{8} = \frac{7{,}5\pi}{12}$ (Springzeit, vgl. b) ), so dass die benachbarten Stellen $x_1 = 7\frac{\pi}{12}$ und $x_2 = 8\frac{\pi}{12}$ als Näherungswerte für die Zeitpunkte mit maximaler Änderungsrate von h in Frage kommen.<br>Die zugehörigen Änderungsraten, kann man entsprechend obiger Argumentation mit $h'(x) \approx 12 f(x)\cos(12x)$ in guter Näherung berechnen.<br>Man erhält: $h'(x_1) \approx -21{,}595066$ und $h'(x_2) \approx 21{,}595066$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Rechnet man so, wie es die meisten Schülerinnen und Schüler wohl tun werden, muss man *h* (mit der Produkt- und Kettenregel) ableiten:<br>$h'(x) =$<br>$12\left(0,3\sin(0,4x+0,25\pi)+1,5\right)\cos(12x)\ +\ 0,12\cos(0,4x+0,25\pi)\sin(12x)$<br>Setzt man jetzt die Stellen $x_1 = 7\frac{\pi}{12}$ und $x_1 = 8\frac{\pi}{12}$ in diese Ableitung ein, so erhält man im Rahmen der hier gewählten Rundungsgenauigkeit für die beiden Extremwerte der Ableitung keinen Unterschied.<br><br>21,595066 m/Tag ≈1,5 cm/min. Das Wasser fällt bzw. steigt also zu diesen beiden Zeitpunkten um ca. 1,5 Zentimeter pro Minute.<br><br>*<u>Bemerkung:</u> Dass die Schülerinnen und Schüler die Werte von h´über $f\cdot g'$ in guter Näherung berechnen, ist wohl nicht zu erwarten, sondern eher die exakte Rechnung. Wenn aber ein Schüler oder eine Schülerin den Weg über die Näherung geht, sind natürlich volle Punkte für diesen Teil zu vergeben.* | | 10 | 10 |
| d) | Die Funktion *f* verändert periodisch die Hochwasser- und Niedrigwasserstände.<br>Die Variable *a* ist die Amplitude der Sinusfunktion. Dieser Wert gibt z.B. den maximalen Unterschied zwischen Springhochwasser und Nipphochwasser jeweils zum mittleren Hochwasser von 0,3 m an.<br>$\frac{2\pi}{b}$ bestimmt die Periode der Sinusfunktion, *b* gibt die Anzahl der Perioden im Intervall $2\pi$ an. Hier müssen etwa 2 Perioden auf einem Intervall von 30 untergebracht werden. Es gibt also innerhalb des Monatsintervalls von 30 Tagen entsprechend 2 Spring- und 2 Nippzeiten.<br>*d* ist eine Konstante, die die Kurve um den Betrag von 1,5 nach oben anhebt.<br>1,5 m ist somit der mittlere Hochwasserstand während einer vollen Periode. Dadurch ist der Modulationsfaktor immer positiv und schwankt um die doppelte Amplitude *a*.<br>*c* ist die Phasenverschiebung der Kurve, *c* verschiebt die Sinusfunktion somit in *x*-Richtung. Hierdurch wird der Modulationsfaktor zum Zeitpunkt 0 eingestellt: $f(0) = a\cdot\sin(c)+d \approx 1,7$ . | 10 | 10 | |
| e) | Die Frequenz der Basisfunktion ist jetzt nur halb so groß wie bei den Gezeiten in der Nordsee, daher gilt: $g_{neu}(x) = \sin(6x)$. Das Hochwasser variiert mit einer Amplitude von 0,1 bei einer mittleren Höhe von 0,5 über eine volle Spring-/Nippperiode. Die Frequenz des Spring-/Nipp-Rhythmus' bleibt unverändert wie im Aufgabenteil a). Die Phasenverschiebung beträgt etwa $\frac{3\pi}{2}$, da $h_{neu}(0)$ das Minimum der Amplitudenfunktion $f_{neu}$ und damit das niedrigste Nipphochwasser im Bereich des 1. Tages liegt. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | $h_{neu}(x) = f_{neu}(x) \cdot g_{neu}(x) = \left(0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{12}{30}x + \frac{3\pi}{2}\right) + 0{,}5\right) \cdot \sin(6x)$. | | 5 | 10 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 55 | 25 |

**ANALYSIS 3**

## I.3 Funktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k$ mit der Gleichung $f_k(x) = x \cdot (1 - \frac{1}{k} \cdot \ln x),\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von $f_k$ an.
Berechnen Sie die Nullstellen von $f_k$ und geben Sie begründend an, für welche Werte von k die Nullstellen zwischen 0 und 1 liegen.

b) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte von $f_k$ in Abhängigkeit von *k*.
Zeigen Sie, dass der Quotient von Extremstelle und Nullstelle unabhängig von *k* ist.
(Zur Kontrolle: $f_k'(x) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \ln x$.)

c) Untersuchen Sie, ob die Graphen der Schar gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte.
Weisen Sie nach, dass es ein Intervall gibt, in dem jeder beliebige Graph mit negativem *k* unter jedem beliebigen Graphen mit positivem *k* verläuft.

d) Skizzieren Sie die drei Graphen für *k* = 1, *k* = 0,5 und *k* = -0,5 in ein Koordinatensystem.

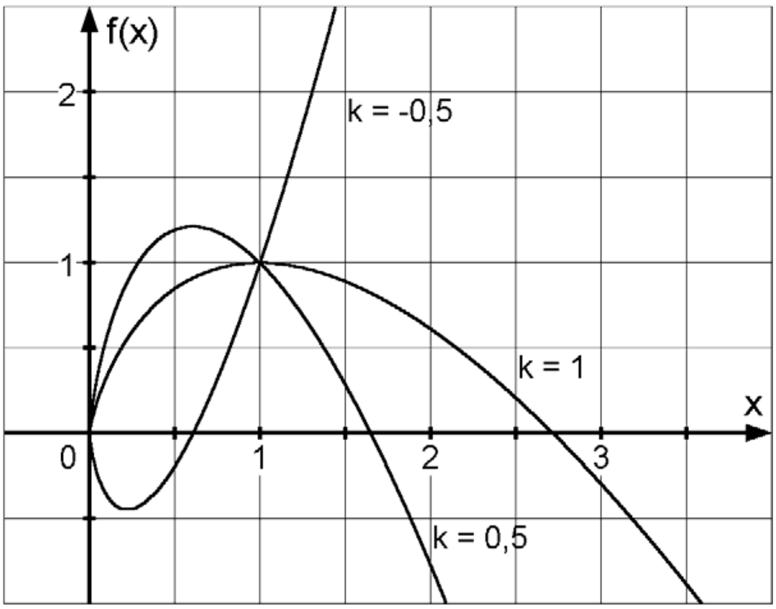
e) Bestimmen Sie für positive *k* den Inhalt $A(k)$ der Fläche, den der Graph von $f_k$ mit der *x*-Achse einschließt.
Hinweis: $\lim\limits_{c \to 0} c^2 \cdot \ln c = 0$ (Zur Kontrolle: $A(k) = \frac{e^{2k}}{4k}$)

f) Bestimmen Sie den Wert für *k*, *k* > 0, für den der Flächeninhalt $A(k)$ extremal wird.
Ermitteln Sie diesen Flächeninhalt und entscheiden Sie, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

g) Für positive *k* schließen die Parallele zur *x*-Achse durch den Hochpunkt von $f_k$, die Parallele zur *y*-Achse durch die Nullstelle von $f_k$ sowie die Koordinatenachsen ein Rechteck ein.
Ermitteln Sie, ob das Verhältnis, in dem der Graph von $f_k$ dieses Rechteck teilt, von *k* abhängt.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | <u>Definitionsbereich:</u> $D=\mathbb{R}^+$<br><u>Nullstellen:</u> $f_k(x)$ kann nur 0 werden, wenn der 2. Faktor den Wert 0 annimmt, da 0 selber nicht zum Definitionsbereich gehört. Der 2. Faktor nimmt den Wert Null an, genau dann wenn $x=e^k$.<br>$e^k$ ist für alle $k$ positiv, also in der Definitionsmenge und damit auch Nullstelle. Für $k<0$ ist $e^k<1$, die Nullstellen liegen daher für $k<0$ zwischen 0 und 1 | 10 | 5 | |
| b) | Um die Extrem- und Wendepunkte zu bestimmen, bildet man zunächst die 1. und die 2. Ableitung.<br>Für die 1. Ableitung wendet man die Produktregel an und erhält:<br>$f_k'(x)=1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\ln x$.<br>Für die 2. Ableitung folgt: $f_k''(x)=-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x}$.<br>Die 1. Ableitung hat eine Nullstelle und zwar bei $x=e^{k-1}$.<br>Um die Existenz der Extremstelle zu überprüfen, bildet man die 2. Ableitung an dieser Stelle und erhält $f_k''(e^{k-1})=-\frac{e^{1-k}}{k}$. Da $e^{1-k}$ stets positiv ist, wird dieser Term für positive $k$ immer negativ, also liegt in diesen Fällen ein Maximum vor. Für negative $k$ liegt entsprechend ein Minimum vor.<br>Für den Funktionswert gilt: $f_k(e^{k-1})=\frac{e^{k-1}}{k}$ und somit für die Extrempunkte: $E(e^{k-1}\mid\frac{e^{k-1}}{k})$.<br>Bildet man das Verhältnis von Null- und Extremstelle, so gilt: $\frac{x_0}{x_E}=e$, ein von $k$ unabhängiger Wert.<br>Da der Term der 2. Ableitung für alle $k$ nicht den Wert 0 annehmen kann, gibt es keine Wendepunkte. | | 20 | |
| c) | Wenn alle Graphen der Schar einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, dann muss die folgende Gleichung – unabhängig von $k$ – erfüllbar sein:<br>$x\cdot(1-\frac{1}{k_1}\cdot\ln x)=x\cdot(1-\frac{1}{k_2}\cdot\ln x),\ k_1\neq k_2$.<br>Da 0 nicht zum Definitionsbereich gehört, ist diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn gilt: $ln(x)(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2})=0$. Dies ist äquivalent zu: $x=1$ oder $k_1=k_2$. | | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Also schneiden sich alle Funktionsgraphen der Schar bei $x = 1$ und nur dort. Da der Funktionswert dieser Stelle ebenfalls 1 ist, schneiden sich alle Graphen der Schar im Punkt (1 \| 1). Aus der obigen Argumentation geht noch schärfer hervor, dass sich je zwei verschiedene Graphen der Schar außer bei $x = 1$ nicht mehr schneiden. Es kommen als Intervalle, in dem jeder beliebige Graph mit negativem $k$ unter jedem beliebigen Graphen mit positivem k verläuft, also nur Teilintervalle von $]0;1[$ bzw. $]1;\infty[$ in Frage. Man kann nun an einer beliebigen Stelle „testen“, z. B. bei $\frac{1}{2}$: $f_k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln(2)}{2k}+\frac{1}{2}$. Daraus erkennt man unmittelbar, dass dieser Funktionswert für jeden negativen Wert von $k$ kleiner ist als der für jeden positiven Wert von $k$. Wegen der Stetigkeit der Funktionen $f_k$ bleibt diese Relation auf dem ganzen Intervall $]0;1[$ erhalten. Alle Teilintervalle von $]0;1[$ erfüllen also die geforderte Bedingung. *Alternative Argumentation:* Sei $x_A$ die Stelle, an der der Verlauf der Graphen betrachtet wird. Dann muss folgende Ungleichung untersucht werden: $x_A \cdot (1-\frac{1}{k_1}\cdot \ln x_A) \le x_A \cdot (1-\frac{1}{k_2}\cdot \ln x_A),\ k_1 \ne k_2$. Aus $x_A > 0$ folgt, dass nur die Beziehung $\ln x_A\,(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}) \le 0$ zu untersuchen ist. Geht man von dem Intervall $]0;1[$ aus, dann ist der Logarithmus kleiner als 0. Hat $k_2$ ein positives Vorzeichen, dann wird mit negativem $k_1$ die Ungleichung erfüllt. Also verlaufen im Intervall $]0;1[$ alle Graphen mit $k > 0$ oberhalb aller Graphen mit $k < 0$. | | 10 | 5 |
| d) |  | 10 | | |

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| e) | Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnet man das folgende Integral partiell: $A(k) = \lim\limits_{c\to 0} \int_c^{e^k} x\cdot(1-\frac{1}{k}\ln x)\,dx$. Man setzt $v'(x) = x$ und $u(x) = 1 - \frac{1}{k}\cdot\ln x$. Dann folgt: $v(x) = \frac{x^2}{2}$ und $u'(x) = -\frac{1}{kx}$. Setzt man die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so erhält man: $(1-\frac{1}{k}\ln x)\cdot\frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{kx}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$. Das zweite Integral lässt sich elementar bestimmen und man erhält für die Stammfunktion folgenden Term: $\frac{x^2}{2}\cdot(1-\frac{1}{k}\ln x) + \frac{x^2}{4k}$. Setzt man die Grenzen ein und berücksichtigt den angegebenen Grenzwert, so folgt $A(k) = \frac{e^{2k}}{4k}$. | | 10 | 5 |
| f) | Um das gesuchte $k$ zu erhalten, leitet man $A(k)$ mit Hilfe der Produkt-Quotienten- und Kettenregel nach $k$ ab.<br>Für die 1. und die 2. Ableitung folgt:<br>$A'(k) = \frac{e^{2k}\cdot(2k-1)}{4k^2}$<br>$A''(k) = \frac{e^{2k}\cdot(2k^2-2k+1)}{2k^3}$<br>Da $k > 0$, ist diese 2. Ableitung stets positiv, denn die zur Klammer gehörende quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen. Also ist der Flächeninhalt bei $k = 0{,}5$ minimal. Er hat den Wert $\frac{e}{2}$.<br>*Hinweis. Hier sind auch andere Begründungen möglich.* | | 5 | 10 |
| g) | Die Parallelen bilden ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{e^{k-1}}{k}$ und $e^k$. Dessen Flächeninhalt beträgt $A_R(k) = \frac{e^{2k-1}}{k}$ Dann folgt für das Verhältnis:<br>$A(k) : A_R(k) = \frac{e}{4}$. Dieser Wert ist von $k$ unabhängig. | | 5 | 5 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 55 | 25 |

**LA/AG 1**

## II.1 Geradenscharen

Gegeben sind eine Ebene $E$ und zwei Geradenscharen $g_a$ und $h_a$:

$$E: x_1 + 2x_2 = 3$$

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a-1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie ein $a$, für das $g_a$ parallel zu $E$ ist.
Untersuchen Sie, ob diese Gerade $g_a$ in der Ebene $E$ liegt.
Berechnen Sie allgemein für alle $a \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt von $g_a$ und $E$.

b) Ermitteln Sie diejenige Gerade $g_a$, die $E$ senkrecht schneidet.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $g_a$ und $h_a$ in Abhängigkeit von $a$.
Beschreiben Sie, wie Sie ausgehend von den Richtungsvektoren von $g_a$ und $h_a$ eine Koordinatenform einer Ebene $F_a$ ermitteln können, die $g_a$ und $h_a$ enthält.
Bestimmen Sie eine Koordinatenform von $F_a$.
Mögliches Ergebnis: $F_a: 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$

d) Zeigen Sie, dass eine der Ebenen $F_a$ die $x_1$-$x_2$-Ebene senkrecht schneidet und geben Sie den zugehörigen Wert $a$ an.
Bestimmen Sie den Schnittwinkel dieser Ebene $F_a$ mit $E$.

e) Bestimmen Sie die prinzipielle Lage aller Geraden, die sowohl zu $E$ als auch zu $F_{-2}$ parallel sind und die außerdem den gleichen Abstand zu diesen beiden Ebenen haben.
Ermitteln Sie eine dieser Geraden.

## Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

<u>Berechnung von $a$:</u>

Die Gerade $g_a$ ist parallel zu $E$, wenn ein Normalenvektor von $E$ orthogonal zu einem Richtungsvektor von $g_a$ ist.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow a+2+2a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$$

Die Gerade $g_{-\frac{2}{3}}$ liegt in der Ebene $E$, denn der Stützpunkt von $g_a$ erfüllt unabhängig von $a$ die Ebenengleichung.

<u>Berechnung des Schnittpunkts:</u>

Die eben genannte Begründung hat auch zur Folge, dass der Stützpunkt von $g_a$ zugleich der gesuchte Schnittpunkt ist. Für $a=-\frac{2}{3}$ liegt die Gerade ja in der Ebene $E$.
Alternativ kann natürlich auch die Geradendarstellung in die Koordinatenform von $E$ eingesetzt werden:
$1+ra+2(1+r(1+a))=3 \Leftrightarrow 1+ra+2+2r+2ra=3 \Leftrightarrow r(2+3a)=0$ .
Der Wert $a=-\frac{2}{3}$ ist ausgeschlossen (s.o.). Somit bestimmt $r = 0$ den Schnittpunkt $S(1 \mid 1 \mid a)$, der der Stützpunkt der Geraden ist.

</td><td>20</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Gerade $g_a$ schneidet die Ebene genau dann senkrecht, wenn ein Richtungsvektor der Geraden parallel zu einem Normalenvektor von $E$ ist.

Für die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}$ ist diese Bedingung nur mit $a = 1$ erfüllbar, d.h. $g_1$ ist die senkrecht schneidende Gerade.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Zur Berechnung des Schnittpunktes der Geraden kann die Gleichung

$$\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}a\\1+a\\1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\a-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1+a & -1 & 1\\1-a & 1 & -1\end{array}\right)$$

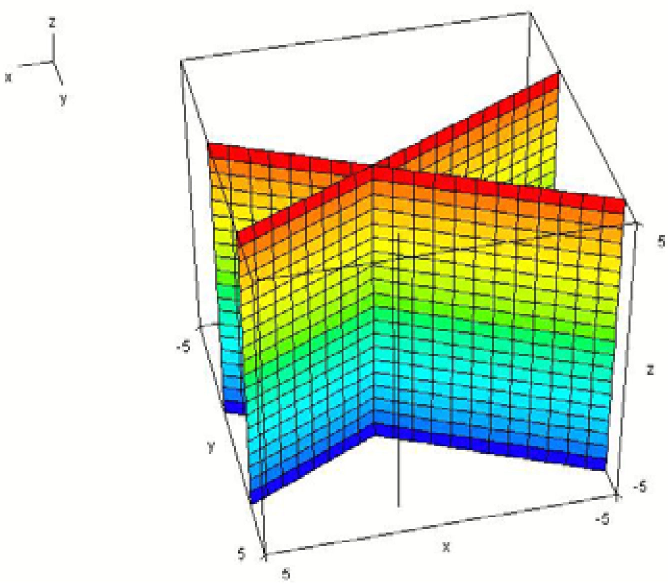
gelöst werden. Entweder die Lösung $r=0 \wedge s=-1$ fällt sofort ins Auge oder es ist noch eine Umformung des LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1+a & -1 & 1\\1-a & 1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{c}II-I\\\rightarrow\\III+I\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\rightarrow\\III-II\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}a & -2 & 2\\1 & 1 & -1\\0 & -2 & 2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{c}r=0\\s=-1\end{array}$$

notwendig. Der Schnittpunkt ist also $T(1 \mid 1 \mid a)$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Die Geraden sind für keinen Wert von $a$ identisch, denn ihre Richtungsvektoren sind für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig (nicht kollinear).<br><br>
<u>Lösungsweg 1:</u><br><br>
Orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren ist jeder Normalenvektor der Ebene $F_a$, in der $g_a$ und $h_a$ liegen. Ein solcher Normalenvektor lässt sich z.B. als<br>
Vektorprodukt ermitteln: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)+(1+a) \\ (-a)-2(1-a) \\ 2(1+a)-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 2+a \end{pmatrix}$.<br><br>
Durch Multiplikation mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ erhält man die fehlende rechte<br>
Seite der Koordinatenform: $F_a: 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$.<br><br>
<u>Lösungsweg 2:</u><br><br>
Aufstellen der Parameterform der Ebene $F_a$ ausgehend vom Schnittpunkt $T$:<br><br>
$F_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad r,s \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$.<br><br>
Umformen in Koordinatenform ergibt z.B.:<br>
$\begin{array}{lll} I\ x_1 = & 1 + r \cdot a + 2s & 2 \cdot II - I \\ II\ x_2 = & 1 + r \cdot (1+a) + s & \rightarrow \\ III\ x_3 = & a + r \cdot (1-a) - s & 2 \cdot III + I \end{array} \quad \begin{cases} 2x_2 - x_1 = & 1 + r \cdot (2+a) \\ 2x_3 + x_1 = & 1 + 2a + r \cdot (2-a) \end{cases}$<br><br>
Weitere Umformungen führen schließlich auf die Koordinatenform der Ebene:<br>
$\begin{array}{ll} (2x_2 - x_1) \cdot (2-a) - (2x_3 + x_1) \cdot (2+a) & = 2 - a - (1+2a) \cdot (2+a) \\ (4-2a)x_2 - 2x_1 + ax_1 + (-4-2a)x_3 - 2x_1 - ax_1 & = -6a - 2a^2 \\ -4x_1 + (-2a+4)x_2 + (-2a-4)x_3 & = -6a - 2a^2 \,\big|\, :(-2) \end{array}$<br>
$\Rightarrow F_a: 2x_1 + (a-2)x_2 + (2+a)x_3 = 3a + a^2$.
</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Die $x_1$-$x_2$-Ebene wird genau dann senkrecht geschnitten, wenn die Normalenrichtung von $F_a$ parallel zur $x_1$-$x_2$-Ebene ist.<br><br>
Das ist nur für $a = -2$ der Fall: $F_{-2}: 2x_1 - 4x_2 = -2$.<br><br>
Ausgehend von zwei Normalenvektoren der Ebenen wird der Winkel berechnet.<br><br>
$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \dfrac{6}{\sqrt{100}} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$.<br><br>
Der Schnittwinkel der Ebenen $E$ und $F_{-2}$ beträgt etwa 53,1°.
</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| e) | Die Ebenen $E$ und $F_{-2}$ sind parallel zur $x_3$-Achse oder – äquivalent – senkrecht zur $x_1$-$x_2$-Ebene. Ebenso müssen also die gesuchten Geraden verlaufen.<br><br>Die beiden Ebenen $E$ und $F_{-2}$ schneiden die $x_1$-$x_2$-Ebene in zwei Geraden $l_1$ und $l_2$, die miteinander den in Teil d) berechneten Winkel $\alpha$ einschließen. Alle Geraden in Richtung der $x_3$-Achse, die durch eine der beiden Winkelhalbierenden von $l_1$ und $l_2$ verlaufen, haben die gewünschten Eigenschaften.<br><br>Interpretiert man die Koordinatenformen von $E$ und $F_{-2}$ mit $x_3 = 0$ als Geradengleichungen, so erhält man $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$.<br><br>Diese beiden Geraden haben als Winkelhalbierende in der $x_1$-$x_2$-Ebene die Geraden $x_2 = 1$ und $x_1 = 1$. Damit sind auch die beiden Ebenen beschrieben, in denen die gesuchten Geraden verlaufen müssen.<br><br>Beispielgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$.<br><br>*Abbildung mit den Ebenen E und $F_{-2}$ sowie der Beispielgeraden (nicht verlangt).*<br><br><br> | | | 20 |
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 55 | 20 |

**LA/AG 2**

## II.2 Sonnensegel

Über einer Terrasse soll ein dreieckiges Sonnensegel angebracht werden. Die rechteckige Terrasse kann mathematisch in der $x_1$-$x_2$-Ebene durch die Eckpunkte $T_1$ (0 | 0 | 0), $T_2$ (4 | 0 | 0), $T_3$ (4 | 8 | 0) und $T_4$ (0 | 8 | 0) beschrieben werden (1 LE $\hat{=}$ 1 m).
Die Terrasse wird an einer Seite durch eine Hauswand ( $x_1 = 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ) und an einer anderen Seite durch eine Mauer ( $x_1 \geq 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0$ ) begrenzt.
Im Punkt $A$ (0 | 8 | 3) wird das Sonnensegel an der Wand befestigt und im Punkt $B$ (1 | 0 | 2) an der Mauer. Im Punkt $C$ (4 | 4,5 | 2) wird das Sonnensegel an einer senkrechten Stütze am Terrassenrand angebracht. Die drei Befestigungspunkte $A$, $B$ und $C$ sind zugleich die Eckpunkte des dreiecksförmigen Sonnensegels.

a) Zeichnen Sie die Terrasse und das Sonnensegel in das beigefügte Koordinatensystem ein.

b) Das Sonnensegel soll die Form eines gleichschenkligen Dreiecks haben.

Zeigen Sie, dass diese Forderung mit dem oben gegebenen Punkt $C$ erfüllt ist.

Untersuchen Sie, ob diese Forderung auch mit anderen Punkten $C$ erfüllt werden kann, wobei $C$ weiterhin am Rand der Terrasse gegenüber der Hauswand liegen soll, und beschreiben Sie gegebenenfalls, wie Sie alle weiteren Möglichkeiten für einen solchen Punkt bestimmen können. Die Rechnungen sollen Sie nicht durchführen.

c) Bestimmen Sie die Fläche des Sonnensegels.

d) Bestimmen Sie den Winkel, den das Sonnensegel zur Horizontalen einnimmt.

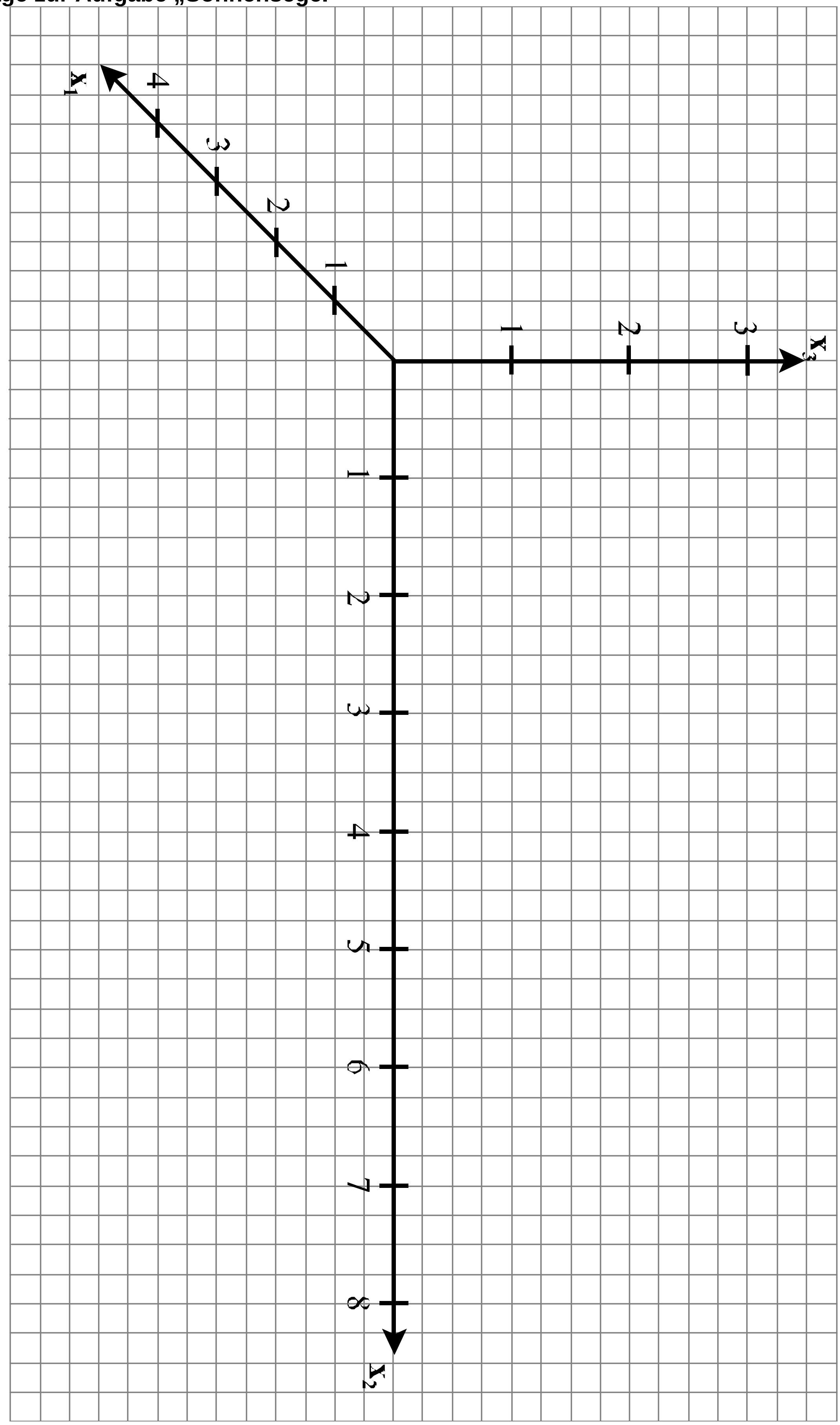
e) Paralleles Sonnenlicht strahlt zu einem festen Zeitpunkt in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Der Schatten des Sonnensegels auf dem Terrassenboden ist ein Vieleck. Zwei Eckpunkte des Schattens sind $S_1$ (1,17 | 0 | 0) und $S_2$ (0,33 | 0 | 0).

Bestimmen Sie alle weiteren Eckpunkte des Schattens und zeichnen Sie den Schatten in das Koordinatensystem ein.
Geben Sie bitte die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen *(cm)* gerundet an.

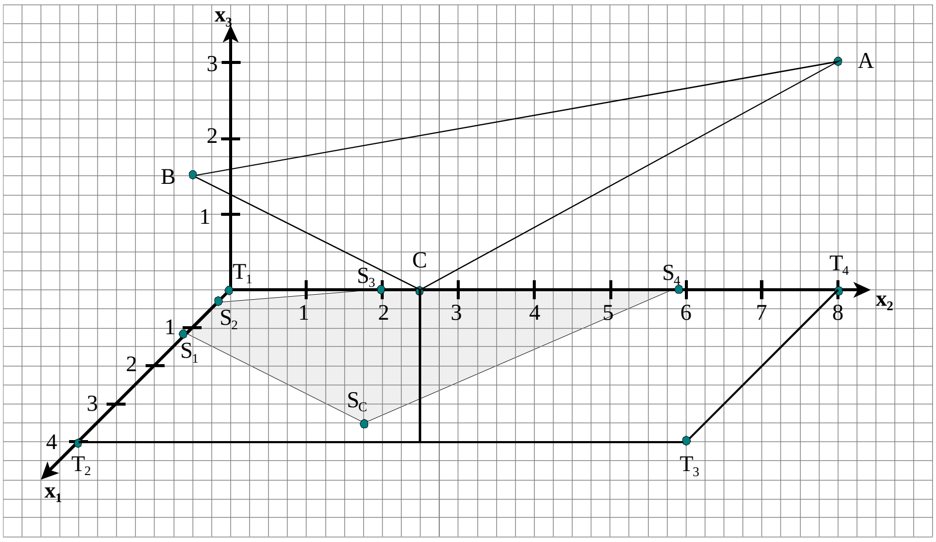
Beschreiben Sie Form und Lage der Schatten des Sonnensegels auf der Hauswand und auf der Mauer.

## Anlage zur Aufgabe „Sonnensegel“



## Erwartungshorizont

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung,<br>Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>




*Siehe auch die Anlage mit der Lösungsschablone.*</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

<u>Dreieck *ABC* ist gleichschenklig:</u>

Hier sind die Kanten *CA* und *CB* gleich lang:

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3,5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{29,25} \approx 5,41 \quad \text{und} \quad \left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4,5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{29,25}$$

*Die Kante AB ist etwa 8,12 m lang.*

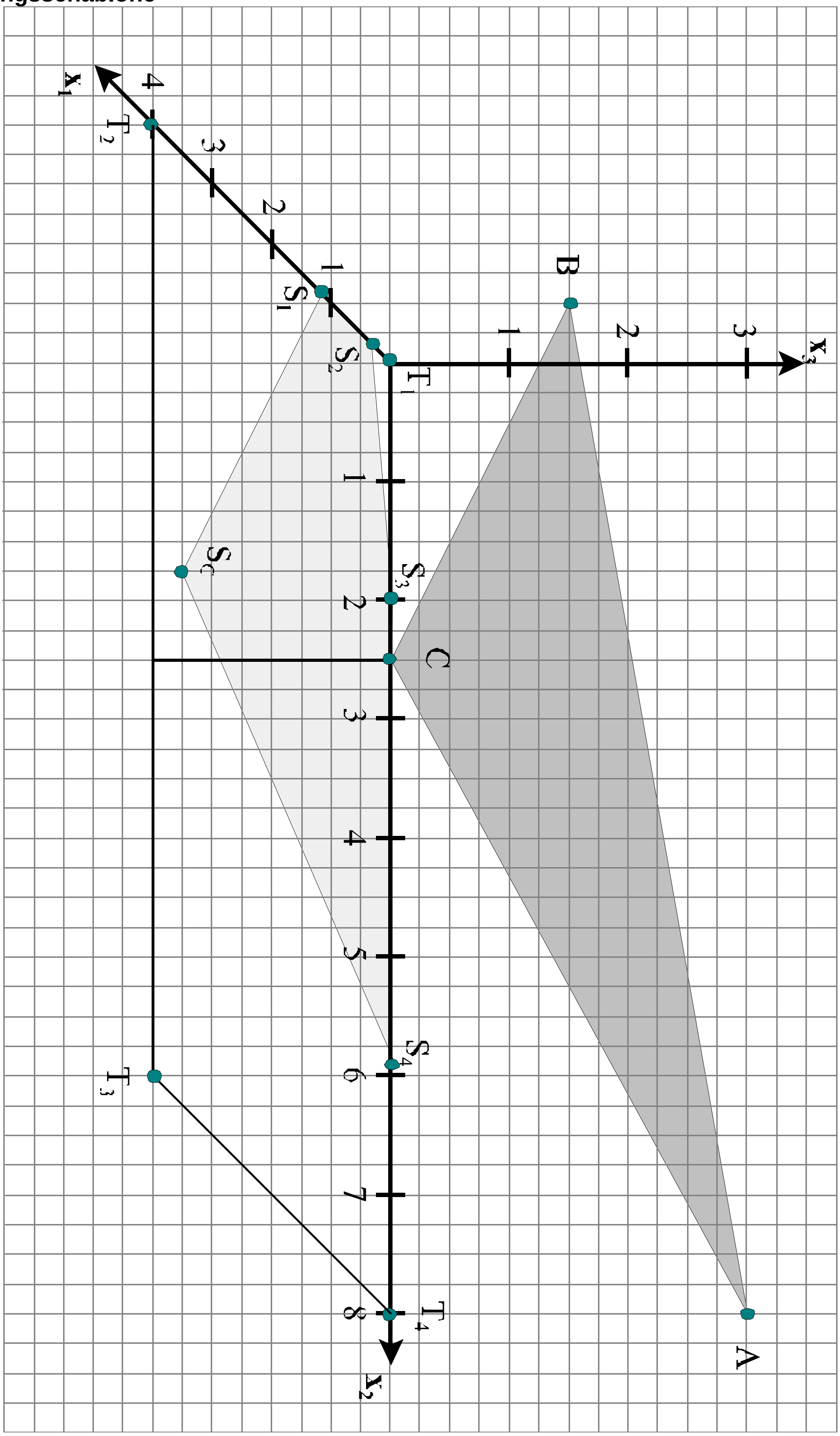
<u>Untersuchung, ob weitere Lösungen existieren:</u>

Für ein gleichschenkliges Dreieck *ABC* kann es 3 Möglichkeiten geben:<br>
i) Die Kanten *AB* und *AC* sind gleichlang.<br>
ii) Die Kanten *BC* und *AC* sind gleichlang.<br>
iii) Die Kanten *AB* und *CB* sind gleichlang.<br>
Die Forderung der Gleichschenklichkeit kann auch von anderen Stützpunkten *C* erfüllt werden.<br>
Von *C* ist die $x_1$-Koordinate (= 4) gegeben. Legt man auch die Höhe des Stützpunktes fest (z.B. $x_3 = 2$), so gibt es genau zwei weitere Möglichkeiten, andernfalls unendlich viele.<br>
Man erhält eine Lösung, wenn man die Kantenlängen etwa von i) berechnet und gleichsetzt. Dabei ist $C\,(4 \mid x_2 \mid 2)$ bzw. $C(4 \mid x_2 \mid x_3)$.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

| | **Lösungsskizze** | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| c) | <u>1. Lösungsmöglichkeit:</u><br>Nach b) ist die Kante $AB$ die Basis des gleichschenkligen Dreiecks, der Fußpunkt der Höhe auf der Basis also der Mittelpunkt der Basis: $H\,(0{,}5 \mid 4 \mid 2{,}5)$.<br>Die Länge der Höhe ist $\sqrt{12{,}75}$, die Länge der Basis $\sqrt{66}$, denn<br>$\left\lvert\overrightarrow{HC}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}4\\4{,}5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}5\\4\\2{,}5\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}3{,}5\\0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{12{,}75}$ und $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}1\\-8\\-1\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{66}$<br>Das Flächenmaß ist daher $F_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{66}\cdot\sqrt{12{,}75} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{841{,}5} \approx 14{,}50$<br><u>2. Lösungsmöglichkeit</u> (Berechnung mit Hilfe des Kreuzproduktes):<br>$F_{ABC} = \frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\begin{pmatrix}-1\\8\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4{,}5\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\begin{pmatrix}-4{,}5\\3\\-28{,}5\end{pmatrix}\right\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{841{,}5} \approx 14{,}50$.<br>Das Flächenmaß des Sonnensegels beträgt etwa 14,50 $m^2$. | | 15 | |
| d) | Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Ein Normalenvektor zur horizontalen Ebene ist $\vec{n}_H = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Die Ebene $E$ des Sonnensegels wird durch die Punkte $A$, $B$ und $C$ aufgespannt. Ein Normalenvektor $\vec{n}$ von $E$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren von $E$, also muss gelten:<br>$\vec{n}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0 \wedge \vec{n}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow n_1 - 8n_2 - n_3 = 0 \wedge 4n_1 - 3{,}5n_2 - n_3 = 0$.<br>Ein Normalenvektor von $E$ ist damit z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-19\end{pmatrix}$.<br>Den Winkel zwischen den Normalenvektoren erhält man aus:<br>$\cos\alpha = \frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{n}_H\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{n}_H\rvert} \Leftrightarrow \cos\alpha = 0{,}9825\ldots \Rightarrow \alpha \approx 10{,}7°$.<br>Der Winkel zwischen dem Sonnensegel und der Horizontalen beträgt also etwa 10,7°. | | 15 | |
| e) | Eine Lösungsmöglichkeit ist:<br>Es werden zunächst die Schattenpunkte von $A$, $B$ und $C$ auf der $x_1$-$x_2$-Ebene ohne Berücksichtigung der Hauswand bzw. Mauer bestimmt, da sich die Schattenfläche auf der Terrasse durch die Wände nicht verändert. Die Schattenpunkte ergeben sich als Schnittpunkte der Lichtgeraden durch die Eckpunkte des Sonnensegels mit der $x_1$-$x_2$-Ebene. Beispielrechnung für den Schattenpunkt $S_A$ von $A$: | | | |

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | Lichtgerade durch $A$: $g_A$: $\vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}$.<br>Der Schnitt mit der $x_1$-$x_2$-Ebene ($x_3=0$) ergibt mit<br>$\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=\frac{3}{4}\wedge x_1=-0{,}75\wedge x_2=6{,}5$ den Schattenpunkt von $A$:<br>$S_A(-0{,}75 \mid 6{,}5 \mid 0)$. (Liegt nicht auf der Terrasse!)<br>Entsprechend werden die Schattenpunkte von $B$ und $C$ bestimmt:<br>$S_B(0{,}5 \mid -1 \mid 0)$ (liegt nicht auf der Terrasse!),<br>$S_C(3{,}5 \mid 3{,}5 \mid 0)$ (liegt auf der Terrasse!).<br>Da nur $S_C$ auf der Terrasse liegt, müssen noch die Eckpunkte auf der $x_1$- und $x_2$-Achse bestimmt werden:<br>$S_1(1{,}17 \mid 0 \mid 0)$ und $S_2(0{,}33 \mid 0 \mid 0)$ ergeben sich als Schnittpunkte der $x_1$-Achse mit der Geraden durch $S_C$ und $S_B$ bzw. der Geraden durch $S_B$ und $S_A$ und sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben.<br>Bestimmung des Schnittpunktes $S_3$ der $x_2$-Achse mit der Geraden durch $S_B$ und $S_A$:<br>Gerade durch $S_B$ und $S_A$: $g_{SBA}$: $\vec{x}=\vec{s}_B+r\cdot(\vec{s}_A-\vec{s}_B)=\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1{,}25\\7{,}5\\0\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}$.<br>Der Schnitt mit der $x_2$-Achse ergibt mit<br>$\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1{,}25\\7{,}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=0{,}4\wedge x_2=2$ den Punkt $S_3(0 \mid 2 \mid 0)$.<br>Entsprechend wird $S_4$ als Schnittpunkt der $x_2$-Achse mit der Geraden durch $S_A$ und $S_C$ bestimmt zu $S_4(0 \mid 5{,}97 \mid 0)$.<br>Die Schattenfläche ist also ein unregelmäßiges Fünfeck, das durch die Eckpunkte $S_C$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ und $S_4$ beschrieben wird. (Zeichnung siehe Teil a) und Anlage.)<br><u>Form und Lage der Schatten:</u><br>Da sich der Punkt $A$ auf der Hauswand befindet, also gleich seinem Schattenpunkt ist, bildet er mit $S_3$ und $S_4$ einen dreieckigen Schatten auf der Wand.<br>Ebenso liegt der Punkt $B$ auf der Mauer, so dass er mit $S_1$ und $S_2$ ebenfalls einen dreieckigen Schatten auf der Mauer bildet. | 10 | 10 | 20 |
| | Insgesamt 100 BWE | 20 | 60 | 20 |

## Lösungsschablone



**Stochastik 1**

## III.1 Zufallszahlen

Ein Zufallsexperiment liefert Zufallsziffern von 0 bis 9 gleichverteilt mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{10}$ für jede Ziffer. Das Zufallsexperiment werde 100-mal unabhängig wiederholt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 genau 10-mal erscheint.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 6 mehr als 14-mal erscheint.

Otto hat ein neues Computerprogramm erhalten, von dem der Programmierer behauptet, dass jeder Programmdurchlauf 100 Zufallsziffern (von 0 bis 9) jeweils gleichverteilt und unabhängig erzeugt. Nachdem er mit dem Programm etwas gespielt hat, ist er skeptisch, ob das Programm das leistet, was es verspricht.

Otto interessiert nur die Häufigkeit der Sechsen, weil er dieses Programm für ein Glücksspiel benutzen will. Auf keinen Fall dürfen zu viele Sechsen fallen. Er vermutet aber, dass dies der Fall ist.

Es soll im Weiteren angenommen werden, dass die Realisierung der einzelnen Zufallsziffern zumindest voneinander stochastisch unabhängig ist.

c) Otto will seine Vermutung (Hypothese), dass zu viele Sechsen vom Computer ausgegeben werden, mit einem Hypothesentest auf dem 5%-Niveau signifikant nachweisen. Als Nullhypothese wählt er die Annahme, dass die Ziffer 6 jeweils – wie vom Programmierer behauptet – mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ erscheint.

   Beschreiben Sie, wie Otto vorgehen sollte, und ermitteln Sie zu Ihrem Test unter der Annahme der Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art).
   Warum lässt sich unter der Annahme der Alternativhypothese keine sinnvolle Aussage machen über die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich nicht verworfen wird (Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art)? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Otto führt den Test durch, erhält aber kein signifikantes Ergebnis. Was bedeutet dies und welche Schlussfolgerungen kann er daraus ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten.

Otto überlegt, ob die Behauptung des Programmierers nicht doch zutrifft. Er versucht daher, mit hoher Sicherheit zu begründen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs zumindest kleiner als 0,12 ist. Dazu will er hintereinander 50 Programmdurchläufe durchführen und wieder die Gesamtanzahl der Sechsen auswerten.

e) Bestimmen Sie dazu einen Hypothesentest auf dem 1%-Niveau.

   Interpretieren Sie den Fall, dass auch hier kein signifikantes Ergebnis auftritt.

## Anlage zur Aufgabe „Zufallszahlen“

### Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $n = 100$

| k \ p | 0,1 | $\frac{1}{6}$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | $\frac{1}{3}$ | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **1** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **2** | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **3** | 0,008 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **4** | 0,024 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **5** | 0,058 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **6** | 0,117 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **7** | 0,206 | 0,004 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **8** | 0,321 | 0,010 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **9** | 0,451 | 0,021 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **10** | 0,583 | 0,043 | 0,006 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **11** | 0,703 | 0,078 | 0,013 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **12** | 0,802 | 0,130 | 0,025 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **13** | 0,876 | 0,200 | 0,047 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **14** | 0,927 | 0,287 | 0,080 | 0,005 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **15** | 0,960 | 0,388 | 0,129 | 0,011 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **16** | 0,979 | 0,494 | 0,192 | 0,021 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **17** | 0,990 | 0,599 | 0,271 | 0,038 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **18** | 0,995 | 0,696 | 0,362 | 0,063 | 0,005 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| **19** | 0,998 | 0,780 | 0,460 | 0,100 | 0,009 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| **20** | 0,999 | 0,848 | 0,559 | 0,149 | 0,016 | 0,002 | 0,000 | 0,000 |
| **21** | 1,000 | 0,900 | 0,654 | 0,211 | 0,029 | 0,005 | 0,000 | 0,000 |
| **22** | 1,000 | 0,937 | 0,739 | 0,286 | 0,048 | 0,009 | 0,000 | 0,000 |
| **23** | 1,000 | 0,962 | 0,811 | 0,371 | 0,076 | 0,016 | 0,000 | 0,000 |
| **24** | 1,000 | 0,978 | 0,869 | 0,462 | 0,114 | 0,028 | 0,001 | 0,000 |
| **25** | 1,000 | 0,988 | 0,913 | 0,553 | 0,163 | 0,046 | 0,001 | 0,000 |
| **26** | 1,000 | 0,994 | 0,944 | 0,642 | 0,224 | 0,071 | 0,002 | 0,000 |
| **27** | 1,000 | 0,997 | 0,966 | 0,722 | 0,296 | 0,107 | 0,005 | 0,000 |
| **28** | 1,000 | 0,999 | 0,980 | 0,792 | 0,377 | 0,152 | 0,008 | 0,000 |
| **29** | 1,000 | 0,999 | 0,989 | 0,850 | 0,462 | 0,209 | 0,015 | 0,000 |
| **30** | 1,000 | 1,000 | 0,994 | 0,896 | 0,549 | 0,277 | 0,025 | 0,000 |

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| a) | Der Tabelle entnimmt man: $B(\frac{1}{10},100,10) \approx 0{,}132$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs genau 10-mal erscheint, ca. 13 %. | 10 | | |
| b) | Der Tabelle entnimmt man: $1-\sum_{i=0}^{14} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}073$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 stochastisch unabhängig voneinander durchgeführten Versuchen die Sechs mehr als 14-mal erscheint, ca. 7,3 %. | 10 | | |
| c) | Man sollte die Hypothese $H_0$: $p = 0{,}1$ gegen die Hypothese $H_1$: $p > 0{,}1$ rechtsseitig testen. Aus b) wissen wir $1-\sum_{i=0}^{14} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}073$. Wir berechnen außerdem: $1-\sum_{i=0}^{15} B(\frac{1}{10},100,i) \approx 0{,}04$. Aus diesen Ergebnissen folgt, dass man den Ablehnungsbereich für die Nullhypothese so wählen sollte, dass sie abgelehnt wird, wenn die Anzahl der Sechsen größer als 15 ausfällt, und dass die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art ca. 4 % beträgt, also insbesondere kleiner als 5 % ist. Über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art lässt sich deshalb keine Aussage machen, weil $H_1$ sich aus vielen (sogar kontinuierlich unendlich vielen) Fällen zusammensetzt ($H_1$ ist eine zusammengesetzte Hypothese). *Bemerkung: Die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art wäre umso größer, je näher die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Sechs bei 10 % liegt.* | | 25 | 5 |
| d) | Otto hat bei seinem Versuch also zu wenig (weniger als 16) Sechsen erhalten. Bei diesem Ausgang lässt sich über die interessierende Wahrscheinlichkeit für das einzelne Auftreten einer Sechs gar keine begründete Aussage machen, insbesondere ist aus dem Testergebnis die Aussage jetzt nicht zu begründen, dass der Zufallszahlen-Generator in Bezug auf das Auftreten der Sechs die Anforderungen erfüllt *(und zwar hauptsächlich deshalb nicht, weil sich keine Aussage über die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art machen lässt (vgl. c)).* | | 15 | |

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Otto sollte nun die Hypothese $H_0$: $p = 0{,}12$ gegen die Hypothese $H_1$: $p < 0{,}12$ linksseitig testen.<br><br>
Die Anzahl $X$ der Sechsen ist unter der Annahme $H_0$ annähernd normalverteilt mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.<br><br>
Mit $n = 5000$ und $p = 0{,}12$ erhält man: $\mu = 600$ und $\sigma = \sqrt{528}$.<br><br>
Die Zufallsvariable $N = \frac{X - 600 + 0{,}5}{\sqrt{528}}$ ist also (annähernd) standard-normal-verteilt.<br><br>
Wir lösen mit Hilfe der Tabelle der Normalverteilung die Gleichung $P(N < -x) = 0{,}01$ bzw. $P(N < x) = 0{,}99$ und erhalten: $x \approx 2{,}33$.<br><br>
Um eine Grenze $m$ für den Ablehnungsbereich zu finden, lösen wir die Gleichung $\frac{m - 600 + 0{,}5}{\sqrt{528}} = -2{,}33$ Also $m \approx 545{,}96$.<br><br>
Für $X \le 545$ gilt also mit absteigender Grenze zum ersten Mal:<br>
$P(X \le 545) \le 0{,}01$.<br><br>
Wenn weniger als 546 Sechsen vom Computer simuliert werden, sollte also die Hypothese $H_0$ verworfen werden.<br><br>
Wenn jetzt keine Signifikanz vorliegt, wenn also mehr 545 Sechsen simuliert werden, könnte man das Ergebnis wieder unter der Perspektive von Aufgabenteil c) betrachten und fragen, ob denn jetzt die Hypothese $H_0$, dass der Zufallsgenerator exakt das tut, was versprochen wurde, verworfen werden kann.<br><br>
Dies entspricht zwar nicht der „reinen Lehre“, aber gängiger Praxis.<br><br>
Eigentlich sollte die Testplanung immer <u>vor</u> Durchführung der Stichprobenziehung erfolgen!<br><br>
Die Anzahl $Y$ der Sechsen ist unter der Annahme $H_0$ (aus Teil c)) wieder annähernd normal-verteilt mit $\mu = 500$ und $\sigma = \sqrt{450}$.<br><br>
Mit einem Ablehnungsbereich $Y > 545$ kann die zugehörige Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art durch $P(Y > 545 \mid H_0)$ berechnet werden:<br><br>
$P(Y > 545 \mid H_0) = P(N > \frac{545 - 500 + 0{,}5}{\sqrt{450}}) \approx P(N > 2{,}14)$<br>
$= 1 - P(N \le 2{,}14) \approx 1 - 0{,}9838 \approx 1{,}6\,\%$.<br><br>
Dieser Wert ist so klein, dass auch im Fall von mehr als 545 simulierten Sechsen mit Signifikanz (zumindest auf dem 5%-Niveau) behauptet werden kann, dass der Zufallsgenerator mit mehr als 10 % Wahrscheinlichkeit im Einzelexperiment eine Sechs liefert und insofern für Otto unbrauchbar ist.
</td><td></td><td>20</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

**Stochastik 2**

## III.2 Fehlersuche

In der Reparaturabteilung einer großen Firma muss recht oft ein bestimmter defekter Gerätetyp wieder Instand gesetzt werden. Aus längerer Erfahrung ist bekannt, dass es nur 3 verschiedene Ursachenfelder gibt und dass ein Fehler im Bereich A mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %, ein Fehler im Bereich B mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % und ein Fehler im Bereich C mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % auftritt. Mehr als ein Fehler an ein- und demselben Gerät tritt (so gut wie) nie auf. Wenn man also einen Fehler gefunden und behoben hat, funktioniert das Gerät wieder.

Die Kosten der Instandsetzung (Fehlersuche und Reparatur) entstehen fast ausschließlich durch die Arbeitszeit, die für die Fehlersuche aufgebracht werden muss. Das Suchen nach der Fehlerquelle muss für die 3 möglichen Ursachenfelder nacheinander erfolgen, wobei die Reihenfolge frei wählbar ist. Die Kosten sind bei jedem Bereich unabhängig davon, ob der Fehler tatsächlich in diesem Bereich liegt oder nicht, und betragen 100 € für Bereich A, 10 € für Bereich B und 5 € für Bereich C. Die Fehlersuche ist bei jedem möglichen Ursachenfeld so gut, dass ein Übersehen des Fehlers nicht vorkommt; allerdings muss der Fehler im jeweiligen Bereich genau lokalisiert werden. Wenn also 2 Bereiche erfolglos durchsucht sind, muss der 3. Bereich auch durchsucht werden.

a) Es werde zuerst in der Reihenfolge A-B-C nach dem Fehler gesucht.

   Berechnen Sie für jeden der drei Fehlerursachen die Kosten, die bei der Suche entstehen.

   Berechnen Sie dann den Erwartungswert der Kosten, die bei dieser Fehlersuche entstehen. Bedenken Sie dabei, dass nicht weitergesucht werden muss, wenn man einen Fehler gefunden und behoben hat.

b) Bestimmen Sie nun für jede der weiteren fünf möglichen Suchreihenfolgen die zu erwartenden Suchkosten und geben Sie die kostengünstigste Suchreihenfolge und den zugehörigen Erwartungswert an.

c) Begründen Sie durch eine Plausibilitätsbetrachtung, warum man bei der Fehlersuche nicht mit A beginnen sollte, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler im Bereich A auftritt, doch bei weitem am größten ist.

Ein Mitarbeiter schlägt in Ergänzung des Verfahrens als ersten Schritt ein verkürztes Suchverfahren für den Bereich A vor, das nur noch 20 € kostet. Es findet allerdings nur die Hälfte der Fehler im Bereich A.
Wenn der Fehler in diesem ersten Schritt nicht gefunden wurde, dann soll mit dem bisherigen Verfahren in der Reihenfolge B-C-A weitergesucht werden.

d) Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass bei der verkürzten Suche in A der Fehler nicht gefunden wird, die drei bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Fehler bei A, B oder C liegt.

e) Begründen Sie, dass das neue Verfahren sinnvoll ist.

## Erwartungshorizont

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| a) | Wenn der Fehler bei A liegt, wird nur der Bereich A durchsucht und es entstehen 100 € Kosten.<br>Wenn der Fehler bei B liegt, wird erst der Bereich A und dann nur noch der Bereich B durchsucht und es entstehen 110 € Kosten.<br>Wenn der Fehler bei C liegt, werden alle drei Bereiche durchsucht und es entstehen 115 € Kosten.<br>Da die Wahrscheinlichkeiten für diese drei Fälle bekannt sind, kann man den Erwartungswert $K$ der Durchsuchungskosten ausrechnen:<br>$E(K) = 0{,}8 \cdot 100 + 0{,}15 \cdot 110 + 0{,}05 \cdot 115 = 102{,}25$ .<br>Wenn man also in der Reihenfolge A-B-C durchsucht, betragen die erwarteten Kosten (Erwartungswert) 102,25 €.<br>*<u>Bemerkung:</u> Man kann auch die Kosten nach den Bereichen trennen und als einzelne Zufallsvariable auffassen, die dann addiert werden.*<br>*Dann erhält man das gleiche Ergebnis auf folgende Weise:*<br>$E(K) = 1 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}05 \cdot 5 = 102{,}25$ . | 20 | | |
| b) | Für die 5 weiteren Reihenfolgen, erhält man entsprechen der Rechnung aus a) folgende Kostenerwartungswerte (in Euro):<br>ACB $100 + 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}15 \cdot 10 = 102{,}50$.<br>BAC $10 + 0{,}85 \cdot 100 + 0{,}05 \cdot 5 = 95{,}25$.<br>BCA $10 + 0{,}85 \cdot 5 + 0{,}8 \cdot 100 = 94{,}25$.<br>CAB $5 + 0{,}95 \cdot 100 + 0{,}15 \cdot 10 = 101{,}50$.<br>CBA $5 + 0{,}95 \cdot 10 + 0{,}8 \cdot 100 = 94{,}50$.<br>Die kostengünstigste Suchreihenfolge ist also BCA mit den erwarteten Kosten von 94,25 €. | 5 | 20 | |
| c) | Wenn man mit A beginnt, hat man zwar die größte Chance den Fehler im ersten Schritt zu finden, aber man hat auch mit Sicherheit die hohen Kosten von 100 €. Wenn man nicht mit A beginnt, kommt man in immerhin 20% der Fälle mit erheblich niedrigeren Kosten aus.<br>*<u>Bemerkung:</u> Hier sind sehr unterschiedliche Argumentationen denkbar, aber das obige Kernargument muss erkennbar sein.* | | 15 | |

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| d) | Es seien *A, B* und *C* die Ereignisse, dass der Fehler in dem entsprechenden Bereich liegt. *N* sei das Ereignis, in der Voruntersuchung den Fehler nicht zu finden.<br>Gesucht sind: $P(A\|N)$ , $P(B\|N)$ , $P(C\|N)$ .<br><u>Lösung mit dem Satz von Bayes:</u> $P(A\|N)=\frac{P(A)\cdot P(N\|A)}{P(N)}=\frac{0,8\cdot 0,5}{0,6}=\frac{2}{3}$.<br>Wenn man den Wert von *P(N)* nicht sofort sieht, kann man den Nenner oben natürlich auch stur nach Bayes (bzw. dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit) wie folgt ausrechnen:<br>$P(N)=P(A)\cdot P(N\|A)+P(B)\cdot P(N\|B)+P(C)\cdot P(N\|C)$<br>$=0,8\cdot 0,5+0,15\cdot 1+0,05\cdot 1=0,6$<br>Entsprechend erhält man:<br>$P(B\|N)=\frac{P(B)\cdot P(N\|B)}{P(N)}=\frac{0,15\cdot 1}{0,6}=\frac{1}{4}$<br>$P(C\|N)=\frac{P(C)\cdot P(N\|C)}{P(N)}=\frac{0,05}{0,6}=\frac{1}{12}$<br><u>Lösung mit idealisierter Simulation:</u><br>Wir führen gedanklich das ganze Zufallsexperiment z. B. 100-mal durch und verteilen die relativen Häufigkeiten exakt wie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.<br>Von den 100 Geräten wird bei 40 der Fehler bereits in der Voruntersuchung gefunden und 60 durchlaufen die bisherige Untersuchung: *P(N)* = 0,6.<br>Da 80 der 100 Geräte den Fehler im Bereich A auf weisen, der bei 40 aber bereits in der Voruntersuchung entdeckt wurde, weisen noch 40 diese Fehlerart auf. Daher ist $P(A\|N)=\frac{P(A\cap N)}{P(N)}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$.<br>15 der Geräte weisen den Fehler im Bereich B und 5 im Bereich C auf, und somit gilt $P(B\|N)=\frac{P(B)}{P(N)}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$ und $P(C\|N)=\frac{P(C)}{P(N)}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$, denn Fehler in den Bereichen *B* und *C* werden .von der Voruntersuchung nicht erfasst. | | 20 | |

| | Lösungsskizze | Zuordnung, Bewertung | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |

e) 1. Lösungsweg:

Es entstehen mit Sicherheit die Kosten der Voruntersuchung von 20 €.

Zusätzlich entstehen mit 60% Wahrscheinlichkeit, die Kosten der Hauptuntersuchung, für die wir den bedingten Erwartungswert einsetzen, d.h. für die einzelnen Fälle verwenden wir die in d) berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Da die Untersuchungsreihenfolge B-C-A ist, gilt für die erwarteten Zusatzkosten entsprechend der Rechnungen in b) (in Euro):

$$E(Z) = 10 + \frac{3}{4}\cdot 5 + \frac{2}{3}\cdot 100 \approx 80,42\ .$$

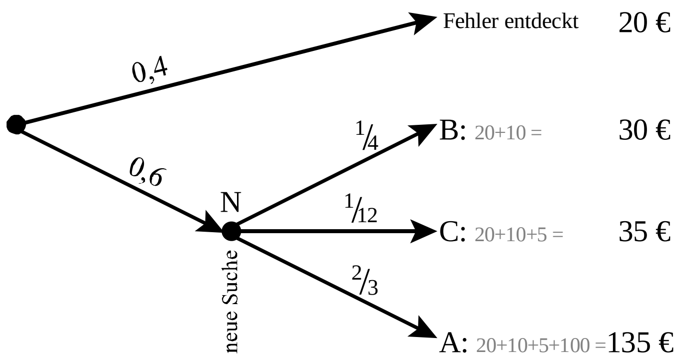
Insgesamt sind also Kosten von 68,25 € beim modifizierten Verfahren zu erwarten:

$$E(K) \approx 20 + 0,6\cdot 80,42 \approx 68,25\ .$$

*Rechnet man hier mit dem exakten Wert von E(Z), so ergibt sich E(K) = 68,25.*

2. Lösungsweg:

Wir betrachten das folgende Baumdiagramm:




Dann gilt: $E(K) = 0,4\cdot 20 + 0,15\cdot 30 + 0,05\cdot 35 + 0,4\cdot 135 = 68,25$.

Die erwarteten Kosten sind also noch deutlich geringer als das in b) bestimmte Minimum.

20

| | | I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| | Insgesamt 100 BWE | 25 | 55 | 20 |