



Schriftliche Abiturprüfung  
Schuljahr 2005/2006

---

**Leistungskurs Mathematik**

**Gesamtschulen und Gymnasien**

**Aufgabensatz - ZWEITTERMIN**

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

---

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

---

**Diese Unterlagen enthalten:**

- 1 Allgemeines
- 2 Rückmeldebogen
- 3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
- 4 Hinweise zum Korrekturverfahren
- 5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

---

## 1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **330 Minuten** einschließlich Lesezeit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

## 2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

*Bitte umgehend ausfüllen und an B 3-1 faxen!*

Behörde für Bildung und Sport  
B 3-1

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren  
**in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung**

**Fach: Mathematik, Leistungskurs**    **Kurs-Nummer:** \_\_\_\_\_

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
I.3	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_

### 3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sieben** Aufgaben – **I.1, I.2, I.3** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
  - Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
  - Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
  - Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
  - Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.
- 

### 4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

## 5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

### Erwartungshorizont:

*Kursiv gedruckte Passagen* sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

### Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
$\geq 285$	$\geq 95\%$	15
$\geq 270$	$\geq 90\%$	14
$\geq 255$	$\geq 85\%$	13
$\geq 240$	$\geq 80\%$	12
$\geq 225$	$\geq 75\%$	11
$\geq 210$	$\geq 70\%$	10
$\geq 195$	$\geq 65\%$	9
$\geq 180$	$\geq 60\%$	8

Bewertungseinheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
$\geq 165$	$\geq 55\%$	7
$\geq 150$	$\geq 50\%$	6
$\geq 135$	$\geq 45\%$	5
$\geq 120$	$\geq 40\%$	4
$\geq 99$	$\geq 33\%$	3
$\geq 78$	$\geq 26\%$	2
$\geq 57$	$\geq 19\%$	1
$< 57$	$< 19\%$	0

**Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt**, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

**Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt**, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Schulchiffre		<b>BeBo EKo M</b>	
Fach	Mathematik	<b>Schüler- Nummer</b>	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								
<b>Bewertungstext</b>								
Notenpunkte →								

Schulchiffre		<b>BeBo ZKo M</b>	
Fach	Mathematik	<b>Schüler- Nummer</b>	
Kurstyp	LK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.3) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
Summe der BWE →								
<b>Bewertungstext</b>								
Notenpunkte →								

## ANALYSIS 1

### I.1 Bakterien

Ein Forschungslabor untersucht die antibiotische Wirkung einer Substanz auf Bakterien.

Dabei wird zunächst das Wachstum einer Bakterienkultur beobachtet, die zu Beginn der Beobachtung 1000 Bakterien hat. Jede Stunde nimmt die Anzahl der Bakterien um 25 % zu.

Dieser Wachstumsprozess soll durch eine Funktion  $N_1$  mit der Definitionsmenge  $D = \mathbb{R}^+$  beschrieben werden. Der (gerundete) Funktionswert  $N_1(t)$  sei die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt  $t$ , und  $t$  sei die Zeit in Stunden.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wachstumsfunktion  $N_1$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .
- Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien, die nach 8 Stunden in der Kultur vorhanden sind.

8 Stunden nach Beginn der Beobachtung wird eine Substanz zu den Bakterien hinzu gegeben. Ab diesem Zeitpunkt lässt sich die Anzahl der Bakterien durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$N_2(t) = 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2}, \quad t \geq 8.$$

*Hinweis: Es ist  $N_1(8) \approx N_2(8)$ .*

- Untersuchen Sie die Funktion  $N_2$  für  $t \geq 8$  hinsichtlich Extrem- und Wendepunkten.

*Hinweis: Sie können ohne Rechnung verwenden:*

$$N_2'''(t) = (-0,03087 + 0,0027 \cdot t + (0,343 - 0,03 \cdot t)^3) \cdot 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2}$$

- Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem unter den veränderten Bedingungen 1000 Bakterien in der Kultur vorhanden sind.

- Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen von  $N(t) = \begin{cases} N_1(t) & \text{für } t < 8 \\ N_2(t) & \text{für } t \geq 8 \end{cases}$ .

Untersuchen Sie die Funktion  $N$  an der Stelle  $t = 8$ .

- Beurteilen Sie abschließend, ob die Güte der Substanz den Anforderungen eines Antibiotikums gerecht wird.  
Ein Antibiotikum ist ein Medikament, das im Falle einer Erkrankung eine schnelle Reduzierung der Bakterienanzahl bewirken soll.

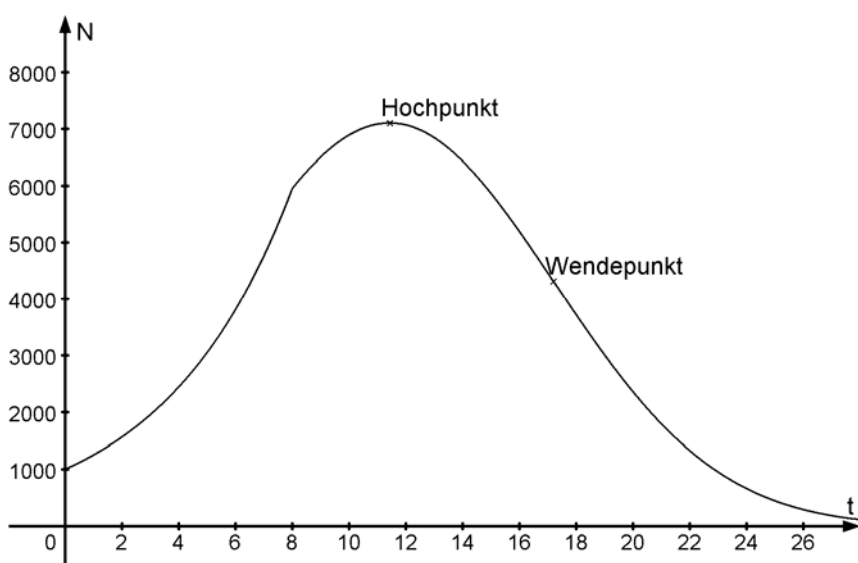
**Erwartungshorizont**

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Neben der Lösung <math>N_1(t) = 1000 \cdot 1,25^t</math> ist auch folgender Ansatz möglich:</p> $N_1(t) = a \cdot e^{k \cdot t}.$ <p>Wegen <math>N_1(0) = 1000</math> gilt <math>a = 1000</math>. Aus <math>e^k = 1,25</math> folgt <math>k = \ln 1,25 \approx 0,223</math>.</p> <p>Insgesamt ergibt sich: <math>N_1(t) \approx 1000 \cdot e^{0,223t}</math>.</p>		10	
b)	<p>Das Einsetzen für <math>t = 8</math> ergibt</p> $N_1(8) = 1000 \cdot 1,25^8 \approx 5960 \quad \text{oder} \quad N_1(8) \approx 1000 \cdot e^{0,223 \cdot 8} \approx 5954.$ <p><i>Der Funktionswert kann auch rekursiv mit Hilfe einer Wertetabelle berechnet werden</i></p>	5		
c)	$N_2(t) = 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2}.$ <p>Unter Anwendung der Kettenregel gilt:</p> $N_2'(t) = (0,343 - 0,03 \cdot t) \cdot 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2}.$ <p>Weitere Anwendung der Produkt- und Kettenregel erbringt:</p> $N_2''(t) = -0,03 \cdot 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2} + (0,343 - 0,03 \cdot t)^2 \cdot 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2}$ $N_2''(t) = (-0,03 + (0,343 - 0,03 \cdot t)^2) \cdot 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2}$ <p><u>Extremstelle:</u> Gesucht ist ein <math>t</math> mit <math>N_2'(t) = 0</math>.</p> $N_2'(t) = (0,343 - 0,03 \cdot t) \cdot 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2} = 0.$ <p>Da <math>1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2} &gt; 0</math> für alle <math>t</math>, folgt <math>0,343 - 0,03 \cdot t</math> muss 0 sein und somit</p> $t = \frac{0,343}{0,03} = 11,4\bar{3}.$ <p>Für die hinreichende Bedingung muss <math>t</math> in die zweite Ableitung eingesetzt werden: Auch hier ist der zweite Teil des Produkts größer als Null, so dass der Faktor <math>(-0,03 + (0,343 - 0,03 \cdot t)^2)</math> den Ausschlag für das Vorzeichen gibt.</p> <p>Durch Einsetzen von <math>t = 11,4\bar{3}</math> folgt <math>-0,03 + (0,343 - 0,03 \cdot t)^2 = -0,03</math>; denn <math>t</math> ist Nullstelle der inneren Klammer. Also liegt bei <math>t = 11,4\bar{3}</math> ein lokales Maximum. Mit <math>N_2(11,4\bar{3}) \approx 7105</math> ergibt sich der Hochpunkt (gerundet) <math>H(11,4 7105)</math>.</p>			



Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><u>Wendestelle:</u> Gesucht ist ein <math>t</math> mit <math>N_2''(t) = 0</math>.</p> <p>Analog zur Berechnung der Extremstelle ist nur zu berücksichtigen, dass <math>-0,03 + (0,343 - 0,03 \cdot t)^2 = 0</math> ist.</p> <p>Die Gleichung <math>(0,343 - 0,03 \cdot t)^2 = 0,03</math> hat die beiden Lösungen</p> $t_1 = \frac{343}{30} + \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{343}{30} - \frac{10\sqrt{3}}{3}.$ <p>Die Lösung <math>t_1 \approx 17,207</math> liegt im Definitionsbereich von <math>N_2</math>, die Lösung <math>t_2 \approx 5,660</math> jedoch nicht.</p> <p>Mit der vorgegebenen dritten Ableitung lässt sich die hinreichende Bedingung prüfen: <math>N_2'''(17,207) \approx 44,8 \neq 0</math>.</p> <p><i>Neben der konkreten Berechnung von <math>N_2'''(17,207)</math> gibt es selbstverständlich auch andere Möglichkeiten zu argumentieren, z.B. mit der zweiten Ableitung.</i></p> <p>Mit <math>N_2(17,207) \approx 4309</math> ergibt sich der Wendepunkt (gerundet) <math>W(17,207   4309)</math>. <i>Möglich ist z.B. auch <math>W(17,2   4315)</math>.</i></p>		25	
d)	<p>Gesucht ist <math>t</math> mit <math>1000 = 1000 \cdot e^{0,343t - 0,015t^2}</math>, somit <math>1 = e^{0,343t - 0,015t^2}</math>.</p> <p><math>\ln 1 = 0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2</math>. Da <math>\ln 1 = 0</math>, folgt:</p> $0 = 0,343 \cdot t - 0,015 \cdot t^2$ $= 0,015 \cdot t \cdot \left( \frac{0,343}{0,015} - t \right)$ <p>Die Lösung <math>t = 0</math> liegt außerhalb des Definitionsbereiches von <math>N_2</math>, so dass</p> $t = \frac{0,343}{0,015} = 22,8\bar{6}$ <p>der gesuchte Zeitpunkt ist.</p> <p>Knapp 23 Stunden nach Beginn der Beobachtung (und 15 Stunden nach Zugabe der Substanz) entspricht die Anzahl der Bakterien wieder der Startpopulation.</p>		15	
e)	<p><u>Zur Skizze:</u></p> <p>Zu berücksichtigen sind <math>N_1(0) = 1000</math>, der exponentielle Anstieg bis <math>N_1(8) \approx 5954 \approx N_2(8)</math> (siehe dazu auch die unten stehenden Hinweise zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit), der Hochpunkt (11,4   7105), der Wendepunkt (17,2   4309) und der Zeitpunkt <math>t \approx 23</math> aus Teil d). <i>Dabei muss erkannt werden, dass im Bereich des Hochpunktes nur eine Rechtskrümmung vorliegen kann.</i></p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Die Genauigkeit in der Hochachse ist nur bedingt möglich (Skizze!).</p> <p>Die <u>Untersuchung der Funktion an der Stelle <math>t = 8</math></u> bezieht sich auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und sollte im Graphen durch einen Knick angezeigt werden.</p> <p><u>Stetigkeit:</u> Wegen <math>N_1(8) \approx N_2(8)</math> ist die Funktion praktisch stetig.</p> <p>Sollte der Prüfling die Funktionsgleichung <math>N_1(t) = 1000 \cdot 1,25^t</math> verwenden, so könnte er zu dem Schluss kommen, dass <math>N</math> an der Stelle <math>t = 8</math> nicht stetig ist. Hier muss dann entsprechend bepunktet werden!</p> <p><u>Differenzierbarkeit:</u> Es ist <math>N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1,25 \cdot 1,25^t</math> bzw. <math>223 \cdot e^{0,223 \cdot t}</math>.</p> <p>Wegen <math>\lim_{t \rightarrow 8} N_1'(t) \neq N_2'(8)</math> ist die Funktion an der Stelle <math>t = 8</math> nicht differenzierbar (daher im Graph der Knick), denn</p> <p><math>N_1'(t) = 1000 \cdot \ln 1,25 \cdot 1,25^t</math> und <math>N_1'(8) \approx 1330</math> oder</p> <p><math>N_1'(t) = 223 \cdot e^{-0,223 \cdot t}</math> und <math>N_1'(8) \approx 1328</math> aber <math>N_2'(8) \approx 613</math></p> 	15	10	
f)	<p>Teilaufgabe d) zeigt, dass es mehr als vierzehn Stunden dauert, bis die Anzahl der Bakterien wieder auf 1000 (wie zu Beginn der Beobachtung) zurückgegangen ist.</p> <p>Grundsätzlich lässt sich schließen:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Die Substanz erfüllt nicht die Anforderungen zu einer schnellen Reduzierung der Bakterienanzahl, da die Zahl der Bakterien gut drei Stunden weiter ansteigt und dann erst verhältnismäßig langsam abnimmt.</li> <li>Die Substanz erfüllt die Anforderungen zur Reduzierung der Bakterienanzahl, da innerhalb von knapp 15 Stunden die Anzahl der Bakterien auf etwa ein Sechstel (1000) reduziert wird und innerhalb eines Tages sogar weiter sehr stark reduziert wird: <math>N_2(8+24) = N_2(32) \approx 12</math>.</li> </ol>			

**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

---

	<b>Lösungsskizze</b>	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<i>Jede dieser Positionen ist als richtig zu bewerten, wenn sie vom Prüfling mit den erzielten Ergebnissen stichhaltig begründet wird.</i>			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

## ANALYSIS 2

### I.2 Heißluftballon

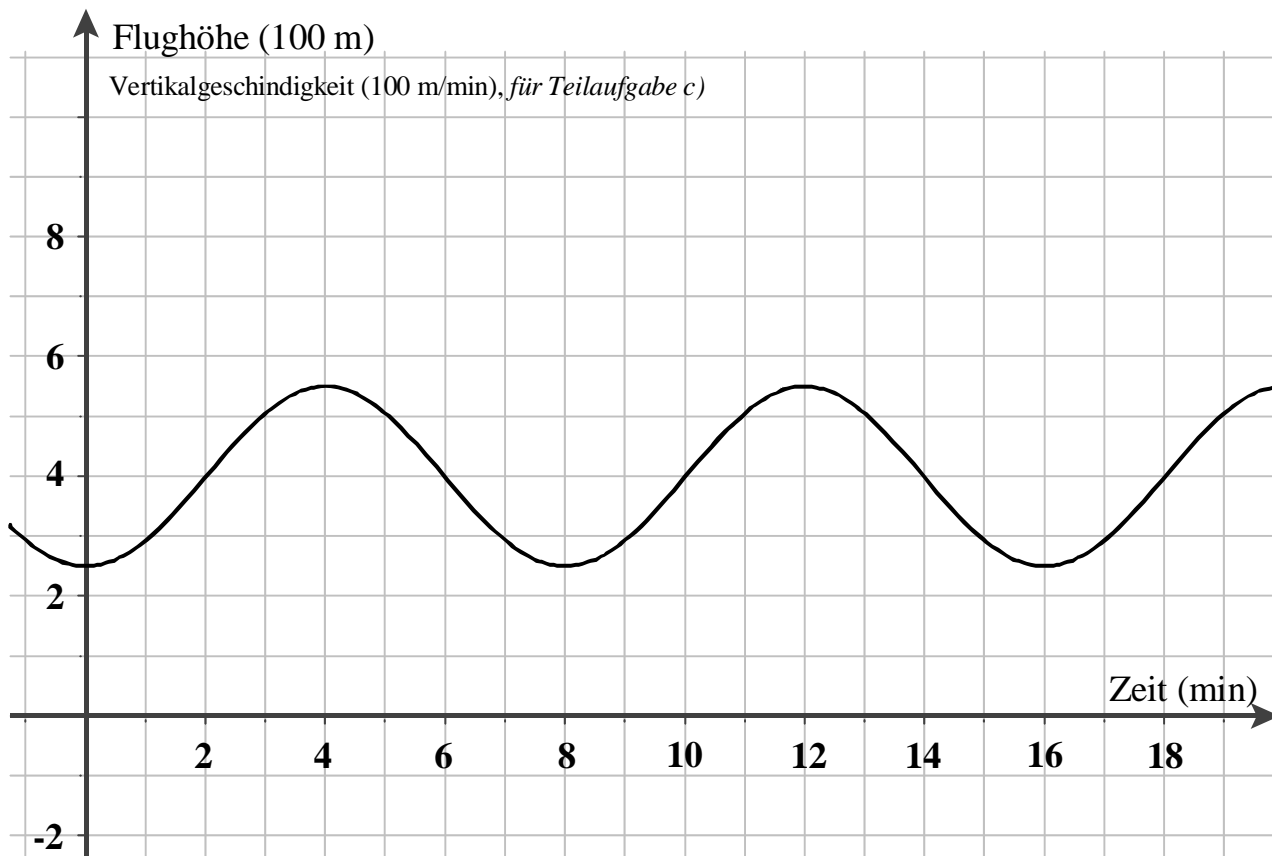
Die Flughöhe eines Heißluftballons wird über die Temperatur der Luftfüllung des Ballons gesteuert, die horizontale Bewegung wird allein durch den Wind beeinflusst. Die Temperatur der Luft im Ballon lässt sich mit einem fest eingebauten Gasbrenner einstellen, der in regelmäßigen Abständen angestellt wird.

Ein Ausschnitt des zeitlichen Verlaufs der Flughöhe (Vertikalbewegung) des Heißluftballons ist im anliegenden Diagrammblatt grob skizziert.

Der zeitliche Verlauf der Flughöhe wird mithilfe der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$  modelliert, wobei  $x$  die Zeit in Minuten und  $f(x)$  die Flughöhe in 100 Metern angibt.

- Berechnen Sie die Flughöhe des Ballons zum Zeitpunkt  $x = 3$  min.
- Ermitteln Sie möglichst ohne Differenzialrechnung sowohl die maximale als auch die minimale Flughöhe mit ihren zugehörigen Zeitpunkten.
- Bestimmen Sie die Funktion, die den zeitlichen Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit (momentane Änderung der Flughöhe pro Minute) darstellt und skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion im vorgegebenen Koordinatensystem im anliegenden Diagrammblatt, ohne eine ausführliche Kurvendiskussion vorzunehmen.
- Ermitteln Sie die Zeitpunkte, zu denen der Ballon am schnellsten steigt bzw. fällt und den Betrag der maximalen Vertikalgeschwindigkeit, d.h. der momentanen zeitlichen Änderungsrate der Flughöhe.
- Bestimmen Sie die mittlere Flughöhe in den ersten 6 Minuten.
- Bei der Landung eines Heißluftballons soll Folgendes berücksichtigt werden:  
Die Landephase wird zu einem Zeitpunkt eingeleitet, an dem sich der Ballon mit maximaler momentaner zeitlicher Vertikalgeschwindigkeit nach unten bewegt. Die Vertikalgeschwindigkeit soll in der Landephase kontinuierlich bis auf Null zum Zeitpunkt des Bodenkontaktes abnehmen.  
In einem Lehrbuch für Heißluftballonführer soll ein so beschriebener Landevorgang in Form eines Funktionsgraphen in Fortsetzung der Flugfunktion  $f$  dargestellt werden.  
Ermitteln Sie Eigenschaften einer solchen Landefunktion.  
Bestimmen Sie eine mögliche quadratische Funktion als Landefunktion mit dem zugehörigen Zeitpunkt der Landung.  
Skizzieren Sie den Graphen der Fluglandefunktion zusätzlich in das Diagrammblatt.
- Ein anderer Ballon variiert seine Flughöhe periodisch zwischen 200 und 400 Metern. Für einen Anstieg benötigt er ebenso wie für die Sinkphase jeweils 3 Minuten.  
Bestimmen Sie eine ebenfalls sinusförmige Funktionsgleichung der Funktion, die den zeitlichen Verlauf der Flughöhe anzeigt.

Diagrammblatt zur Aufgabe „Heißluftballon“



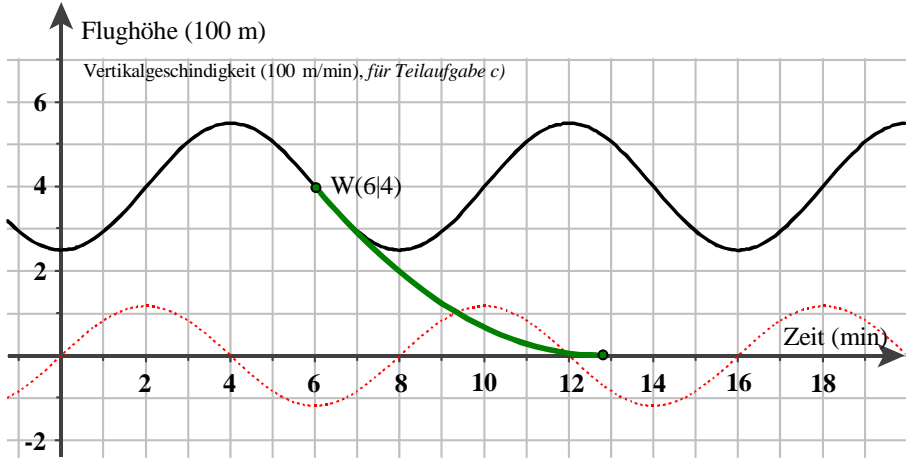
### Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Gesucht ist der Funktionswert <math>f(3)</math>. Es ergibt sich</p> $f(3) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 3}{4}\right) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right) = 4 + \frac{3}{4} \sqrt{2}, \text{ also}$ $f(3) \approx 5,06.$ <p>Der Ballon hat zum Zeitpunkt 3 min eine Höhe von etwa 506 m.</p>	5		
b)	<p>Die einfachere Funktion <math>g</math> mit <math>g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)</math> hat an den gleichen Stellen Extremwerte wie die gegebene Flughöhenfunktion <math>f</math>. Allerdings sind wegen des Vorzeichenwechsels Minima und Maxima vertauscht.</p> <p>Die reine Cosinusfunktion hat Maxima an den Stellen <math>k \cdot 2\pi</math>, <math>k \in \mathbb{Z}</math>, und hat Minima an den Stellen <math>\pi + k \cdot 2\pi</math>, <math>k \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Also hat die Funktion <math>g</math> Maxima an den Stellen <math>x = 8k</math>, <math>k \in \mathbb{Z}</math>, und Minima an den Stellen <math>x = 8k + 4</math>, <math>k \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Und damit hat die Funktion <math>f</math> Minima an den Stellen <math>x = 8k</math>, <math>k \in \mathbb{Z}</math>, und Maxima an den Stellen <math>x = 8k + 4</math>, <math>k \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>Die Maximal- bzw. Minimalwerte sind jeweils gleich und können z.B. an den Stellen <math>x = 4</math> und <math>x = 0</math> berechnet werden:</p> $f(0) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 0\right) = 2,5 \quad \text{bzw.} \quad f(4) = 4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) = 5,5.$ <p>Damit beträgt die minimale Flughöhe 250 m und die maximale 550 m.</p>		10	
c)	<p>Der zeitliche Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit des Ballons wird durch die Ableitung <math>f'</math> der Funktion <math>f</math> des zeitlichen Verlaufs der Flughöhe dargestellt:</p> $f'(x) = \frac{3}{8} \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) \approx 1,18 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<i>Eine Skizze der Ableitungsfunktion wird auf dem Diagrammblatt ohne explizite Kurvendiskussion erwartet.</i>	10	10	
d)	<p>Der Ballon steigt bzw. fällt dort am schnellsten, wo die Vertikalgeschwindigkeit – also die erste Ableitung von <math>f</math> – ihre Extrema hat bzw. wo <math>f</math> selbst Wendepunkte hat.</p> <p>Mit den gleichen Argumenten wie in b) begründet man, dass diese Stellen bei <math>x = 2 + 4k</math> liegen.</p> <p>Die Minimalwerte sind negativ und vom Betrag auch Maximalwerte. Alle diese Betragswerte sind gleich und zwar</p> $f'(2) = \frac{3}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right)$ $f'(2) = \frac{3}{8}\pi \approx 1,18.$ <p>Also beträgt die maximale Vertikalgeschwindigkeit immer wieder mit wechselndem Vorzeichen etwa 118 m/min.</p>		10	
e)	<p>Die mittlere Flughöhe <math>m</math> über dem Zeitintervall <math>[0;6]</math> wird über das Integral der Flughöhenfunktion <math>f</math> bestimmt:</p> $m = \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 \left(4 - \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right) dx = \frac{1}{6} \cdot \left[4x - \frac{6}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right]_0^6$ $m = \frac{1}{6} \cdot \left(24 + \frac{6}{\pi}\right) \approx 4,32.$ <p>Die durchschnittliche Flughöhe des Ballons im Zeitintervall <math>[0;6]</math> beträgt etwa 432 m.</p>		10	
f)	<p><u>Eigenschaften</u> einer Funktion <math>q</math>, die die Landephase darstellen kann:</p> <p>Der gewählte Zeitpunkt <math>x_w</math>, in dem die Landephase eingeleitet wird, muss eine der Stellen <math>2 + 4k</math> sein (<i>maximale Vertikalgeschwindigkeit nach unten</i>).</p> <p>An einer solchen Stelle <math>x_w</math> muss der Funktionswert und der Wert der 1. Ableitung der Funktion <math>f</math> und der Landefunktion <math>q</math> gleich sein:</p> <p>I. <math>q(x_w) = f(x_w) = 4</math> (<i>Sprungstelle im Sachkontext nicht möglich</i>)</p> <p>II. <math>q'(x_w) = f'(x_w) = -\frac{3}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right)</math> (vgl. d) (<i>ruckfrei</i>)</p> <p>Zum Zeitpunkt <math>x_n</math> der Landung muss eine weitere Bedingung gelten:</p> <p>III. <math>q(x_n) = q'(x_n) = 0</math> (<i>sanfte Landung</i>).</p> <p>Aus I und III folgt, dass die Nullstelle der quadratischen Funktion <math>q</math> mit ihrem Scheitelpunkt zusammenfallen muss, da hier die einzige Stelle vorliegt, die die Bedingung III erfüllt.</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Deshalb ist folgender <u>Ansatz für eine quadratische Funktion</u> notwendig:  <math>q(x) = a \cdot (x - b)^2</math> und damit <math>q'(x) = 2a \cdot (x - b) = 2a \cdot x - 2a \cdot b</math>.</p> <p>Für <math>x_W</math> wählen wir z.B. <math>x_W = 6</math>. Dann erhalten wir folgende zwei Gleichungen:</p> $(1) \quad a \cdot (6 - b)^2 = f(6) = 4 \qquad (1') \quad a \cdot (6 - b)^2 = 4$ $(2) \quad 2a \cdot (6 - b) = f'(6) = -\frac{3}{8}\pi \qquad (2):2 \quad (2') \quad a \cdot (6 - b) = -\frac{3}{16}\pi$ <p>Da <math>a = 0</math> und <math>b = 6</math> keine Lösungen sein können, liefert die Division (1) : (2):</p> $6 - b = -\frac{4 \cdot 16}{3\pi} \Rightarrow b = 6 + \frac{64}{3\pi} \approx 12,79.$ <p><math>b</math> eingesetzt in (2) ergibt:</p> $a \cdot \left(-\frac{64}{3\pi}\right) = -\frac{3}{16}\pi \Rightarrow a = \frac{3\pi \cdot 3\pi}{16 \cdot 64} = \frac{9\pi^2}{1024} \approx 0,087.$ <p>Der <u>Landezeitpunkt</u> liegt also bei ca. 13 Minuten, da <math>b</math> die <math>x</math>-Koordinate des Scheitelpunktes von <math>q</math> ist.  <math>q</math> hat die Gleichung <math>q(x) = 0,087 \cdot (x - 12,79)^2</math>.</p> 	5	10	15
g)	<p>Die Modellierungsfunktion für den Flughöhenverlauf lautet im Ansatz z.B.  <math>f_{neu}(x) = c - a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{b} \cdot x\right)</math>, wobei <math>a</math> die Amplitude, also den halben Unterschied zwischen Maximal- und Minimalhöhe darstellt, <math>b</math> die Periodendauer und <math>c</math> die mittlere Höhe.</p> <p>Die Periodendauer des Flughöhenverlaufs (Diagramm) beträgt 6 Minuten, also ist <math>b = 6</math>. Die Amplitude ist <math>a = 1</math>, die Verschiebung <math>c = 3</math>. Es ergibt sich die Funktion mit der Gleichung <math>f_{neu}(x) = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)</math>.</p>		10	5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20



### ANALYSIS 3

#### I.3 Logarithmus-Funktion

Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit der Gleichung  $f_a(x) = x \cdot (\ln x - a)^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich.  
Berechnen Sie die Nullstellen und beschreiben Sie die Lage der Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter  $a$ .
- b) Weisen Sie nach, dass für jedes  $a$  die Graphen von  $f_a$  und  $f_{-a}$  genau einen gemeinsamen Punkt  $S_a$  haben.  
Beschreiben Sie die Lage aller Schnittpunkte  $S_a$  im Koordinatensystem in Abhängigkeit von  $a$ .
- c) Bestimmen Sie die Extrempunkte von  $f_a$ .  
Begründen Sie, warum jeder Graph der Funktionenschar einen Wendepunkt haben muss und bestimmen Sie diesen.  
Bestimmen Sie sowohl den Funktionsterm des Graphen aller Hochpunkte als auch den aller Wendepunkte (Ortskurven).  
(Zur Kontrolle:  $f_a'(x) = (\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a)$ .)
- d) In der Anlage ist ein Graph der Schar dargestellt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert für  $a$ .  
Zeichnen Sie in das gegebene Koordinatensystem den Graphen für  $a = 1$  und die beiden zugehörigen Ortskurven aus Aufgabenteil c).

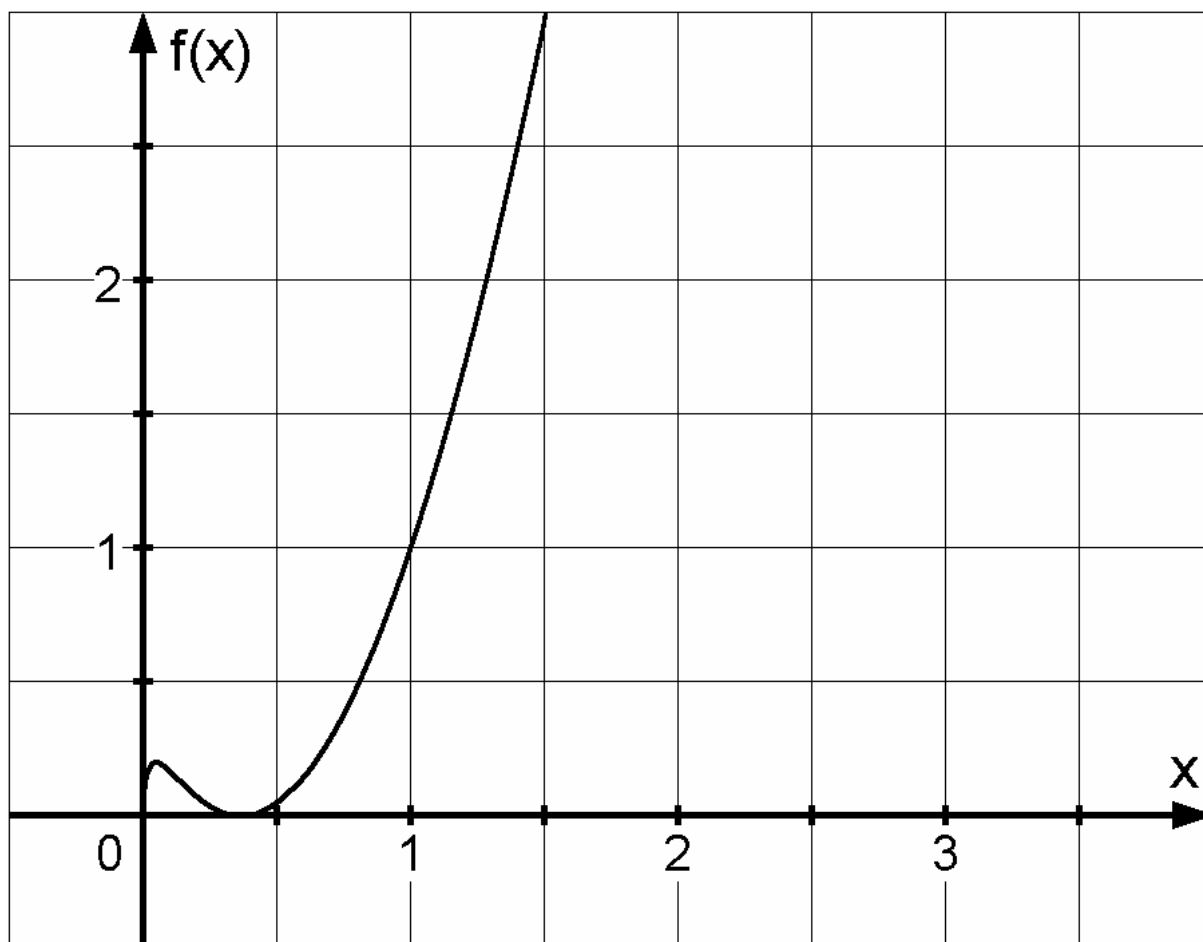
- e) Es geht um das Integral  $I_2 = \lim_{k \rightarrow 0} \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^2 dx$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) und seine geometrische Bedeutung.

Sie dürfen für diese Teilaufgabe voraussetzen:  $\lim_{k \rightarrow 0} (k^2 \cdot (\ln k - a)^n) = 0$  für  $n \in \{1, 2\}$ .

Zeigen Sie, dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt:  $I_1 = \lim_{k \rightarrow 0} \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a)^1 dx = -\frac{e^{2a}}{4}$ .

Bestimmen Sie mit Hilfe von  $I_1$  das Integral  $I_2$  und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

**Anlage zu Aufgabe „Logarithmus-Funktion“**

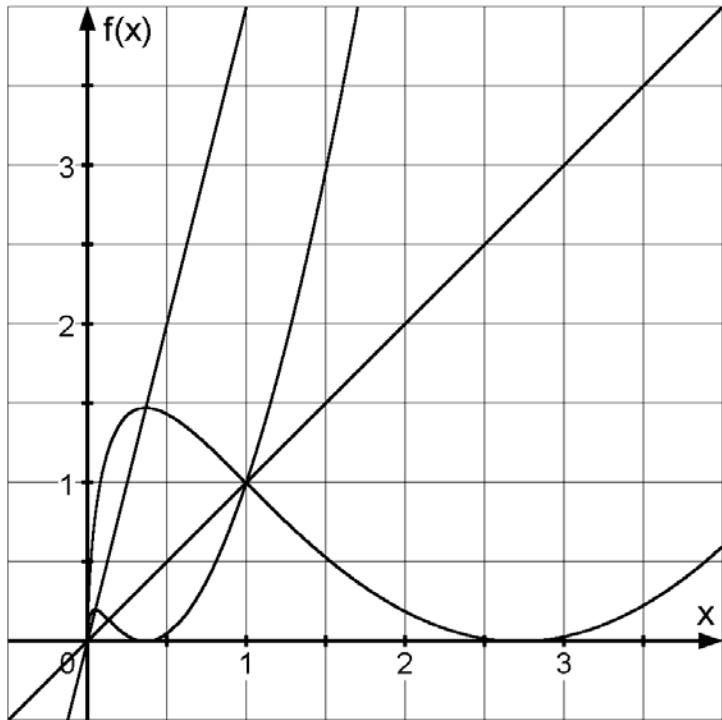


## Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><u>Definitions- und Wertebereich:</u></p> <p><math>D = \mathbb{R}^+</math>, da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist.</p> <p><math>W = \mathbb{R}_0^+</math>, da der erste Faktor des Funktionsterms wegen der Definitionsmenge nur positive Werte annehmen kann und der zweite Faktor wegen des Quadrates stets größer oder gleich Null ist.</p> <p><u>Nullstellen:</u></p> <p>Der Funktionsterm hat die Form eines Produktes. Dieses wird Null, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist. Der 1. Faktor wird (wegen Definitionsbereich) nicht Null. Der 2. Faktor wird 0, wenn <math>a = \ln x</math> ist, wenn also <math>x = e^a</math>. Somit haben alle Graphen der Schar eine Nullstelle <math>N_a(e^a   0)</math>. Und zwar gilt:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.) Für <math>a &lt; 0</math> liegt die Nullstelle im Intervall <math>]0; 1[</math>.</li> <li>2.) Für <math>a = 0</math> liegt die Nullstelle bei <math>x = 1</math>.</li> <li>3.) Für <math>a &gt; 0</math> wandert die Nullstelle mit wachsendem <math>a</math> nach rechts (im Intervall <math>]1; \infty[</math>).</li> </ol>	10	5	
b)	<p>Wenn die Graphen von <math>f_a</math> und <math>f_{-a}</math> gemeinsame Punkte haben, dann muss die Gleichung</p> $x \cdot (\ln x - a)^2 = x \cdot (\ln x + a)^2$ <p>nicht nur trivial erfüllbar sein.</p> <p>Elementare Umformungen liefern zwei Gleichungen</p> $\ln x - a = \ln x + a \quad \text{und} \quad \ln x - a = -(\ln x + a) = -\ln x - a.$ <p>Vereinfacht man beide Gleichungen, so folgt für die erste, dass diese nur für <math>a = 0</math> erfüllt ist (triviale Lösung).</p> <p>Die 2. Gleichung ist erfüllt, wenn <math>x = 1</math> ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist <math>a^2</math>. D. h. alle Schnittpunkte haben als 1. Koordinate den Wert 1, liegen also im Koordinatensystem auf einer Parallelen zur <math>y</math>-Achse durch die Stelle <math>x = 1</math>.</p> <p>Es gilt <math>S_a(1   a^2)</math>.</p> <p>Mit wachsendem Betrag von <math>a</math> wachsen auch die Funktionswerte.</p>		10	
c)	<p><u>Bestimmen der Extrempunkte:</u></p> <p>Um die Extrempunkte zu bestimmen, bildet man zunächst mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel die 1. und 2. Ableitung:</p> $f_a'(x) = (\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a)$ <p>und</p> $f_a''(x) = \frac{2}{x} \cdot (\ln x - a + 1).$			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Man setzt die 1. Ableitung gleich 0 und klammert <math>(\ln x - a)</math> aus:</p> $(\ln x - a)^2 + 2(\ln x - a) = (\ln x - a) \cdot (\ln x - a + 2) = 0.$ <p>Der Term <math>(\ln x - a)</math> wird 0, wenn <math>x = e^a</math>. Die Nullstelle ist also gleichzeitig auch Extremstelle. Aus den Überlegungen bzgl. des Wertebereichs folgt, dass hier ein Minimum vorliegt. Es gilt <math>T_a(e^a \mid 0)</math>.</p> <p>Der Term <math>(\ln x - a + 2)</math> wird 0, wenn <math>x = e^{a-2}</math> ist. Um zu überprüfen, ob an dieser Stelle tatsächlich eine Extremstelle liegt, setzt man diesen Wert in die 2. Ableitung ein.</p> $f_a''(e^{a-2}) = \frac{2}{e^{a-2}} \cdot (\ln(e^{a-2}) - a + 1) = \frac{2}{e^{a-2}} \cdot (a - 2 - a + 1) = -\frac{2}{e^{a-2}}.$ <p>Da sowohl der Zähler als auch der Nenner für alle <math>a \in \mathbb{R}</math> positiv ist, ist der Wert des Terms negativ, also liegt dort für alle <math>a \in \mathbb{R}</math> ein Maximum vor.</p> $f_a(e^{a-2}) = e^{a-2} \cdot (\ln(e^{a-2}) - a)^2 = e^{a-2} \cdot 4.$ <p>Es gilt <math>H_a(e^{a-2} \mid 4 \cdot e^{a-2})</math>.</p> <p><u>Bestimmen der Wendepunkte:</u></p> <p>Um die möglichen Wendestellen zu berechnen, setzt man die 2. Ableitung gleich 0.</p> $f_a''(x) = \frac{2}{x} \cdot (\ln x - a + 1) = 0.$ <p>Der 1. Faktor kann nicht den Wert 0 annehmen.</p> <p>Der 2. Faktor wird 0, wenn <math>x = e^{a-1}</math> ist. An dieser Stelle müssen alle Graphen der Schar eine Wendestelle haben, da bei einer stetigen Funktion zwischen Minimum- und Maximumstelle (ohne Pol) eine Wendestelle existieren muss.</p> <p>Der Funktionswert der Wendestelle ist</p> $f_a(e^{a-1}) = e^{a-1} \cdot (\ln(e^{a-1}) - a)^2 = e^{a-1} \cdot 1 = e^{a-1}.$ <p>Es gilt <math>W_a(e^{a-1} \mid e^{a-1})</math>.</p> <p><u>Gleichungen der Ortskurven:</u></p> <p>Die Ortskurve aller Hochpunkte <math>H_a(e^{a-2} \mid 4 \cdot e^{a-2})</math> ist die Gerade mit der Gleichung <math>g_H(x) = 4x</math>.</p> <p>Die Ortskurve aller Wendepunkte <math>W_a(e^{a-1} \mid e^{a-1})</math> ist die Gerade mit der Gleichung <math>g_W(x) = x</math>.</p>			
			25	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Der Zeichnung kann man entnehmen, dass der Punkt (1   1) ein Punkt des Graphen ist. Setzt man die Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, dann gilt:</p> $1 = 1 \cdot (\ln 1 - a)^2 = a^2.$ <p>Es folgt daher, dass <math>a</math> den Wert 1 bzw. den Wert <math>-1</math> annehmen kann. Um zu entscheiden, welcher Wert von <math>a</math> zu diesem Graphen gehört, berechnet man z.B. die Nullstelle für <math>a = 1</math>:</p> $0 = x \cdot (\ln x - 1)^2.$ <p>Da diese Gleichung für <math>x = e</math> erfüllt ist, gibt die Zeichnung den Graphen für <math>a = -1</math> an.</p> 	10	5	5
e)	<p><b>Berechnung von <math>I_1</math></b> (Lösung mit partieller Integration):</p> $v'(x) = x \text{ und } u(x) = \ln x - a. \text{ Dann folgt: } v(x) = \frac{x^2}{2} \text{ und } u'(x) = \frac{1}{x}.$ <p>Setzt man nun die Terme gemäß der partiellen Integration ein, so erhält man:</p> $I_1 = \lim_{k \rightarrow 0} \left( \left[ \frac{1}{2} x^2 (\ln x - a) \right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a} \frac{1}{2} x dx \right) = 0 - \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_k^{e^a} = -\frac{e^{2a}}{4}.$ <p><b>Berechnung von <math>I_2</math></b> (mit partieller Integration):</p> $v'(x) = x \text{ und } u(x) = (\ln x - a)^2. \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2} \text{ und } u'(x) = 2 \cdot (\ln x - a) \cdot \frac{1}{x}.$ $I_2 = \lim_{k \rightarrow 0} \left( \left[ \frac{1}{2} x^2 (\ln x - a)^2 \right]_k^{e^a} - \int_k^{e^a} x \cdot (\ln x - a) dx \right) = 0 - \left( -\frac{e^{2a}}{4} \right) = \frac{e^{2a}}{4}.$			

**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

---

	<b>Lösungsskizze</b>	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dieser Wert beschreibt das Maß der Flächen, die jeweils von den Graphen von $f_a$ und der $x$ -Achse eingeschlossen werden.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

## II.1 Gerade und Geradenschar

Gegeben sind eine Geradenschar  $g_a$  und eine einzelne Gerade  $h$

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -6a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

mit den Stützpunkten  $G(5|3|8)$  und  $H(8|0|2)$ .

- Beschreiben Sie, warum der Stützpunkt  $G$  nicht auf der Geraden  $h$  liegt.
- Weisen Sie nach, dass jede Gerade  $g_a$  der Schar die Gerade  $h$  schneidet und dass jeder Punkt von  $h$  Schnittpunkt mit einer der Schargeraden ist.
- Begründen Sie ausgehend von Ihren Ergebnissen zu a) und b) die Aussage, dass die Geraden  $g_a$  und  $h$  alle in einer Ebene  $E$  liegen.  
Ermitteln Sie eine Koordinatenform von  $E$ .
- Bestimmen Sie in der Ebene  $E$  eine Gerade  $k$  (in Parameterform), die zwar durch den Stützpunkt der Schar verläuft, aber selbst nicht zur Schar gehört.
- Eine Ebene  $F$  ist orthogonal zur Strecke  $\overline{GH}$  und verläuft durch den Punkt  $G$ . Diese Ebene enthält eine der Schargeraden  $g_a$ .  
Beschreiben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von  $F$  und des Parameters  $a$ .  
Weisen Sie nach, dass  $F : x_1 - x_2 - 2x_3 = -14$  die geforderten Eigenschaften hat und bestimmen Sie den Parameter  $a$ .  
Ermitteln Sie den Schnittpunkt von  $F$  mit der Geraden  $h$ .
- Die Punkte  $G$  und  $H$ , der Ursprung  $O$  und ein beliebiger Punkt  $P$  auf der Geraden  $h$  sind die Ecken einer Pyramide.  
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von  $P$ .

## Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$G$ kann nicht auf der Geraden $h$ liegen, da bei allen Punkten auf $h$ die zweite Koordinate gleich 0 ist. $G$ dagegen hat als zweite Koordinate 3.	5		
b)	<p>Der Schnittpunktansatz für die Geraden führt zum linearen Gleichungssystem</p> $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -6a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -6a & 4 & -6 \end{pmatrix}.$ <p><math>r = -3</math> ist ablesbar, es verbleiben die beiden Gleichungen</p> $-9a - 2s = 3 \quad \wedge \quad 18a + 4s = -6,$ <p>die äquivalent zueinander sind. Für jeden Wert von <math>a</math>, d.h. für jede Schargerade, gibt es ein <math>s</math>, das die Gleichung löst, d.h. einen Punkt auf <math>h</math>, durch den die Schargerade verläuft.</p> <p>Umgekehrt gibt es zu jedem <math>s</math> ein passendes <math>a</math>.</p>		20	5
c)	<p>Der Stützpunkt <math>G</math> der Geradenschar liegt nicht auf der Geraden <math>h</math>. Daher spannen <math>G</math> und <math>h</math> eine Ebene <math>E</math> auf. In dieser Ebene müssen auch alle Geraden der Schar liegen, weil sie <math>h</math> schneiden und den gemeinsamen Stützpunkt <math>G</math> haben, der in der Ebene liegt.</p> <p><i>Es sind auch andere Begründungen möglich.</i></p> <p><u>Bestimmung einer Koordinatenform der Ebene <math>E</math>:</u></p> <p><i>Variante 1:</i></p> <p>Aus <math>\overline{GH} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}</math> folgt eine Parameterform <math>E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}</math>.</p> $x_1 = 8 + 2s + 3t$ $x_2 = -3t \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_3 = 18 \text{ ist damit eine Koordinatenform von } E.$ $x_3 = 2 - 4s - 6t$ <p><i>Variante 2:</i></p> <p>Einen Normalenvektor, der senkrecht zu allen Richtungsvektoren der Schar und zum Richtungsvektor von <math>h</math> ist, liefert das Kreuzprodukt</p> $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und mit } \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ folgt } E: 4x_1 + 2x_3 = 36.$ <p>Vereinfacht gilt natürlich auch <math>E: 2x_1 + x_3 = 18</math>.</p>		10	10



Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Nach Teil b) gibt es keinen Schnittpunkt der Geraden <math>k</math> und <math>h</math>, weil alle Schargeraden die Gerade <math>h</math> schneiden und <math>k</math> keine Schargerade sein soll.</p> <p>Die Gerade <math>k</math> muss demnach parallel zu <math>h</math> sein: <math>k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.</math></p>		10	
e)	<p><u>Ermitteln von <math>F</math> und <math>a</math>:</u></p> <p>Die Ebene <math>F</math> ist orthogonal zu <math>\overline{GH}</math>, d.h. <math>\overline{GH}</math> ist ein Normalenvektor von <math>F</math>. Davon ausgehend ist die Koordinatenform der Ebene schon weitgehend bestimmt. Die fehlende rechte Seite der Ebenengleichung ergibt sich durch Einsetzen eines bekannten Punktes der Ebene, z.B. von <math>G</math>.</p> <p>Da <math>F</math> durch <math>G</math> verläuft, gilt</p> $\overline{GH} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{GH} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = -42,$ <p>also <math>F: 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -42</math> bzw. <math>F: x_1 - x_2 - 2x_3 = -14</math></p> <p>Kriterium zur Bestimmung des Parameters <math>a</math> ist, dass alle Geradenpunkte die Ebenengleichung erfüllen:</p> $(5 + 3 \cdot r \cdot a) - (3 + r) - 2 \cdot (8 - 6 \cdot r \cdot a) = -14 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R},$ $\Leftrightarrow -14 + 15ar - r = -14,$ $\Leftrightarrow 15ar - r = 0,$ $\Leftrightarrow r \cdot (15a - 1) = 0, \text{ also } a = \frac{1}{15}.$ <p><u>Schnittpunkt <math>F</math> und <math>h</math>:</u></p> <p>Im Teil b) ist festgehalten worden, dass für den Parameter <math>s</math> des Schnittpunktes der Geraden <math>g_a</math> mit der Geraden <math>h</math> gilt: <math>-9a - 2s = 3</math>. Also ist <math>s = -\frac{1}{2} \cdot (9a + 3)</math>.</p> <p>Mit <math>a = \frac{1}{15}</math> ergibt sich <math>s = -\frac{9}{5}</math> und damit der Schnittpunkt <math>\left( \frac{22}{5} \mid 0 \mid \frac{46}{5} \right)</math>.</p> <p><math>s</math> kann auch berechnet werden durch das Einsetzen eines allgemeinen Punktes von <math>h</math> in die Koordinatenform der Ebene <math>F</math>.</p> $(8 + 2s) - 2(2 - 4s) = -14 \Leftrightarrow 4 + 10s = -14 \Leftrightarrow s = -\frac{9}{5}$	10	15	5

**Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik**

	<b>Lösungsskizze</b>	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Das Volumen der Pyramide kann als Spatprodukt berechnet werden.</p> $V(s) = \frac{1}{6} \cdot \left  \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8+2s \\ 0 \\ 2-4s \end{pmatrix} \right  = \frac{1}{6} \left  \begin{pmatrix} 6 \\ 54 \\ -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8+2s \\ 0 \\ 2-4s \end{pmatrix} \right $ $= \frac{1}{6} \cdot  6(8+2s) - 24(2-4s)  = 18 \cdot  s .$	10		
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

## II.2 Schattenspiele

An einer Hauswand befindet sich ein kunstvoll bemalter Vorbau in Form eines Prismas, das mathematisch durch die Eckpunkte

$$W_1(0 | -2 | 2), W_2(0 | 2 | 2), W_3(0 | 2 | 6), W_4(0 | -2 | 6), V_1(2 | 0 | 2) \text{ und } V_2(2 | 0 | 6)$$

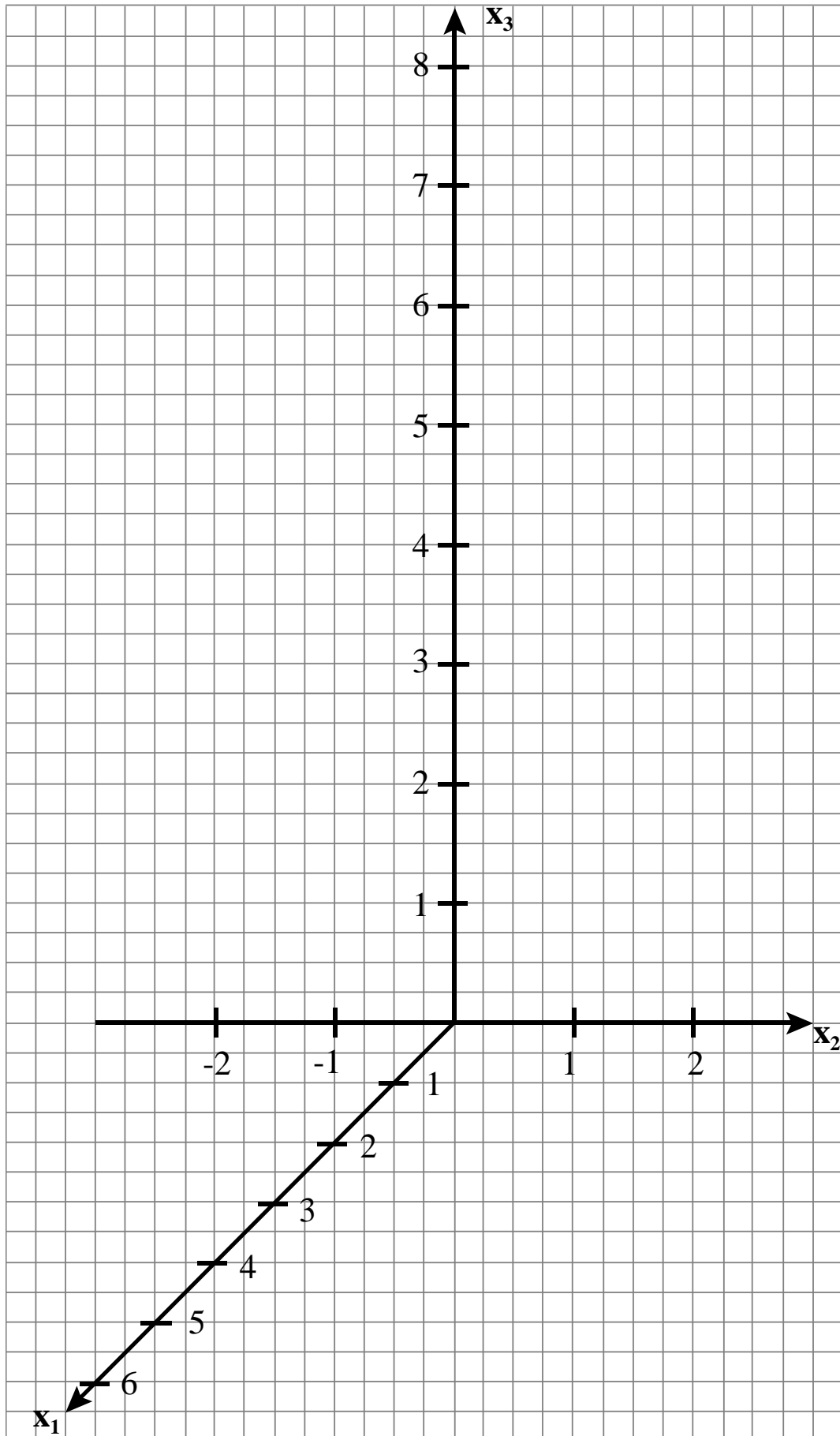
beschrieben werden kann ( $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ m}$ ).

Die Hauswand liegt in der Halbebene mit  $x_1 = 0$  und  $x_3 \geq 0$ .

Zur Beleuchtung dieses Vorbaus verläuft im Abstand 6 m von der Hauswand in 3 m Höhe parallel zum Erdboden (also in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene) eine Schiene, an der eine punktförmige Lichtquelle beweglich befestigt ist.

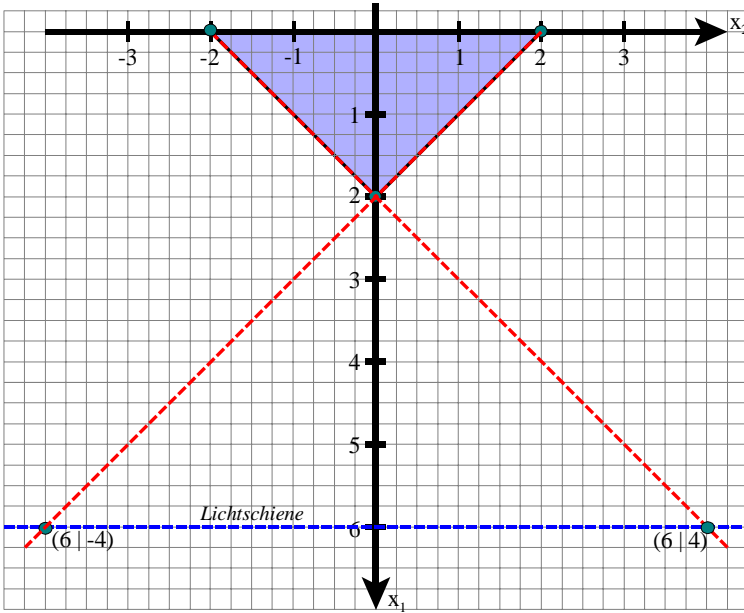
- Zeichnen Sie den Vorbau in das beigefügte Koordinatensystem ein.  
Berechnen Sie die Winkel zwischen der Seitenfläche  $V_1W_2W_3V_2$  und der Hauswand sowie zwischen dieser Seitenfläche und der anderen Vorbauseite.
- Die punktförmige Lichtquelle befindet sich auf der Schiene zunächst im Punkt  $A(6 | 0 | 3)$ .  
Bestimmen Sie die Form des Schattens, den der Vorbau auf die Hauswand wirft. Ermitteln Sie dazu die Schattenpunkte von  $V_1$  und  $V_2$  an und zeichnen Sie den Schatten des Vorbaus in Ihr Koordinatensystem ein.
- Bestimmen Sie, um wie viele Meter die Lichtquelle von  $A$  aus auf der Schiene höchstens nach links oder rechts (negative oder positive  $x_2$ -Richtung) verschoben werden darf, wenn seitlich vom Vorbau kein Schatten auf die Hauswand fallen soll.
- Beschreiben Sie, wie sich die Schattenform oberhalb und unterhalb des Vorbaus auf der Hauswand verändert, wenn man die Lichtquelle auf der Schiene von Punkt  $B(6 | -4 | 3)$  nach Punkt  $C(6 | 4 | 3)$  verschiebt. Bestimmen Sie dazu den tiefsten und höchsten Punkt des Schattens auf der Wand in Abhängigkeit von der Position der Lichtquelle.
- Damit Regenwasser von dem flachen Vorbau abfließen kann, wird dem Vorbau ein schräges Dach aufgesetzt. Dieser Dachaufsatz besteht aus zwei dreieckigen Kupferplatten mit den Ecken  $V_2, W_3$  und  $D(0 | 0 | 7)$  sowie  $W_4, V_2$  und  $D$ .  
Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Dachplatte  $V_2W_3D$  und der Vorbauseite  $V_1W_2W_3V_2$ .
- Beurteilen Sie, ob der Dachaufbau Einfluss auf den Schatten auf der Wand hat, wenn die Lichtquelle wie im Aufgabenteil d) von Punkt  $B$  nach Punkt  $C$  bewegt wird.

Anlage zur Aufgabe „Schattenspiele“



Erwartungshorizont

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)				
<p>Da die Ebene, die durch <math>V_2</math>, <math>W_3</math> und <math>W_4</math> aufgespannt wird, senkrecht zur Hauswand ist, kann der gesuchte Winkel <math>\alpha</math> elementargeometrisch bestimmt werden als Winkel bei <math>W_3</math> im rechtwinkligen Dreieck <math>V_2W_3Z</math> mit <math>Z(0 \mid 0 \mid 6)</math>.  <math> \overline{W_3Z}  =  \overline{V_2Z}  = 2</math>. Das rechtwinklige Dreieck ist also gleichschenkelig. Damit ist der Winkel zur Wand <math>45^\circ</math> und zur anderen Vorbauseite <math>90^\circ</math>.</p> <p>Beide Winkel erhält man auch durch eine Projektion des Dreiecks <math>V_2, W_3, W_4</math> in die <math>x_1</math>-<math>x_2</math>-Ebene direkt aus der Skizze oder rechnerisch.</p> <p><math>\alpha</math> kann auch als Winkel zwischen den Vektoren <math>\overline{W_3V_2}</math> und <math>\overline{W_3W_4}</math>, oder aber auch als Winkel zwischen Normalenvektoren der Ebenen berechnet werden.</p>		20		

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	<p>Der Schattenpunkt <math>S_1</math> von <math>V_1</math> ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden <math>g_{AV_1}</math> durch <math>A</math> und <math>V_1</math> mit der <math>x_2</math>-<math>x_3</math>-Ebene (Wand).</p> $g_{AV_1}: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{v}_1 - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$ <p>Schnitt mit der <math>x_2</math>-<math>x_3</math>-Ebene <math>\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 1,5</math></p> <p>ergibt den Schattenpunkt <math>S_1 (0   0   1,5)</math> von <math>V_1</math>.</p> <p>Entsprechend bestimmt man den Schattenpunkt <math>S_2</math> von <math>V_2</math> als Schnittpunkt der Geraden <math>g_{AV_2}</math> durch <math>A</math> und <math>V_2</math> mit der <math>x_2</math>-<math>x_3</math>-Ebene (Wand) zu <math>S_2 (0   0   7,5)</math>.</p> <p>Es ergibt sich unterhalb des Vorbaus ein dreieckiger Schatten <math>W_2W_1S_1</math> und oberhalb ein dreieckiger Schatten <math>W_4W_3S_2</math>.</p> <p><i>Die Zeichnung in a) ist zu ergänzen.</i></p>	5	15	
c)	<p>Es ergibt sich kein seitlicher Schatten, wenn die Schattenpunkte von <math>V_1</math> und <math>V_2</math> <math>x_2</math>-Koordinaten zwischen <math>-2</math> und <math>2</math> haben.</p> <p><u>1. Lösungsvorschlag:</u> (elementargeometrisch, senkrechte Projektion in <math>x_1</math>-<math>x_2</math>-Ebene):</p>  <p><i>Die Lösung entnimmt man der Zeichnung oder ermittelt sie durch Rechnung. Antwortsatz s.u.</i></p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

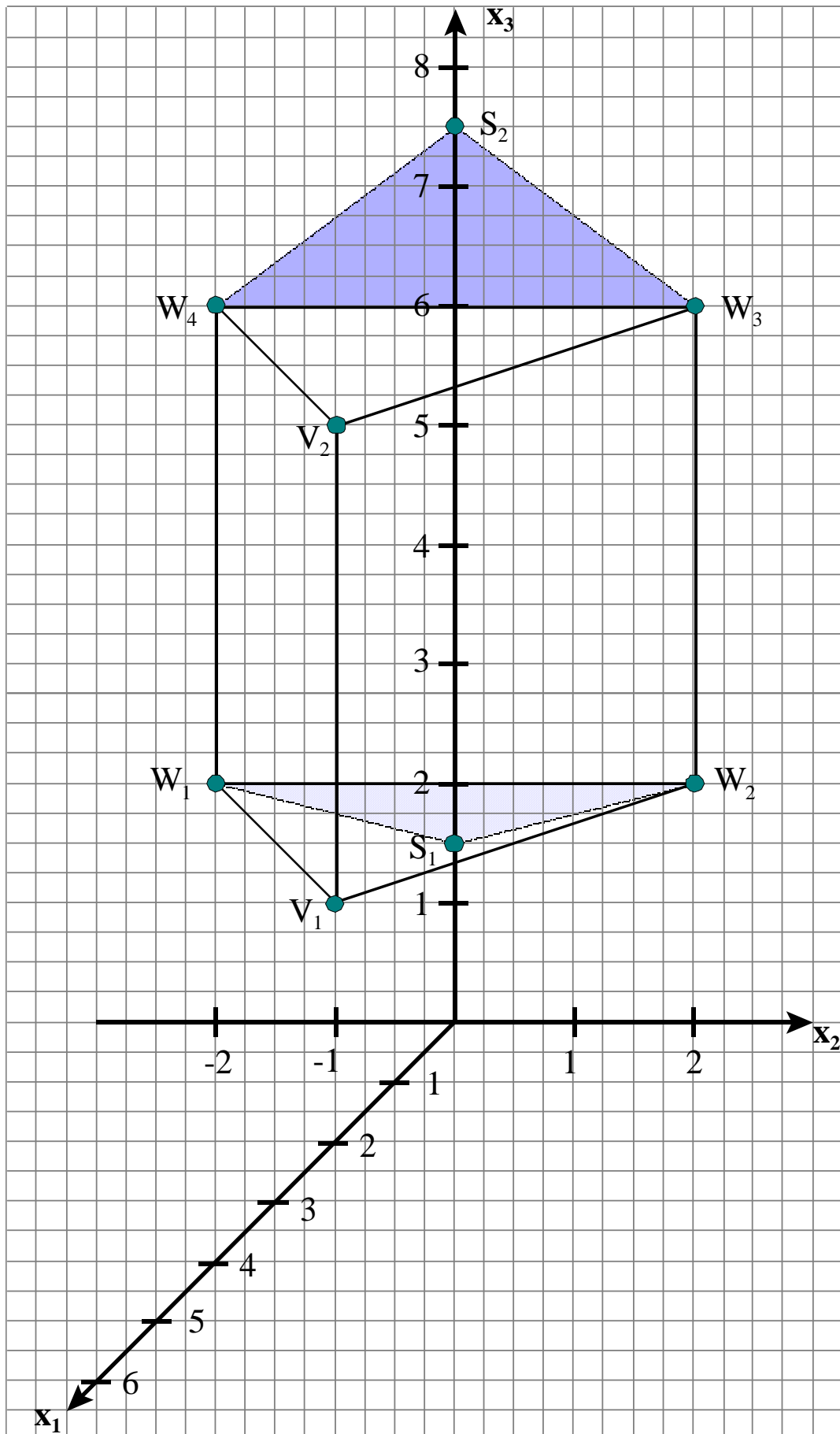
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><u>2. Lösungsvorschlag:</u></p> <p><math>P(6   x_2   3)</math> sei der Punkt auf der Schiene, bei dem der Schattenpunkt <math>S_{PV_1}</math> von <math>V_1</math> die <math>x_2</math>-Koordinate <math>-2</math> oder <math>2</math> hat.</p> $g_{PV_1}: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot (\vec{v}_1 - \vec{p}) = \begin{pmatrix} 6 \\ x_2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -x_2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$ <p>Der Schnitt der Geraden <math>g_{PV_1}</math> durch <math>P</math> und <math>V_1</math> mit der <math>x_2</math>-<math>x_3</math>-Ebene ergibt <math>S_{PV_1}(0   -0,5x_2   1,5)</math>.</p> $-0,5x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = 4 \quad \text{bzw.} \quad -0,5x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -4.$ <p>Für den Schatten <math>S_{PV_2}</math> von <math>V_2</math> gilt entsprechend <math>S_{PV_2}(0   -0,5x_2   7,5)</math>.</p> <p>Die Lichtquelle kann also bis zu <math>4</math> m nach links oder rechts auf der Schiene verschoben werden, ohne dass ein seitlicher Schatten auf der Hauswand erscheint.</p>		10	10
d)	<p>Verschiebt man die Lichtquelle zwischen <math>B</math> und <math>C</math>, so erhält man nach Teil c) keinen seitlichen Schatten.</p> <p>Bezeichnet <math>P(6   x_2   3)</math> die Position der Lichtquelle, so ist der tiefste Punkt des Schattens auf der Wand bereits in Teil c) zu <math>S_{PV_1}(0   -0,5x_2   1,5)</math> bestimmt worden, der höchste Punkt zu <math>S_{PV_2}(0   -0,5x_2   7,5)</math>. (nur bei Lösungsvorschlag 2)</p> <p>Der Schatten oberhalb des Vorbaus ist immer ein Dreieck mit den Eckpunkten <math>W_3</math>, <math>S_{PV_2}</math> und <math>W_4</math> mit <math>S_{PV_2}(0   s_2   7,5)</math> und <math>-2 \leq s_2 \leq 2</math>.</p> <p>Der Schatten unterhalb des Vorbaus ist immer ein Dreieck mit den Eckpunkten <math>W_2</math>, <math>W_1</math> und <math>S_{PV_1}</math> mit <math>S_{PV_1}(0   s_2   1,5)</math> und <math>-2 \leq s_2 \leq 2</math>,</p> <p>d.h. die oberen Schattendreiecke besitzen immer die Basis <math>\overline{W_4W_3}</math> der Länge <math>4</math> m und die Höhe <math>1,5</math> m.</p> <p>Die unteren Schattendreiecke besitzen immer die Basis <math>\overline{W_1W_2}</math> der Länge <math>4</math> m und die Höhe <math>0,5</math> m.</p>		10	5
e)	<p>Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Ein Normalenvektor zur Ebene durch die Punkte <math>V_1</math>, <math>W_2</math> und <math>W_3</math> ist <math>\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}</math>. Das folgt z.B. aus Teil a), denn der dort berechnete Winkel ist <math>45^\circ</math>.</p> <p>Die Ebene <math>E</math> des Daches wird durch die Punkte <math>V_2</math>, <math>W_3</math> und <math>D</math> aufgespannt. Ein Normalenvektor <math>\vec{n}_D</math> von <math>E</math> steht senkrecht auf den Richtungsvektoren von <math>E</math>, also muss gelten:</p>			

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\vec{n}_D \cdot (\vec{w}_3 - \vec{v}_2) = 0 \wedge \vec{n}_D \cdot (\vec{d} - \vec{v}_2) = 0 \Leftrightarrow -2n_1 + 2n_2 = 0 \wedge -2n_1 + n_3 = 0.$ <p>Ein Normalenvektor von <math>E</math> ist damit <math>\vec{n}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Den Winkel zwischen den Normalenvektoren erhält man aus:</p> $\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{n}_D }{ \vec{n}  \cdot  \vec{n}_D } \Rightarrow \cos(\alpha) = 0,5774... \Rightarrow \alpha \approx 54,74^\circ.$ <p>Da der Winkel der Dachplatte zur Vorbauseite stumpf ist, berechnet er sich zu <math>180^\circ - \alpha \approx 125,26^\circ</math>.</p>		15	
f)	<p>Ohne Dachaufsatz entsteht ein Schatten auf der Wand, der auch den Teil der Wand umfasst, den der Dachaufsatz abdeckt. Der Grund dafür ist, dass der Punkt <math>S_{PV2}</math> einen halben Meter höher auf der Wand ist als der Punkt D – unabhängig von der Position der Lichtquelle im zulässigen Bereich.</p> <p>Teile des Schattens auf der Wand fallen jetzt also auf den Dachaufsatz.</p> <p>Das Dach befindet sich unter allen die Grenze des Schattens markierenden Lichtstrahlen, deshalb hat der Dachaufsatz keinen Einfluss auf die Eckpunkte des Schattens auf der Hauswand.</p>			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25



Lösungsschablone:



## Stochastik 1

### III.1 Sportschuhe

Ein Sportschuhhersteller verkündet, dass sein neuestes Produkt bei 99 % seiner Kunden die Sprintleistung verbessern wird.

- a) Geben Sie an, was gewährleistet sein muss, damit die Anzahl  $X$  der Kunden ohne Verbesserung ihrer Sprintleistung als binomialverteilt angenommen werden kann. Nennen Sie außerdem Gründe, die dagegen sprechen.

Die Zufallsgröße  $X$  beschreibe wie in a) die Anzahl der Kunden, deren Sprintleistungen sich nicht verbessert haben.  $X$  wird im Folgenden als binomialverteilt mit der aus den Herstellerangaben folgenden Wahrscheinlichkeit von 0,01 angenommen.

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Kunden höchstens einer keine Verbesserung der Sprintleistung feststellt.
- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 500 Kunden mehr als 3 keine Verbesserung der Sprintleistung beobachten.
- d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 950 Kunden bei mindestens 12 von diesen keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt.
- e) In einem kleinen Leichtathletik-Verein schwärmen die Mitglieder von dem neuen Schuh und behaupten, bei allen hätten sich die Leistungen verbessert.  
Untersuchen Sie, ob in einem Großverein die gleiche Euphorie ausbrechen könnte.  
*Es liegt auf der Hand, dass bei der Betrachtung hinreichend vieler Personen auch solche dabei sein werden, die keine Verbesserung der Sprintleistung feststellten.*  
*Ermitteln Sie daher die Mindestanzahl von Vereinsmitgliedern, ab der die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen Mitgliedern Leistungsverbesserungen zu beobachten sind, unter 0,05 % sinkt.*
- f) Die Zentrale für Verbraucherschutz hält die allgemeine Begeisterung für übertrieben. Sie möchte ihre Skepsis durch einen Signifikanztest auf dem 5 %-Niveau belegen und dazu 950 Schuhbesitzer aus einer repräsentativen Stichprobe befragen.  
Bestimmen Sie einen entsprechenden Test.
- g) Bereits nach einem halben Jahr sinken die Verkaufszahlen der Sportschuhe signifikant.  
Die Werbeabteilung möchte deswegen eine Kampagne starten, um den Bekanntheitsgrad des Produkts wieder über 80 % zu heben.  
Die Finanzabteilung hält dies für überflüssig. Der Bekanntheitsgrad läge bereits über 80 % und die Ursache für das Sinken der Verkaufszahlen sei eher in der Qualität der Konkurrenzprodukte zu suchen.  
Bestimmen Sie die Hypothesen, die hinter diesen Behauptungen stehen, und beschreiben Sie, durch welches Vorgehen und welche Ergebnisse die jeweiligen Verfechter sich von ihren Standpunkten abbringen ließen.

### Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Es wird eine „ergebnisoffene“ zusammenhängende Darstellung erwartet, z.B.: Die Unabhängigkeit der Ergebnisse muss gewährleistet sein. Sie ist es nicht, sobald ein Sportler aufgrund der Erfahrungsberichte anderer seine Erwartungshaltung anpasst.</p> <p>Es muss davon ausgegangen werden, dass die Sportler ihre eigene Leistung objektiv bewerten, d.h. dass sie auch andere Faktoren, welche die Sprintleistung nicht besser werden lassen, erkennen. Tagesform, Klima, Halle oder Stadion usw. können sich negativ auf die Leistung auswirken, unabhängig von der Qualität des neuen Schuhs.</p>	10		
b)	$P(X \leq 1) = 0,99^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0,01^1 \cdot 0,99^{99} \approx 73,58\% .$	10		
c)	$P(X > 3) = 1 - 0,99^{500} - \binom{500}{1} \cdot 0,01^1 \cdot 0,99^{499} - \binom{500}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{498} - \binom{500}{3} \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{497} \approx 73,64\% .$		10	
d)	<p>Es gilt <math>\sigma = \sqrt{950 \cdot 0,01 \cdot 0,99} = \sqrt{9,405} &gt; 3</math>. Damit kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden. Die Anwendung der integralen Näherungsformel mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion führt zu</p> $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 1 - \Phi\left(\frac{11,5 - 9,5}{\sqrt{9,405}}\right) \approx 1 - \Phi(0,65) \approx 0,26 .$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 12 von 950 Kunden keine Verbesserung der Sprintleistungen eintritt, ist etwa 26 %.</p>		15	
e)	<p>Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl <math>n</math>, für die gilt <math>0,99^n &lt; 0,0005</math>.</p> <p>Es ergibt sich <math>n &gt; \frac{\lg 0,0005}{\lg 0,99} \approx 756,28</math>.</p> <p>In einem Verein mit mehr als 756 Mitgliedern ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei allen Mitgliedern die Sprintleistungen verbessern, kleiner als 0,05%. In einem Großverein wird eine Euphorie also kaum ausbrechen.</p>		10	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Es sei <math>p</math> die Einzelwahrscheinlichkeit, dass bei einem Kunden durch den Schuhkauf keine Verbesserung der Sprintleistung eintritt. Die Verbraucherschutzzentrale wird die Nullhypothese <math>H_0: p \leq 1\%</math> zu verwerfen versuchen.</p> <p>Viele unzufriedene Kunden sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei <math>X</math> die Anzahl unzufriedener Kunden unter den 950 Kunden. Gesucht ist eine kleinste Grenze <math>g</math>, so dass <math>P(X &gt; g   H_0) \leq 5\%</math>.</p> <p>Nun ist <math>P(X &gt; g   H_0) &lt; P(X &gt; g   p = 0,01)</math>. Man bestimmt daher <math>g</math> so klein wie möglich, damit die rechte Seite kleiner oder gleich 5 % wird. Wie in d) kann die Normalverteilung zur Approximation verwendet werden:</p> $P(X > g   p = 0,01) = 1 - P(X \leq g   p = 0,01) \approx 1 - \Phi\left(\frac{g + 0,5 - 9,5}{\sqrt{9,405}}\right)$ $\Phi\left(\frac{g + 0,5 - 9,5}{\sqrt{9,405}}\right) = 0,95. \text{ Die Tabelle liefert } \frac{g + 0,5 - 9,5}{\sqrt{9,405}} \approx 1,65 \text{ und daher ist } g \approx 14, \dots$ <p>Die Nullhypothese sollte also verworfen werden, wenn mehr als 15 der Befragten keine Verbesserung der Sprintleistungen durch den neuen Schuh erfahren haben.</p>		10	20
g)	<p>Bezeichne <math>p</math> den Bekanntheitsgrad des Produkts.</p> <p>Dann vertreten die Werber die Meinung, dass <math>p \leq 0,8</math>. Sie lassen sich nur durch signifikant große Stichprobenergebnisse vom Gegenteil überzeugen.</p> <p>Die Finanzabteilung vertritt den Standpunkt, dass <math>p &gt; 0,8</math>. Sie ändert ihre Meinung nur durch signifikant kleine Stichprobenergebnisse.</p> <p><i>Andere in sich stringente Lösungen sind ebenfalls als richtig zu bewerten.</i></p>		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

## Stochastik 2

### III.2 Lichterkettenproduktion

Eine Firma stellt hochwertige Lichterketten für den Einsatz im Außenbereich her, die durch ihre spezielle Konstruktion, bei der die einzelnen Glühlampen – im Volksmund auch *Glühbirnen* genannt – fest eingelötet werden, jedem Wetter standhalten sollen. Die Ketten werden an die Abnehmer mit folgender Garantie verkauft: Wenn die Lichterkette nicht einwandfrei funktioniert, so erhält der Kunde 20 € als Entschädigung.

Bei der Produktion sind zwei voneinander unabhängige Fehler möglich:

- Die Glühlampen können bereits vor dem Einlöten defekt sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe defekt ist, beträgt erfahrungsgemäß 4 %.
- Der Zusammenbau der Kette kann fehlerhaft erfolgen, z.B. indem ein Kontakt (oder mehrere) nicht richtig gelötet wird. Die Wahrscheinlichkeit für fehlerhaften Zusammenbau einer Kette beträgt erfahrungsgemäß 5 %.

Eine Lichterkette enthält 24 Glühlampen.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lichterkette einwandfrei funktioniert.
- b) Ein Kunde hat eine defekte Lichterkette reklamiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Kette alle Glühlampen heil sind und damit der Fehler nur im Zusammenbau liegt.
- c) Es gehen gleich nach Verkaufsbeginn viele Garantieansprüche bei der Firma ein. Die hohen Kosten geben den Verantwortlichen zu denken. Daher beauftragen sie einen Stochastiker, um die Gründe zu klären. Dieser berechnet zunächst den Erwartungswert der Garantiekosten für 1 000 verkaufte Lichterketten. Berechnen auch Sie diesen Wert.

Anschließend wird in der Firma diskutiert, ob man nicht besser die einzelnen Glühlampen vor dem Zusammenbau oder auch die fertig gestellte Kette vor dem Verkauf kontrollieren sollte. Ein Mitarbeiter stellt die Kosten für die Kontrolle zusammen: Jede Funktionskontrolle einer Glühlampe kostet 0,06 € die Kontrolle der Kette 0,40 €. Dabei hat er die Kosten für den Arbeitsplatz und die Arbeitszeit des Prüfers berücksichtigt.

Nun soll die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten für drei verschiedene Möglichkeiten berechnet werden (siehe Aufgabenteile d) bis f)), und zwar für jeweils 1000 zum Verkauf kommende Ketten. Die Gesamtkosten will man dann mit dem in c) berechneten Erwartungswert vergleichen.

- d) Fall 1: Es werden nur die Lampen kontrolliert.  
Bestimmen Sie die Zahl der durchschnittlich zu kontrollierenden Lampen, damit man 24 funktionierende Lampen erwarten kann.  
Da keine Kontrolle der Kette erfolgen soll, kommen dennoch defekte Ketten zum Verkauf. Bestimmen Sie für diesen Fall die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.
- e) Fall 2: Es werden nur die fertigen Ketten kontrolliert.  
Wenn die Ketten kontrolliert werden, kommen natürlich nur brauchbare Ketten in den Verkauf. Ermitteln Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten.
- f) Fall 3: Es werden die Lampen und die Ketten kontrolliert.  
Bestimmen Sie die Summe der zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten, wenn sowohl die einzelnen Glühlampen als auch die fertigen Ketten kontrolliert werden.
- g) Mit den so bestimmten Gesamtkosten ist der zuständige Betriebswirtschaftler nicht einverstanden. Er meint, dass man die Materialkosten und die Arbeitszeit für den Zusammenbau der Ketten ebenfalls berücksichtigen muss und zwar mit 3 € pro Kette, unabhängig davon, ob die Kette in den Verkauf geht oder bei einer Kontrolle aussortiert wird. Die Materialkosten für aussortierte Glühlampen will aber auch er vernachlässigen.  
Ermitteln Sie unter dieser Annahme das kostengünstigste Kontrollverhalten der Firma.

## Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Jede einzelne Glühlampe muss funktionieren und auch der Zusammenbau muss korrekt erfolgt sein. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. 36 %: $0,96^{24} \cdot 0,95 \approx 0,3566$ .	10		
b)	Die Lösung erfolgt über die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit bei geeigneter Definition von Ereignissen: A: Alle Glühlampen sind heil. B: Die Lichterkette ist defekt. Gesucht ist $P(A   B)$ : Gegeben ist in der Aufgabe $P(A \cap B) = 0,96^{24} \cdot 0,05 \approx 0,0188$ , und mit Aufgabenteil a) erhält man $P(B) \approx 1 - 0,3566 = 0,6434$ . Also ist $P(A   B) \approx \frac{0,0188}{0,6434} \approx 0,0292$ . Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler nur im Zusammenbau ist knapp 3 %.		15	
c)	Da für jede defekte verkaufte Kette 20 € anfallen, ergibt sich mit dem Wert aus a) für 1 000 Ketten $(1 - 0,3566) \cdot 20 \text{ €} \cdot 1000 = 12\,868 \text{ €}$	10		
d)	<u>Fall 1</u> : Da 4 % aller Glühlampen defekt sind, erwartet man bei 25 geprüften Lampen durchschnittlich 24 Lampen, die funktionieren. ( $25 \cdot 0,96 = 24$ ). Es fallen somit Kontrollkosten von $25 \cdot 0,06 \text{ €} = 1,50 \text{ €}$ pro zusammengebaute Kette an. Wegen Fehlern bei Zusammenbau sind aber durchschnittlich 50 von 1 000 verkauften Ketten dennoch defekt, also muss man mit $50 \cdot 20 \text{ €} = 1\,000 \text{ €}$ Garantiekosten rechnen. Die zu erwartenden Kontroll- und Garantiekosten betragen $1\,000 \cdot 1,50 \text{ €} + 1\,000 \text{ €} = 2\,500 \text{ €}$		15	
e)	<u>Fall 2</u> : Damit 1 000 Ketten in den Verkauf kommen, müssen durchschnittlich $\frac{1000}{0,96^{24} \cdot 0,95} \approx 2804$ Ketten kontrolliert werden. Die zu erwartenden Kontrollkosten sind somit $2\,804 \cdot 0,40 \text{ €} = 1\,121,60 \text{ €}$ Garantiekosten entfallen, da alle verkauften Ketten intakt sind.		15	
f)	<u>Fall 3</u> : Wie unter d) berechnet, betragen die Kontrollkosten zur Gewinnung einer Kette mit intakten Glühlampen im Mittel 1,50 €. Da jetzt 95% aller zu prüfenden Ketten intakt sind, muss man $1\,000 : 0,95 \approx 1\,053$ Ketten mit intakten Glühlampen weiter prüfen. Die Kontrollkosten und damit die zu erwartenden Gesamtkosten betragen somit $1\,053 \cdot (1,50 \text{ €} + 0,40 \text{ €}) = 2\,000,70 \text{ €}$		15	

Lehrermaterialien zum Leistungskurs Mathematik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	<p>Für jede zusammengebaute Kette müssen jetzt Kosten in Höhe von 3 € zusätzlich berücksichtigt werden.</p> <p>Damit erhält man ohne Kontrolle 15 868 € da bei 1 000 verkauften Ketten auch nur 1000 zusammengebaut werden (<math>12\,868\text{€} + 1\,000 \cdot 3\text{€}</math>).</p> <p>Im <u>Fall 1</u> erhält man aus dem gleichen Grunde <math>2\,500\text{€} + 1\,000 \cdot 3\text{€} = 5\,500\text{€}</math></p> <p>Im <u>Fall 2</u> werden 2 804 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt <math>1\,121,60\text{€} + 2\,804 \cdot 3\text{€} = 9\,533,60\text{€}</math></p> <p>Im <u>Fall 3</u> werden 1 053 Ketten zusammengebaut, also betragen die Kosten jetzt <math>2\,000,70\text{€} + 1\,053 \cdot 3\text{€} = 5\,159,70\text{€}</math></p> <p>Unter dieser Annahme ist es am günstigsten, alles zu prüfen (Fall 3).</p>			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20