Schriftliche Abiturprüfung 2007

Mathematik

Hinweise und Beispiele zu den
zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben

Teil 2: Lin. Algebra / Analyt. Geometrie

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport
Amt für Bildung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referat: Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung: Werner Renz, B 22-2

Redaktion:
Waltraut Barthel, Gymnasium Tonndorf
Manfred Dabelstein, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Winfried Euba, BBS und Sankt-Ansgar-Schule
Dr. Janina Fehrmann, Hansa-Gymnasium Bergedorf
Stefan Gottuk, Gymnasium Hamm
Jochen W. Griese, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Ulrike Gutschner, Gelehrtenschule des Johanneums
Dr. Klaus Henning, Christianeum
Thea Hufschmidt, Sophie-Barat-Schule
Reinhard Janz, Technisches Gymnasium (G 16)
Gerd Johänning, Wirtschaftsgymnasium (H 2)
Dr. Ulrich Kotzott, Gymnasium Willhöden
Dr. Wolfgang Löding, Li-Q
Antje Loose, Charlotte-Paulsen-Gymnasium
Ursula Mersiowsky, Gymnasium Oberalster
Gerd Muhra, Gesamtschule Mümmelmannsberg
Kerstin Ottenberg, Gymnasium Kirchdorf/Wilhelmsburg
Renate Otter, Peter-Petersen-Schule
Annelies Paulitsch, Li-A und Gymnasium Osdorf
Helmut Springstein, Li-F und Gymnasium Othmarschen
Monika Thomas-Tschirschnitz, Hansa-Kolleg
Dieter Stahl, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium
Karl-Heinz Wischnewski, Technisches Gymnasium (G 17)

Internet: www.daten-fakten.bbs.hamburg.de

Hamburg 2006

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

mit der zum August 2003 in Kraft tretenden *Ausbildungs- und Prüfungsordnung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife* (APOAH) wurden zentrale Elemente in der schriftlichen Abiturprüfung eingeführt.

Die Abituraufgaben beziehen sich im Fach Mathematik auf Schwerpunkte, die den Schulen jeweils am Ende der Vorstufe für das Abitur dieses Jahrgangs von der Behörde für Bildung und Sport in einer eigenen Verwaltungsvorschrift zur Kenntnis gegeben werden.

In der Ihnen hier vorgelegten ergänzenden Handreichung, die die entsprechende Verwaltungsvorschrift ausführt, werden Ihnen Beispiele gezeigt, wie die Aufgaben für die schriftlichen Abiturprüfungen ab dem Jahre 2007 sowie der nachfolgenden Jahre formuliert werden.

Die Aufgabenbeispiele entsprechen in den meisten Fällen der Ihnen bekannten Hamburger *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*. Die Arbeitsgruppe, die die Handreichung erstellte, hatte den Auftrag, Aufgabenbeispiele auf der Grundlage des neuen Rahmenplans Mathematik für die gymnasiale Oberstufe 2004 zu formulieren.

Die Aufgaben enthalten verbindlich definierte Arbeitsaufträge („Operatoren“); in den Erwartungshorizonten werden die Kriterien und die Anforderungen u. a. für eine „gute“ und für eine „ausreichende“ Leistung beschrieben. Beides dient dem Ziel, mehr Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit zu schaffen.

Hinzu kommt, dass die *Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung* (EPA) für alle Prüfungsfächer derzeit überarbeitet werden. Für Mathematik liegen sie bereits vor. Wenn alle neuen EPA als KMK-Beschlüsse vorliegen, wird die oben genannte Hamburger Richtlinie überarbeitet und den jeweiligen EPA angepasst werden. Erst dann wird es für die Aufgabenarten und die Anforderungen vermutlich Veränderungen geben.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Sie und Ihre Unterrichtsarbeit ist, wünsche ich Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern eine erfolgreiche Vorbereitung auf das Abitur.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die diese Handreichung erstellte, möchte ich sehr herzlich für die geleistete intensive und zeitaufwendige Arbeit danken.

Werner Renz

1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung

Die Fachlehrerin, der Fachlehrer

- erhält **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Themenbereiche G/L 1 und G/L 4) und **II.1, II.2** (Schwerpunkt Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Schwerpunkt Stochastik),
- wählt aus genau zwei Bereichen **I und II** *oder* **I und III** genau **drei** Aufgaben aus.

Die Abiturientin, der Abiturient

- erhält **alle drei** Aufgaben und bearbeitet diese,
- vermerkt auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie/er bearbeitet hat,
- ist verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Bearbeitungszeit:	Grundkurs: **240** Minuten Leistungskurs: **300** Minuten Eine Vorbereitungs-, Lese- und Auswahlzeit von maximal 30 Minuten kann der Arbeitszeit vorgeschaltet werden. In dieser Zeit darf noch nicht mit der Lösung der Aufgaben begonnen werden.
Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig), Formelsammlung, Rechtschreiblexikon

Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten **Operatoren** (Arbeitsaufträge) werden im Anhang genannt und erläutert.

Grundlage der schriftlichen Abiturprüfung ist der geltende Rahmenplan in der Fassung von 2004. **Der inhaltliche Rahmen für die schriftliche Abiturprüfung 2007 wird durch die *Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* festgelegt und konkretisiert**. Die wechselnden curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen werden den Schulen jeweils im zweiten Semester der Vorstufe bekannt gegeben. Für die schriftliche Abiturprüfung 2007 können sie dem Heft *Schriftliche Abiturprüfung 2007 - Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* entnommen werden.

2 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Abiturprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen.

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung ermöglichen Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang sowie die Beschreibung und Anwendung geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem wiederholenden Zusammenhang.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich I gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z.B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z.B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich II gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme
- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind

- sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst das zielgerichtete Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler aus den gelernten Arbeitstechniken und Verfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig aus, wenden sie in einer neuen Problemstellung an und beurteilen das eigene Vorgehen kritisch.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich III gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z.B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind

3 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III** (vgl. die *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*), wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen **I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzählen	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu …
Begründen **II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
Berechnen **I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Beschreiben **I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen in eigenen Worten wiedergeben (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“)	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen möglichen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein)	Ermitteln Sie graphisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
Entscheiden **II**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.
Erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes graphisch darstellen (auch Freihandskizze möglich)	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.
Untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen	Untersuchen Sie die Funktion … Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Geraden einmündet.
Vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge … nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
Zeichnen, graphisch darstellen **I–II**	Eine hinreichend exakte graphische Darstellung anfertigen	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, nachweisen **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.

4 Aufgabenbeispiele

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für zentrale schriftliche Abiturprüfungen im Fach Mathematik zu den oben genannten curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen.

Außer der Aufgabenstellung enthalten die Beispiele den Erwartungshorizont, Hinweise zu den Operatoren mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen, Bewertungshinweise sowie – z.B. bei Aufgabenbeispielen für das Technische Gymnasium – Hinweise darüber, für welche Lerngruppen sie konzipiert wurden:

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Abiturprüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Erreichte Gesamtpunktzahl	Erreichte Gesamtleitung in Prozent	Bewertung in Punkten
≥ 285 BWE	≥ 95 %	15
≥ 270 BWE	≥ 90 %	14
≥ 255 BWE	≥ 85 %	13
≥ 240 BWE	≥ 80 %	12
≥ 225 BWE	≥ 75 %	11
≥ 210 BWE	≥ 70 %	10
≥ 195 BWE	≥ 65 %	9
≥ 180 BWE	≥ 60 %	8
≥ 165 BWE	≥ 55 %	7
≥ 150 BWE	≥ 50 %	6
≥ 135 BWE	≥ 45 %	5
≥ 120 BWE	≥ 40 %	4
≥ 99 BWE	≥ 33 %	3
≥ 84 BWE	≥ 26 %	2
≥ 57 BWE	≥ 19 %	1
< 57 BWE	< 19 %	0

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75%) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht wurden.

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

4.1 Grundkurs

Aufgabe 1 Vegetation

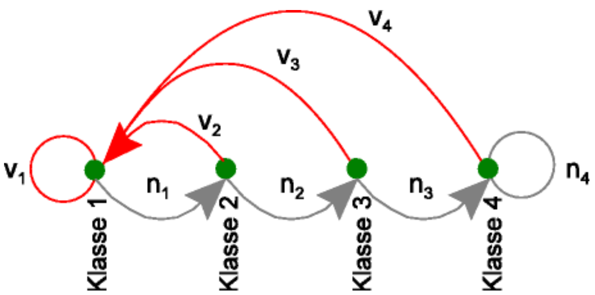
In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigtem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km² eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral“.

Die Brennbarkeit dieser Pflanzen hängt sehr von ihrem Alter ab. Besonders leicht brennen die älteren Pflanzen wegen der großen Mengen verdorrten Materials. Brände haben abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass die Gebiete mit dürrem Material nicht zu groß werden.

Diese Situation lässt sich z.B. in folgendem Modell darstellen:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
  Klasse 1: 0 - 10 Jahre
  Klasse 2: 10 - 20 Jahre
  Klasse 3: 20 - 30 Jahre
  Klasse 4: 30 Jahre und älter.
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km².

Die Entwicklung der Vegetation in diesem Modell beschreibt der folgende Graph:



Bezeichnungen:
v_i = Anteil von Klasse i, der verbrennt ($v_i < 1$)
n_i = Anteil von Klasse i, der nicht verbrennt ($n_i < 1$)

a) Geben Sie unter Verwendung der Zahlenwerte in der Tabelle und gemäß dem Graphen bzw. dem oben stehenden Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix) L an und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Verbrennende Anteile	$v_1 = 0{,}01$	$v_2 = 0{,}02$	$v_3 = 0{,}50$	$v_4 = 0{,}20$
Nicht verbrennende Anteile	$n_1 = 0{,}99$	$n_2 = 0{,}98$	$n_3 = 0{,}50$	$n_4 = 0{,}80$

b) Begründen Sie, warum für alle vier Klassen $n_i + v_i = 1$ gelten muss.

c) Zu Beginn der Modellierung nehmen die Klassen die folgenden Flächen (in km^2) ein:

Klasse 1: 302   Klasse 2: 284   Klasse 3: 314   Klasse 4: 1100

Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Leslie-Matrix L eine Prognose für die Flächenmaße der einzelnen Klassen nach 10 Jahren (1 Zeittakt).

d) Berechnet man von der Matrix L aus Aufgabenteil a) die Potenzen L^2, L^3, L^4, … usw., so stellt man fest, dass sich die Matrizen L^n für größere Werte von n kaum noch voneinander unter scheiden. So stimmen die gerundeten Matrizen L für $n \geq 30$ mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0,185 & 0,185 & 0,185 & 0,185 \\ 0,185 & 0,185 & 0,185 & 0,185 \\ 0,18 & 0,18 & 0,18 & 0,18 \\ 0,45 & 0,45 & 0,45 & 0,45 \end{pmatrix}$$

Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

e) Die Berechnung in Aufgabenteil c) (und auch in d)) kann als Funktion aufgefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion (Zuordnungsvorschrift, Definitions- und Zielmenge), und geben Sie als Beispiel mit Ihrer Funktion die Rechenvorschrift für *Prognose in 50 Jahren* an.

f) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch.

Dabei soll im Modell das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren (also am Ende eines Zeittaktes) auf einmal stattfinden, wobei jeweils 2% von Klasse 2, 2% von Klasse 3 und 7% von Klasse 4 abbrennen.

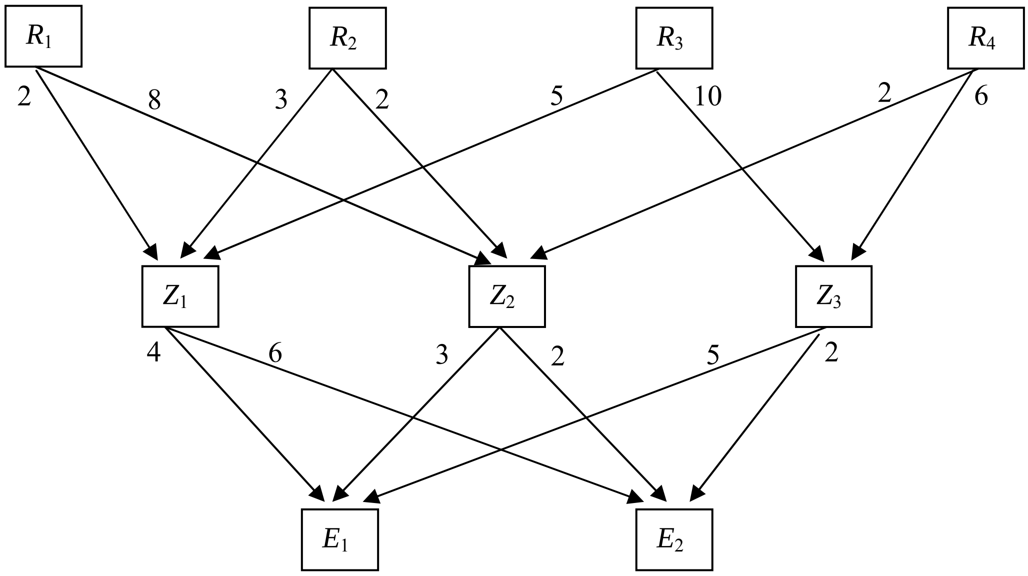
Bestimmen Sie als Modell zur Berechnung der Folgen für die Vegetation eine entsprechende Matrix M.

Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mit Hilfe der Matrizen M und L und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 2 Kosten-Preis-Kalkulation

Ein Industriebetrieb verarbeitet die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3. Aus diesen Zwischenprodukten werden zwei Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt.

Der folgende Graph (auch Gozintograph genannt) zeigt, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Rohstoffe für eine ME eines Zwischenproduktes und wie viele ME der Zwischenprodukte für eine ME eines Endproduktes benötigt werden.



a) Berechnen Sie die Rohstoff/Zwischenproduktmatrix A die Zwischen-/Endproduktmatrix B sowie die Rohstoff/Endproduktmatrix C.

b) Ein Kunde bestellt 20 ME von Endprodukt E_1 und 30 ME von Endprodukt E_2.

- Berechnen Sie die zur Abwicklung des Auftrages notwendigen Mengen an Rohstoffen und an Zwischenprodukten.

- Ermitteln Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung die Gesamtkosten K des Kundenauftrages. Die Kostenrechnung liefert für die Kalkulation die nachstehend aufgeführten variablen Kosten. Die fixen Kosten werden grundsätzlich mit 20 % der variablen Kosten veranschlagt.

Materialkosten je ME der Rohstoffe:	R_1: 5,00 €,	R_2: 1,00 €,	R_3: 3,00 €,	R_4: 2,00 €;
Herstellkosten je ME der Zwischenprodukte.:	Z_1: 40,00 €,	Z_2: 20,00 €,	Z_3: 50,00 €;	
Herstellkosten je ME der Endprodukte:	E_1: 250,00 €,	E_2: 100,00€.		

- Bestimmen Sie den Mindestverkaufspreis p_{Min} der Endprodukte auf volle Euro gerundet, wenn beide Produkte zum gleichen Preis verkauft werden sollen und der Betrieb ohne Verlust arbeiten will.

c) Zukünftig sollen die Rohstoffvorräte des Betriebes dem tatsächlichen Absatz der Endprodukte angepasst werden. Neueste Marktuntersuchungen haben ergeben, dass sich die Endprodukte E_1 und E_2 im Mengenverhältnis von 1 : 3 absetzen lassen.

- Zeigen Sie, dass die Rohstoffvorräte unter Berücksichtigung des oben angegebenen Mengenverhältnisses dem folgenden Mengenvektor entsprechen müssen:

$$\vec{x}_R = \begin{pmatrix} 116x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \\ 220x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \end{pmatrix}.$$

- Vom Rohstoff R_4 sind vorübergehend nur begrenzte Mengen erhältlich, und zwar höchstens 20.160 ME.

  Bestimmen Sie, wie viele Endprodukte von E_1 und von E_2 unter Beibehaltung des obigen Mengenverhältnisses von 1:3 maximal noch produziert werden können.

- Beurteilen Sie kurz die Probleme der Lagerhaltung bezüglich des Kapitalbedarfs und der Finanzierung.

Aufgabe 3 Käferpopulation

Grundlage der Aufgabe: E. LEHMANN, Lineare Algebra mit dem Computer, Stuttgart 1983, S. 186f

Die Entwicklung eines Käfers beschreibt das folgende Modell:

Aus den Eiern schlüpfen nach einem Monat Larven, nach einem weiteren Monat werden diese zu Käfern, die nach einem Monat Eier legen und dann sterben.

- Aber nur aus einem Viertel der Eier werden Larven, die anderen Eier werden von Tieren gefressen oder verenden.
- Von den Larven wird die Hälfte zu Käfern, die andere Hälfte stirbt.

Jeder Käfer legt 8 Eier.

a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Graphen dar und geben Sie die Populationsmatrix P an.

Berechnen Sie mit P, wie eine Population von 40 Eiern, 40 Larven und 40 Käfern nach einem Monat aussieht.

b) Die in a) angegebene Population soll über einen längeren Zeitraum beobachtet werden. Dazu benötigt man ein kleines Terrarium, wenn die Anzahl der Käfer im Laufe der Zeit nicht über 60 ansteigt, andernfalls ein großes.

Ermitteln Sie, welches Terrarium nach dem Populationsmodell gekauft werden muss.

c) Bestimmen Sie für das Populationsmodell einen Anfangsbestand, der nach einem Monat unverändert ist.

Beschreiben Sie die Langzeitentwicklung dieses Bestandes.

d) Bestimmen Sie für die Populationsmatrix P die Potenzen P^2 und P^3,

und zeigen Sie damit, dass $P^3 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \textit{Einheitsmatrix}$ gilt.

Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im Kontext der Population.

e) Diese Teilaufgabe ist eine Verallgemeinerung von d):

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{Q}_0^+$ und $0 \le b, c \le 1$.

Ermitteln Sie Bedingungen für a, b und c, damit $M^3 = E = \textit{Einheitsmatrix}$.

Zeigen Sie, dass für diese Matrizen M dann $M^4 = M$ gilt, und beurteilen Sie das Ergebnis im Hinblick auf alle Potenzen der Matrix M.

Aufgabe 4 Fruchtsäfte

Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte. Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt. Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz			
$R \to Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	a_{31}	0	a_{33}
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz			
$Z \to E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

a) Berechnen Sie die Elemente a_{31} und a_{33} in der Rohstoffeinsatzmatrix A so, dass die Rohstoff/Endproduktmatrix C wie folgt lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 hergestellt werden können.

b) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A gab es einen Ausfall bei der Herstellung des Zwischenproduktes Z_2. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden. Zurzeit sind am Lager in Werk B nur noch die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.

Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3.
Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.
Zeigen Sie durch eine Berechnung, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

c) Um auf Dauer einen reibungslosen Produktionsablauf in Werk B zu gewährleisten, soll das Lager nach der Renovierung einen Mindestbestand an Zwischenprodukten aufweisen.

Untersuchen und beurteilen Sie ohne Rechnungen die Probleme der Lagerhaltung bezüglich des Kapitalbedarfs und der Finanzierung.

Fortsetzung nächste Seite →

d) Zukünftig soll die Produktion im Werk A auf eine neue, sicherere Fertigungstechnik umgestellt werden. Bei dieser Technik ändern sich in Abhängigkeit von einem Technologieparameter t sowohl der Rohstoffeinsatz als auch die Fertigungskosten für die Zwischenproduktion.

Die Gesamtkosten K für die Herstellung von je 1 ME der Zwischenprodukte belaufen sich in GE

nach alter Technik auf $K_{alt} = 5000$ und

nach neuer Technik auf $K_{neu} = t^3 + 12t^2 - 144t + 5000$ mit $t \in \left]0;9\right]$.

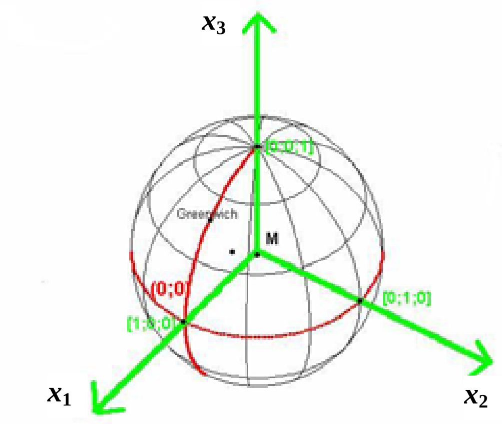
- Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Gesamtkosten K minimal werden.
- Ermitteln Sie, für welche ganzzahligen Werte von t das neue Produktionsverfahren kostengünstiger ist als das alte Verfahren, und beurteilen Sie die neue Kostensituation des Betriebes.

Aufgabe 5 GPS

Eine Person bestimmt ihre Position auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines GPS-Gerätes. Dieser Vorgang soll in dieser Aufgabe prinzipiell nachvollzogen werden.

Wir machen dazu folgende vereinfachende Annahmen:

- Die Erde ist eine ideale Kugel mit einem Umfang von 40 000 km und dem zugehörigen Radius von $R =$ 6 366 km. Als Längeneinheit wählen wir gerade diesen Erdradius.
- Weiterhin betrachten wir folgendes erdgebundene Koordinatensystem:
  Der Koordinatenursprung ist der Erdmittelpunkt. Die x_3-Achse liegt auf der Erdachse und zeigt zum Nordpol. Der Nordpol ist also der Einheitspunkt auf der x_3-Achse mit den Koordinaten (0 | 0 | 1).
  Die x_1-Achse geht durch den Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian, dieser Punkt mit den geographischen Koordinaten 0° Breite und 0° Länge ist der Einheitspunkt auf der x_1-Achse, hat also die Koordinaten (1 | 0 | 0) .
  Der Einheitspunkt auf der x_2-Achse hat dann 0° Breite und 180° östliche Länge und die Koordinaten (0 | 1 | 0).



- Zu einem genau fixierten Zeitpunkt der Positionsbestimmung empfängt die Person mit ihrem GPS-Gerät von zwei GPS Satelliten deren genaue Positionen Sat_1 und Sat_2 in dem genannten rechtwinkligen Koordinatensystem. Außerdem empfängt der GPS-Empfänger die genaue Uhrzeit in den Satelliten zum Zeitpunkt der Aussendung der Signale. Aus der Zeitdifferenz der beiden Uhren in den Satelliten und im GPS-Empfänger zum Empfangszeitpunkt kann dieser (mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit) die Entfernungen d_1 und d_2 von seiner unbekannten Position zu den beiden Satelliten berechnen. (Dies ist in Wirklichkeit wegen der Ungenauigkeit der Empfängeruhr komplizierter!).

Nun zur eigentlichen Aufgabe:

Es sei Sat_1 (2 | 2 | 3) und $d_1 = 3{,}2$ und ebenso Sat_2 (3 | 2 | 2) und $d_2 = 3{,}3$.

a) Beschreiben Sie den prinzipiellen Weg, wie man den Standort der Person aus den gegebenen Daten berechnen kann.

b) Betrachten Sie die Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und geben Sie die Gleichung der Kugeloberfläche an.
Diese Kugeloberfläche schneidet die Erdoberfläche in einem Schnittkreis. Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dieser Schnittkreis liegt.

c) Die gleiche Rechnung wie in b) für die Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2 ergibt die folgende Gleichung für die Schnittkreisebene: E_2: $600x + 400y + 400z = 711$.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Parameterform.

d) Beschreiben Sie, wie man aus den bisherigen Daten die Koordinaten von zwei Punkten ermitteln kann, von denen einer der Standort der Person sein muss.

e) Die Person weiß immerhin, dass sie sich in Nordeuropa aufhält. So kann sie aus den berechneten beiden Punkten den für sie zutreffenden Punkt auswählen: *Pos* (57,3° | 17,5°).

Bestimmen Sie die Länge des kürzesten Weges auf der Erdoberfläche von Hamburg (53,5° | 10°) zum Standort *Pos* der Person.

Aufgabe 6 Louvre Pyramide

Der Eingang des berühmten Pariser Kunst-Museums "Louvre" wird durch eine Glas-Pyramide mit quadratischer Grundfläche gebildet:

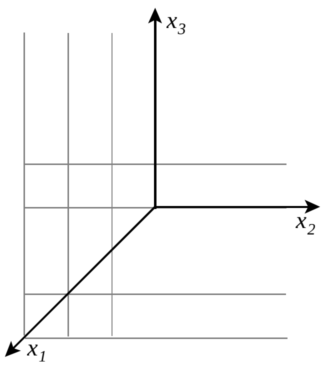
Die Breite beträgt ungefähr 35 m und die Höhe 22 m.

Diese Pyramide wird jetzt in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem (mit den Längeneinheiten von jeweils 1 m) betrachtet.

Die Bodenfläche sei die x_1-x_2-Ebene, und die x_3-Achse sei lotrecht nach oben gerichtet.
Das Koordinatensystem sei weiterhin so gewählt, dass die vier Eckpunkte auf dem Boden die folgenden Koordinaten haben:

$A(\,0\,|\,0\,|\,0\,)$ $\quad B(35\,|\,0\,|\,0\,)$ $\quad C(\,35\,|\,35\,|\,0\,)$ $\quad D(\,0\,|\,35\,|\,0\,)$

a) Die Dachspitze sei S. Begründen Sie, dass S die folgenden Koordinaten hat: (17,5 | 17,5 | 22).
Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein. 1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.



b) Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Koordinatenform der Ebene $\boldsymbol{E}$, in der die Pyramidenseitenfläche ABS liegt.

c) Bestimmen Sie den Winkel, den die Seitenflächen der Pyramide jeweils mit dem Fußboden bilden.

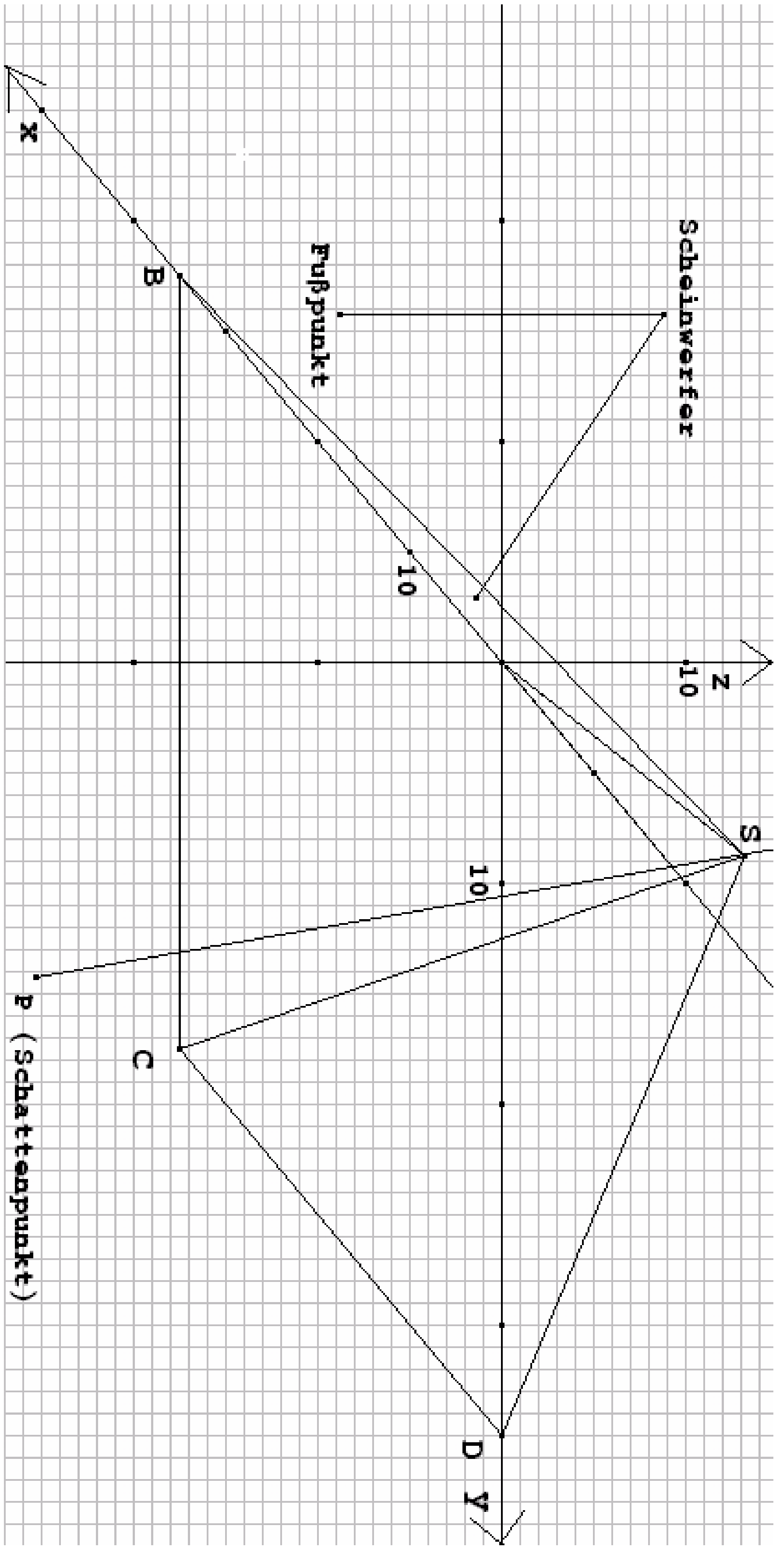
d) Um ein Angebot für die Fensterreinigung einzuholen, muss man den Flächeninhalt der Glasflächen berechnen. Berechnen Sie dazu zuerst den Flächeninhalt eines der vier (kongruenten) Seitendreiecke und dann die gesamte innen und außen zu reinigende Glasfläche.

e) Am Tage fällt bei schönem Wetter (paralleles) Sonnenlicht auf die Pyramide. Zum nun betrachteten Zeitpunkt sei der Richtungsvektor vom Sonnenlicht $\vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes P der Pyramidenspitze auf dem Boden.

f) Nachts sollen zur Verstärkung der Lichteffekte dann und wann die Seitenflächen der Pyramide von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden.
Einer der Scheinwerfer soll mit Hilfe eines Lichtmastes lotrecht über dem Bodenpunkt $F(17{,}5\,|\,{-7}\,|\,0)$ angebracht werden. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle soll die Seitenfläche ABS so beleuchten, dass das Licht im Schwerpunkt dieser Seitenfläche senkrecht auftrifft.
Zeigen Sie zunächst, dass der Schwerpunkt M_1 die Koordinaten $\left(\frac{35}{2}\,|\,\frac{35}{6}\,|\,\frac{22}{3}\right)$ hat.
Bestimmen Sie dann die notwendige Höhe der Lichtquelle über dem Boden.

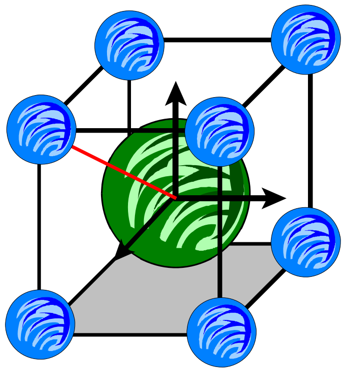
Schrägbild



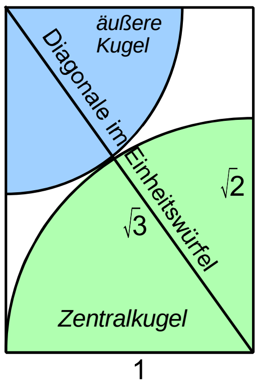
Aufgabe 7: Elementarzelle

Ein Würfel mit der Kantenlänge $a = 2$ heiße Elementarzelle.
Diese Elementarzelle wird in einem Koordinatensystem so angeordnet, dass ihr Zentrum im Koordinatenursprung liegt und die Würfelkanten parallel zu den Koordinatenachsen angeordnet sind.

Acht gleich große Kugeln werden jetzt so angebracht, dass ihre Mittelpunkte je einen der Eckpunkte der Elementarzelle bilden.
Die neunte Kugel, die Zentralkugel, hat ihren Mittelpunkt im Zentrum der Elementarzelle, also im Ursprung des Koordinatensystems. Die Zentralkugel berührt alle anderen acht Kugeln. Ihr Radius sei mit r bezeichnet.



schematische Darstellung



a) Beschreiben Sie, warum dann die äußeren Kugeln den Radius $r_a = \sqrt{3} - r$ aufweisen.
Geben Sie den Definitionsbereich von r an.

b) Bestimmen Sie zunächst r so, dass das nicht von den neun Kugeln eingenommene Volumen in der Elementarzelle maximal ist. (Bedenken Sie dabei, dass die äußeren acht Kugeln nicht vollständig in der Elementarzelle liegen!)

c) Bestimmen Sie dann r so, dass die gesamte Oberfläche der neun Kugeln in der Elementarzelle extremal wird. Um welche Art von Extremum handelt es sich?

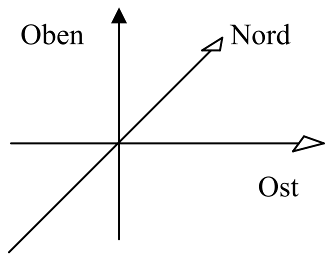
d) Die hier behandelten Elementarzellen mit ihren Kugeln sind eine Darstellung eines bestimmten Kristalltyps, und zwar des so genannten kubisch-raumzentrierten Kristalls. (Ein Kristall „entsteht“ aus der Elementarzelle, indem man in alle Raumrichtungen dieselbe Elementarzelle immer wieder neu ansetzt.)
Steinsalz – also NaCl – kristallisiert in dieser Form, bildet also kubisch-raumzentrierte Kristalle. Ersichtlich kommen in einem Steinsalzkristall Natriumatome und Chloratome in gleicher Anzahl vor.

Begründen Sie, dass in einer Elementarzelle ebenfalls gleich viel Kugeln des Typs „Zentralkugel“ und des Typs „äußere Kugel“ vorkommen.

Beim Steinsalzkristall verhalten sich die Radien der Na-Atome und der Cl-Atome wie 43 : 57. Welcher Volumenanteil der Elementarzelle wird von den Atomen eingenommen?
Beurteilen Sie dieses Radienverhältnis im Lichte Ihrer bisherigen Ergebnisse.

Aufgabe 8 Flugbahnen

Wir betrachten ein Koordinatensystem im Raum.
Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koordinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben. Entgegen der üblichen Schreibweise wird hier, angepasst an die Navigation auf der Erde, die folgende Darstellung gewählt:



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ost} \\ \text{Nord} \\ \text{Oben} \end{pmatrix}$$

Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.

Gegeben sind vier Punkte im Raum:

$A(-5 \mid -9 \mid 8)$ $B(5 \mid 1 \mid 8)$ $C(13 \mid 33 \mid 10)$ $D(19 \mid 27 \mid 9)$.

Die Geraden

$$g:\ \vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}),\quad t \in \mathbb{R}$$
$$h:\ \vec{x} = \vec{c} + t \cdot (\vec{d} - \vec{c}),\quad t \in \mathbb{R}$$

beschreiben kurzzeitig die Bahnen zweier Flugzeuge.

Um 8.00 Uhr befand sich das erste Flugzeug im Punkt *A* und das zweite Flugzeug im Punkt *C* und beide flogen danach noch mindestens 4 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Der Parameter t hatte solange auch die Bedeutung einer Zeit [in Minuten].

$t = 0$ bedeutet also 8:00 Uhr.

a) Berechnen Sie, in jeweils welche Himmelsrichtungen die beiden Flugzeuge flogen und geben Sie an, welches der beiden Flugzeuge sich im Sinkflug befand.

b) Berechnen Sie, wann und an welchem Punkt das Flugzeug, das sich im Sinkflug befindet, bis auf eine Höhe von 7500 m gesunken war.

c) Das Flugzeug aus dem Aufgabenteil b) hatte schon ziemlich genau Kurs auf den geplanten Aufsetzpunkt der Landebahn eines Flughafens. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Aufsetzpunktes.

d) Untersuchen Sie, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden.

e) Ermitteln Sie, ob Kollisionsgefahr bestand.

f) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der beiden Flugzeuge in der Zeit zwischen 8:00 und 8:04 Uhr.

g) Fertigen Sie eine Schrägskizze der gesamten Situation an, in der die Punkte *A, B, C, D*, die Flugbahnen und der Aufsetzpunkt *AP* erkennbar sind.

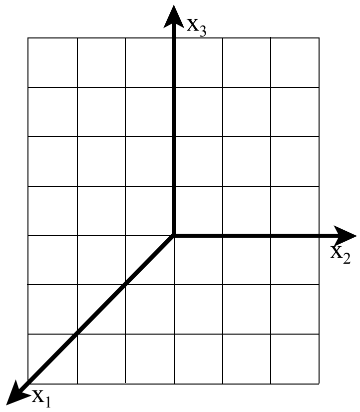
h) Ein Flugsender befindet sich im Punkt *FS.* mit den Koordinaten $FS(100 \mid 100 \mid 0)$.
Bestimmen Sie, an welchem Punkt seiner Flugbahn das erste Flugzeug dem Flugsender am nächsten war und wie groß dieser Abstand dort war.
Beurteilen Sie, ob man mit den bekannten Informationen auch feststellen kann, um welche Uhrzeit das war.

Aufgabe 9 U-Boot

Während einer Forschungsfahrt tritt ein U-Boot am Punkt $P(1200 \mid 0 \mid -540)$ – alle Angaben in m – in den Überwachungsbereich seines Begleitschiffes ein. Die Überwachung erfolgt durch SONAR (**So**und **N**avigation **a**nd **R**anging). Das Begleitschiff ruht im Ursprung des Koordinatensystems.

Bei der Darstellung von Punkten und Bewegungen durch Vektoren soll die x_1-Achse nach Süden zeigen, die x_2-Achse nach Osten und die x_3-Achse in vertikaler Richtung nach oben. Im Folgenden entspricht eine Längeneinheit 100 m in der Realität.

a) Zeichnen Sie die Standorte von U-Boot und Begleitschiff in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\triangleq$ 100 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135°groß.



b) Der Kapitän des U-Boots teilt mit, dass er Kurs Nordost mit gleich bleibender Tiefe fährt.
Geben Sie eine Gleichung einer Geraden g an, die die Fahrtroute des U-Bootes beschreibt.

c) Am Punkt $R(400 \mid 800 \mid -540)$ ändert das U-Boot seine Fahrtrichtung und fährt in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ weiter.
Bestimmen Sie, um wie viel Grad sich das U-Boot bezüglich der horizontalen Ebene gedreht hat und berechnen Sie den Steigungswinkel bezüglich der horizontale Ebene.
Bestimmen Sie den Punkt T, an dem das U-Boot die Wasseroberfläche erreicht.
Zeichnen Sie in Ihr Koordinatensystem die Bahn des U-Boots zwischen R und T ein.

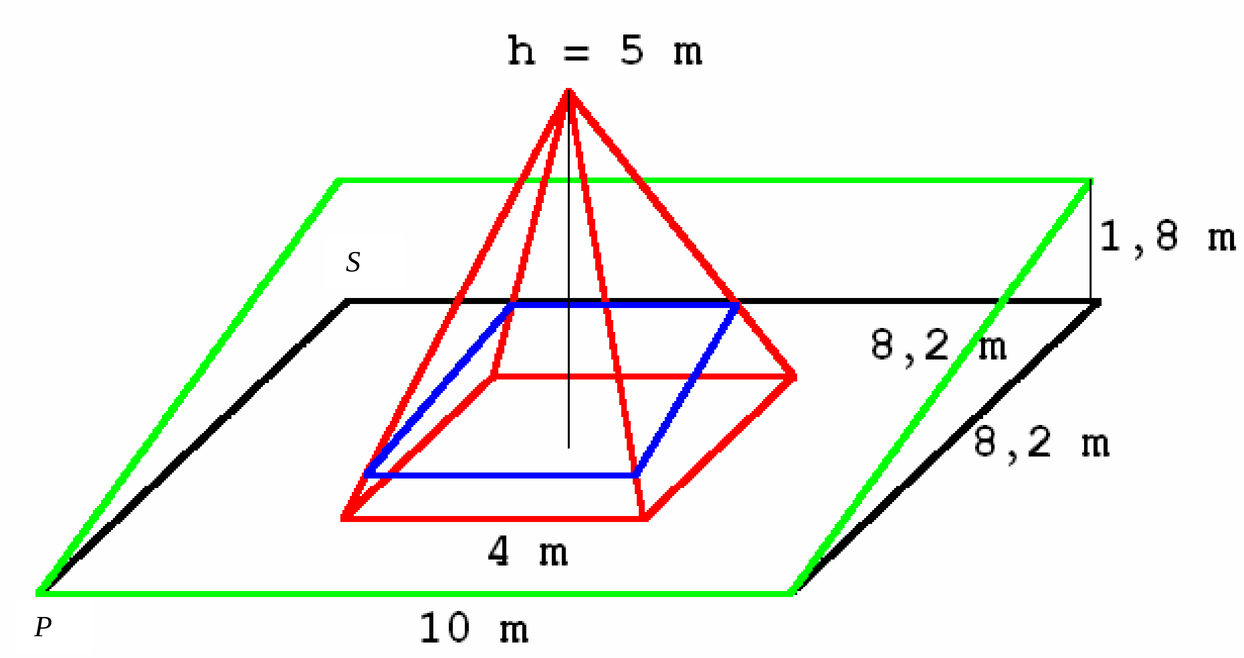
d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts S, an dem das U-Boot bezüglich der Fahrt vom Aufgabenteil c) den geringsten Abstand zum Begleitschiff hat.

e) Nehmen wir an, das U-Boot hätte in R seine Fahrtrichtung nicht verändert und wäre also weiter in gleichbleibender Tiefe Kurs Nordost gefahren.
Ermitteln Sie den Punkt, an dem es den SONAR-Bereich verlässt.
Das U-Boot fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 kn (kn: Knoten; 1 kn = 1 Seemeile pro Stunde; 1 Seemeile = 1852 m). Bestimmen Sie die Zeitdauer, die sich das U-Boot im Sonarbereich befindet.

f) Die *Entfernung* eines Objekts kann mittels SONAR bestimmt werden, wenn man die Zeit misst, die zwischen Ausstrahlung des Ortungssignals und Empfang des reflektierten Signals misst. Die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt 1,4 km/s.
Beschreiben Sie eine Methode, mit der man die *Geschwindigkeit* eines Objekts ermitteln kann, wenn man z.B. alle Sekunde ein Ortungssignal aussendet.
Erhalten Sie mit Ihrer Methode die tatsächliche Geschwindigkeit des Objekts relativ zum (ruhend gedachten) Wasser? Begründen Sie.

Aufgabe 10 Theaterbühne

Eine Theaterbühne hat einen rechteckigen Fußboden mit der Breite 10 m und der Tiefe 8,20 m.
Genau in der Mitte steht als Bühnendekoration eine 5 m hohe quadratische Pyramide mit der Bodenseitenlänge von 4 m.
Im zweiten Akt soll aus dramaturgischen Gründen von oben ein zweiter nach hinten ansteigender Bühnenboden senkrecht herabgelassen werden. Die Pyramide soll stehen bleiben.
In der Endlage fällt die vordere Kante dieses zweiten Bodens mit der vorderen Kante des Fußbodens zusammen. Die hintere Kante des zweiten Bodens soll dann 1,8 m höher sein als der Fußboden.
Die Abmessungen des zweiten Bodens stimmen mit denen des Fußbodens überein.



Die Bühnenhandwerker müssen aus dem zweiten Boden ein Viereck aussägen, weil sonst beim Herabsenken die Pyramide im Wege wäre. In der Endlage des zweiten Bodens sollen die Seitenflächen der Pyramide und die Seiten des herausgesägten Vierecks sauber abschließen. Die Dicke des zweiten Bühnenbodens wird hier vernachlässigt.

Der zweite Boden liegt zur Bearbeitung als rechteckige Platte auf dem Boden der Werkstatt, und das herauszutrennende Viereck soll angerissen werden.

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel des schrägen Bühnenbodens zur Fußbodenfläche.

b) Ein geeignetes 3-D-Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Punkt P im Ursprung liegt und der Punkt S auf der negativen x_1-Achse. Benennen Sie die wichtigen Punkte und geben Sie deren Koordinaten direkt an (natürlich bis auf die Koordinaten des ausgeschnittenen Vierecks, die ja erst im Laufe der Aufgabe berechnet werden sollen). Zeichnen Sie anschließend die Punkte in das Koordinatensystem ein. 1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.

c) Bestimmen Sie eine Koordinaten- und eine Parameterform für die Ebene, in der der schräge zweite Bühnenboden in seiner Endlage liegt.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des auszusägenden Vierecks, wenn der Bühnenboden sich in der gewünschten Endlage befindet.

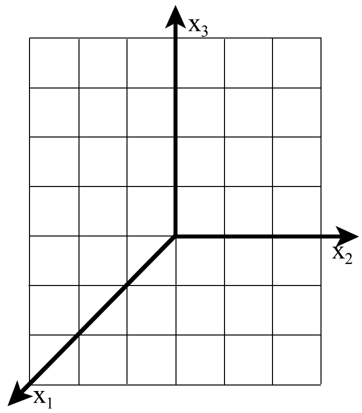
e) Mit den in c) berechneten Daten kann der Bühnenbauer so noch nicht viel anfangen, für ihn liegt die 10 m x 8,2 m –Platte flach auf den Boden der Werkstatt.
Machen Sie eine Skizze dieser (zweidimensionalen) Rechteckplatte und bestimmen Sie eine Bemaßung des auszusägenden Vierecks.

Aufgabe 11 Lichtkunst

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Das neueste Werk eines jungen Künstlers besteht aus einer Skulptur und zwei starren Stromschienen, die von einer Wand (x_1-x_3-Ebene) zur anderen Wand (x_2-x_3-Ebene) verlaufen. Auf diesen Schienen können Lampen bewegt werden, um die Skulptur zu beleuchten. Da die Schienen nur einen Durchmesser von 4 cm haben, soll diese Ausdehnung in den Rechnungen vernachlässigt werden. Die Schienen werden also als Teile von Geraden angesehen. Die beiden Stromschienen sind an den Wänden befestigt und verbinden die Punkte $P_1(\,10 \mid 0 \mid 3\,)$ und $Q_1(\,0 \mid 6 \mid 6\,)$ bzw. $P_2(\,8 \mid 0 \mid 5\,)$ und $Q_2(\,0 \mid 8 \mid 4\,)$.

1 Längeneinheit entspricht 1 m.



a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2, die den Verlauf der Stromschienen beschreiben und zeichnen Sie die Stromschienen in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.

b) Zeigen Sie, dass sichergestellt ist, dass die Stromschienen sich nicht berühren.

c) In den Punkten $L_1(\,5 \mid 3 \mid 4{,}5\,)$ und $L_2(\,2 \mid 6 \mid 4{,}25\,)$ befinden sich Lampen, die als punktförmige Lichtquellen betrachtet werden können.
Weisen Sie nach, dass L_1 auf g_1 liegt und L_2 auf g_2, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Lampen voneinander.
Zeichnen Sie die Lampenpunkte in das Koordinatensystem ein.

d) Der höchste Punkt der Skulptur sei $S\,(\,2 \mid 4 \mid 2{,}25\,)$. Der Künstler möchte, dass der Schatten dieser Skulpturenspitze noch auf den Fußboden des Raumes (x_1-x_2-Ebene) und nicht auf eine Wand fällt. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung nur eine der beiden Lampen eingeschaltet werden darf. Bestimmen Sie den Schattenpunkt R auf dem Fußboden des Raumes und zeichnen Sie R und S in das Koordinatensystem ein.

e) An die Stromschienen sollen neue Lampen angebracht werden, die von der Schiene 0,2 m vertikal herunterhängen. Beurteilen Sie, ob dies möglich ist, ohne dass dadurch die freie Beweglichkeit der Lampen auf der gesamten oberen Schiene durch die untere Schiene eingeschränkt wird.

<u>Hinweis:</u> *Skizzieren Sie die vertikale Projektion der Schienen auf die x_1-x_2-Ebene, d.h. die x_3-Komponente ist Null und betrachten Sie den Höhenunterschied der Schienen über dem Schnittpunkt der Projektionsgeraden.*

Aufgabe 12 Konzerthalle

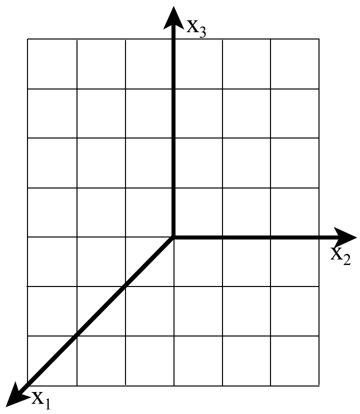
Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005.

Durch die Eckpunkte

O_1 (0 | 0 | 0)	A_1 (3| 0,25 | 0)	B_1 (3 | 2,25 | 0)	C_1 (0 | 2 | 0)
O_2 (0 | 0 | 1,5)	A_2 (3| 0,25 | 0,5)	B_2 (3 | 2,25 | 1)	C_2 (0 | 2 | 2)

sind Daten für die Skizze einer modernen Konzerthalle im kartesischen Koordinatensystem gegeben, 1 Längeneinheit entspricht 10 m.

Die Punkte O_1, A_1, B_1 und C_1 begrenzen die Grundfläche,
die Punkte O_2, A_2, B_2 und C_2 sind die Eckpunkte der Dachfläche.



a) Zeichnen Sie die Konzerthalle in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\triangleq$ 10 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.
Weisen Sie nach, dass die Eckpunkte der Dachfläche in einer Ebene ***E*** liegen, und geben Sie eine Gleichung von ***E*** an.

b) Zeigen Sie, dass das Dach die Form eines Rechtecks hat, aber kein Quadrat ist, und bestimmen Sie das Flächenmaß der Dachfläche.

c) Für Gebäude mit einer Grundfläche von mehr als 700 m^2 muss eine Extra-Grundflächensteuer bezahlt werden. Ist dies für die Konzerthalle der Fall? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Aus Sicherheitsgründen sollen zwei senkrechte Stützpfeiler s_1 und s_2 eingezogen werden.
s_1 stützt das Dach im Mittelpunkt der Dachfläche, s_2 wird über dem Punkt P (1 | 1,5 | 0) errichtet.

Beschreiben Sie, wie man die Längen der beiden Pfeiler berechnen könnte, und bestimmen Sie die Länge des Pfeilers s_1.

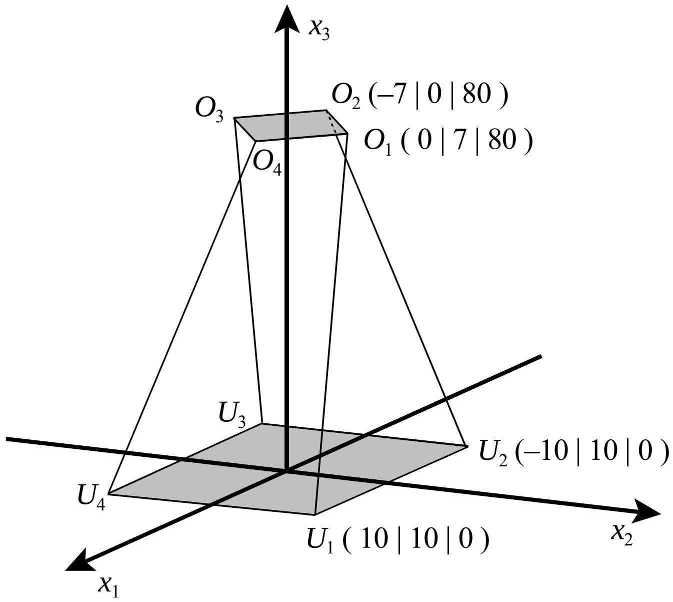
Aufgabe 13 Hafenturm

Einige Jahre lang war in Hamburg ein Hochhaus am Hafen im Gespräch, dessen grundsätzliche architektonische Idee in der nebenstehenden Zeichnung wiedergegeben ist, die allerdings in der x_3-Richtung nicht maßstäblich ist.
Diese Idee bildet die Grundlage für diese Aufgabe.

Die Bodenfläche und das Dach bilden je ein waagerechtes Quadrat.

Die beiden Quadrate sind gegeneinander um 45° gedreht.

Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sind senkrecht übereinander (auf der x_3-Achse).



In der Zeichnung sind die vier Eckpunkte der Bodenfläche mit U_1, U_2, U_3 und U_4 angegeben, die der Dachfläche mit O_1, O_2, O_3 und O_4. Für je zwei dieser Punkte sind die Koordinaten gegeben.

a) Die Gerade g_1 verbindet die Punkte U_1 und O_1, die Gerade g_2 die Punkte U_2 und O_2 und analog sind die Geraden g_3 und g_4 definiert.

Berechnen Sie zunächst eine der zugehörigen Geradengleichungen und geben Sie dann unter Ausnutzung der Symmetrie auch die anderen drei an.

Berechnen Sie die Länge einer der vier (gleichlangen) Kanten des Gebäudes.

b) In verschiedenen Höhen h haben die Stockwerke natürlich viereckige waagerechte Bodenflächen.

Bestimmen Sie für $h = 40$ die vier Punkte des entsprechenden Vierecks und begründen Sie, dass dieses Viereck jedenfalls ein Quadrat ist.

Begründen Sie, dass dies für jede der Bodenflächen gelten muss, also für jedes (zulässige) h.

c) Ermitteln Sie den Winkel, um den die Bodenfläche des Geschosses mit der Bodenhöhe $h = 40$ gegenüber dem Grundgeschoss gedreht ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Bodenflächen zweier aufeinander folgender Geschosse immer um den gleichen Winkel weitergedreht sind, wenn die Höhenabstände zwischen zwei Geschossen immer gleich sind.

Begründen Sie Ihr Ergebnis.

4.2 Leistungskurs

Aufgabe 1 Vegetation

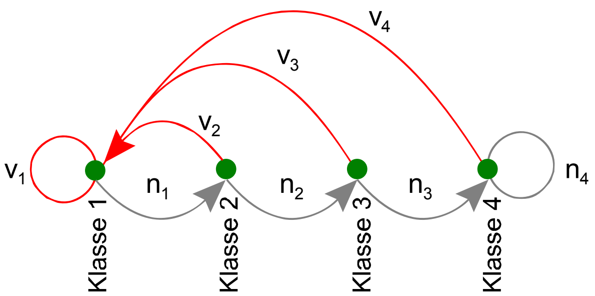
Quelle: Wiskunde A (1. Termin), Aufgabe 3, 1994, zum Teil veränderte Zahlenwerte

In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigtem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km² eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral“. Die Brennbarkeit dieser Pflanzen ist sehr von ihrem Alter abhängig. Wegen der großen Mengen verdorrten Materials brennen vor allem die älteren Pflanzen sehr leicht. Brände haben abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass keine großen Gebiete mit dürrem Material entstehen, die durch Brände bis hin zu einer Katastrophe Schaden nehmen könnten.

Diese Situation lässt sich in einem Modell darstellen, bei dem man von folgenden Annahmen ausgeht:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
  Klasse 1: 0 – 10 Jahre
  Klasse 2: 10 – 20 Jahre
  Klasse 3: 20 – 30 Jahre
  Klasse 4: 30 Jahre und älter
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in jeweils 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km².

Für dieses Modell kann der folgende Graph gezeichnet werden:



Bezeichnungen:

v_i = Anteil von Klasse i, der verbrennt ($v_i < 1$)

n_i = Anteil von Klasse i, der nicht verbrennt ($n_i < 1$)

a) Erläutern Sie, welche Bedeutung die v_i und n_i in diesem Graphen haben.

Stellen Sie gemäß dem Graphen bzw. dem oben beschriebenen Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix) M auf und begründen Sie Ihr Vorgehen.

b) Aus nebenstehender Tabelle können Sie entnehmen, wie groß die Fläche in km² ist, die jede Klasse zum Zeitpunkt $t = 0$ *(jetzt)* und $t = 1$ *(10 Jahre später)* bedeckt.

Klasse	$t = 0$	$t = 1$
1	600	424
2	400	594
3	300	392
4	700	590

Berechnen Sie v_1, v_2, n_1 und n_2 .

c) Die Leslie-Matrix für die in b) genannten Zahlen lautet: $M = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}$

Über die Gleichung $M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 300 \\ 700 \end{pmatrix}$

werden in b) Flächengrößen der jeweiligen Klassen berechnet.
Diesen Vorgang kann man sich auch als Funktion mit mehreren Variablen vorstellen.
Beschreiben Sie diese Funktion *f*. Wie sieht das Urbild *(die Definitionsmenge)* aus, wie das Bild *(die Wertemenge)* ?

d) Von der Matrix *M* aus Aufgabenteil a) wurden mit dem Computer die Potenzen M^2 , M^3 , M^4 ... usw. berechnet. Man stellt fest, dass die Matrizen M^n sich für größere Werte von *n* kaum noch voneinander unterscheiden. So stimmen die auf vier Nachkommastellen gerundeten Matrizen M^n für $n \geq 30$ mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 \\ 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 \\ 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 \\ 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich, dass in jeder Zeile die Zahlen (gerundet) übereinstimmen.
Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

e) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch.
In unserem Modell nehmen wir zur Vereinfachung an, dass das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren auf einmal stattfindet. Nehmen wir weiter an, dass stets 2 % von Klasse 2, sowie 3 % von Klasse 3 und 7 % von Klasse 4 abbrennen. Dieser Vorgang des gewollten Abbrennens kann ebenfalls durch eine 4×4 - Matrix beschrieben werden, in der die oben genannten Prozentzahlen benutzt werden.

Stellen Sie diese Matrix *N* auf und erklären Sie Ihr Vorgehen.

Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mithilfe der Matrizen *N* und *M*.
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 Industriehallen

Eine Firma bietet Industriehallen aus normierten Betonstahlfertigteilen an. Zur Herstellung dieser Fertigteile benötigt sie die Rohstoffe Kies (R_1), Zement (R_2), Stahl (R_3) und Wasser (R_4).
Aus den Rohstoffen werden folgende Zwischenprodukte hergestellt: Wandplatten (Z_1), Stützen (Z_2) und Träger (Z_3). Aus diesen Bauteilen können zwei Hallentypen, H_1 und H_2, montiert werden.

Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Tonnen der Rohstoffe zur Herstellung je einer Tonne der Zwischenprodukte benötigt werden bzw. wie viele Tonnen der jeweiligen Zwischenprodukte pro Hallentyp benötigt werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	0,7	0,55	0,5
R_2	0,1	0,2	0,2
R_3	0,1	0,15	0,2
R_4	0,1	0,1	0,1

	H_1	H_2
Z_1	240	300
Z_2	80	120
Z_3	80	180

Die Kosten in GE pro Tonne betragen für die jeweiligen Rohstoffe:

Rohstoffe	R_1	R_2	R_3	R_4
GE / Tonne	27	190	600	3

Die Fertigungskosten in GE pro Tonne betragen für die jeweiligen Zwischenprodukte:

Zwischenprodukte	Z_1	Z_2	Z_3
GE / Tonne	80	100	120

Die Endmontagekosten betragen 40 000 GE für Hallentyp 1 und 48 000 GE für Hallentyp 2.

a) Beschreiben Sie die Verflechtungen mit einem Graphen.

   Berechnen Sie die Matrix A_{RH}, aus der die Anzahl der Tonnen abgelesen werden kann, die von den einzelnen Rohstoffen pro Hallentyp verarbeitet werden.

   Geben Sie an, wie viele Tonnen Kies (R_1) für Hallentyp 1 und wie viel Tonnen Stahl (R_3) für Hallentyp 2 benötigt werden.

b) Bestimmen Sie, wie viel jeweils die Herstellung einer fertig montierten Halle vom Typ H_1 und vom Typ H_2 kostet.

c) Im Lager sind noch 1 712 Tonnen Kies (R_1), 424 Tonnen Zement (R_2) und 384 Tonnen Stahl (R_3) vorrätig. Wasser ist in ausreichender Menge vorhanden.

   Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 durch Herstellung von Zwischenprodukten restlos aufzubrauchen, und ermitteln Sie, wie viele Tonnen der einzelnen Zwischenprodukte mit diesen Lagerbeständen produziert werden können. Bestimmen Sie zusätzlich, wie viel Wasser zur Herstellung dieser Zwischenprodukte nötig ist.

d) Bestimmen Sie, wie viele Hallen vom Typ1 sich aus den Zwischenprodukten aus Teil c) montieren lassen, wenn man keine Halle vom Typ 2 montiert, und bestimmen Sie, wie viele Hallen vom Typ2 sich aus den Zwischenprodukten aus Teil c) montieren lassen, wenn man keine Halle vom Typ 1 montiert.
Ermitteln Sie, ob man die Anzahl der herstellbaren Hallen vergrößern könnte, wenn man Hallen beiden Typs montieren würde.

e) Ein Mitarbeiter der Firma behauptet, dass jeder Vorrat der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 bei ausreichendem Wasservorrat restlos für die Herstellung von Zwischenprodukten aufgebraucht werden kann.
Er argumentiert folgendermaßen:
Wenn $\vec{v}$ der Vorratsvektor ist, können die Vorräte genau dann restlos aufgebraucht werden, wenn folgende Gleichung lösbar ist:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{v}$$

Dies ist für jeden Vorratsvektor $\vec{v}$ der Fall, da die Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig sind.
Beurteilen Sie, ob der Mitarbeiter Recht hat.

Aufgabe 3 Libellenentwicklung

In dieser Aufgabe sollen die Anzahlen der Individuen in den verschiedenen Entwicklungsstadien einer Libellenart betrachtet werden. Dabei werden folgende Annahmen zu Grunde gelegt.

Eine junge Libelle legt 90 Eier, von denen sich 5 % zu Junglarven weiterentwickeln. 50 % der Junglarven entwickeln sich zu Altlarven (Nymphen), während 5 % der Junglarven das Altlarven-Stadium überspringen und zu jungen Libellen werden. Von den Altlarven entwickeln sich 30 % zu jungen Libellen. 25 % der jungen Libellen überleben eine Generation und legen als alte Libellen immerhin noch 40 Eier, deren Entwicklungsfähigkeit denen der Junglibellen entspricht. Die fehlenden Prozentanteile entsprechen jeweils einem Nichtüberleben dieses Stadiums. Alle alten Libellen sterben in der nächsten Generation.

a) Geben Sie eine graphische Darstellung dieses Lebenszyklus' an und ermitteln Sie daraus eine Populationsmatrix P.

(Benutzen Sie abkürzend: $\begin{cases} A = \text{Anzahl der jungen Libellen} \\ B = \text{Anzahl der alten Libellen} \\ C = \text{Anzahl der Eier} \\ D = \text{Anzahl der Junglarven} \\ E = \text{Anzahl der Altlarven} \end{cases}$, und damit $\vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}$

als Populationsvektor.)

b) In einem Teich sind zu Beginn 25 Junglibellen, 5 Altlibellen, 6000 Eier, 200 Junglarven und 80 Altlarven vorhanden.

Berechnen Sie die Anzahlen der einzelnen Entwicklungsstadien für die nächsten zwei Generationen.

c) Bestimmen Sie eine Startpopulation, die sich in jeder Generation reproduziert.

Beschreiben Sie das Populationsmodell geeignet als Funktion und interpretieren Sie das eben berechnete Ergebnis *(Startpopulation, die sich in jeder Generation reproduziert)* mithilfe dieser Funktion.

d) Ermitteln Sie eine Startpopulation, aus der nach einer Generation 11 Junglibellen, 5 Altlibellen, 2000 Eier, 40 Junglarven und 20 Altlarven geworden sind.

Durch einen besonderen Umwelteinfluss werden die Anzahlen der Larven (jung und alt) ad hoc halbiert, während die Eier und die Libellen davon unbeeinflusst bleiben.

e) Geben Sie begründet eine Matrix H an, die die Halbierung der Larvenanzahlen beschreibt.

f) Dieser besondere Umwelteinfluss tritt periodisch und nur alle 10 Generationen auf.

Beschreiben Sie mit den Matrizen P und H, welcher Populationsvektor $\vec{v}_E$ sich nach 10 Generationen aus einer Anfangspopulation $\vec{v}_A$ ergibt, wenn die Halbierung der Larven am Ende des Beobachtungszeitraumes auftritt.

Beurteilen Sie, ob das Ergebnis, also der Populationsvektor $\vec{v}_E$, davon beeinflusst wird, dass die Halbierung der Larvenanzahlen zu Beginn, in der Mitte oder am Ende eines Beobachtungszeitraumes von 10 Generationen auftritt.

Aufgabe 4 Kosten und Gewinne

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist folgenden Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	a	b	0	0
R_2	0	c	d	0
R_3	0	0	e	0
R_4	0	0	f	g

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	0
Z_2	1	4	0
Z_3	0	3	1
Z_4	1	0	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	5	12	0
R_2	2	11	1
R_3	0	12	4
R_4	2	3	5

a) Geben Sie die zugehörigen Matrizen A_{RZ} , A_{ZE} und A_{RE}.
Berechnen Sie die fehlenden Werte der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix.

b) Wegen eines Umbaus soll das Rohstofflager weitgehend geräumt werden. Dabei sollen zwei Bedingungen erfüllt werden:
i) Die Lagerbestände von R_2 und R_3 sollen vollständig aufgebraucht werden.
ii) Von R_1 und R_4 soll gleich viel übrig bleiben.
Der Lagerbestand beträgt 1 000 ME von R_1, 720 ME von R_2, 960 ME von R_3 und 1 000 ME von R_4.
Untersuchen Sie, ob die beiden obigen Bedingungen erfüllt sind, wenn 80 ME von E_1, 40 ME von E_2 und 120 ME von E_3 produziert werden.

c) Der Betrieb erhält einen Auftrag über 200 ME von E_1. Bestimmen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag, wenn folgendes gilt:
i) Die Rohstoffkosten in GE pro ME betragen: 1 für R_1, 3 für R_2, 4 für R_3 und 2 für R_4.
ii) Die Fertigungskosten in GE je ME eines Zwischenprodukts betragen:
1 für Z_1, 1 für Z_2, 3 für Z_3 und 4 für Z_4.
iii) Die Fertigungskosten je ME des Endproduktes E_1 betragen 2 GE.
iv) Die Fixkosten betragen 400 GE.

d) Durch eine Änderung im Produktionsablauf werden die Fertigungskosten für die Zwischenprodukte und für die Endprodukte voneinander abhängig. Mit der Einschränkung: $0 < x < 2$ gilt:

Kosten	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
GE/ME	$2-x$	$2-x$	$4-x$	$5-x$

Kosten	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$3-x$	$4-x$	$5-x$

Es werden 200 ME von E_1, 100 ME von E_2 und 300 ME von E_3 bestellt.
Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass sich die Rohstoffkosten [Teil c) i)] nicht ändern und die Fixkosten 1000GE betragen, den Wert für x, für den die Gesamtkosten für diesen Auftrag 32.000 GE betragen.

e) Die Endprodukte können nach einer weiteren Umstellung aus produktionsspezifischen Gründen nur im Verhältnis $E_1 : E_2 : E_3 = 2 : 1 : 3$ produziert werden.
Eine Produktion besteht demnach aus $2t$ ME von E_1, t ME von E_2 und $3t$ ME von E_3, mit ($100 < t < 1.200$). Die Fixkosten betragen 4000 GE pro Produktion.
Für die Herstellungskosten der Endprodukte bzw. die Verkaufspreise der Endprodukte gilt:

Kosten	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$29 - 0{,}5\ln(t)$	$130 - 2\ln(t)$	$54 - 1{,}5\ln(t)$

Preis	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$42 - 2\ln(t)$	$145 - 4\ln(t)$	$65 - 3\ln(t)$

Bestimmen Sie den Wert für t, für den der Gewinn $G(t)$ maximal wird, wenn die gesamte Produktion verkauft wird.

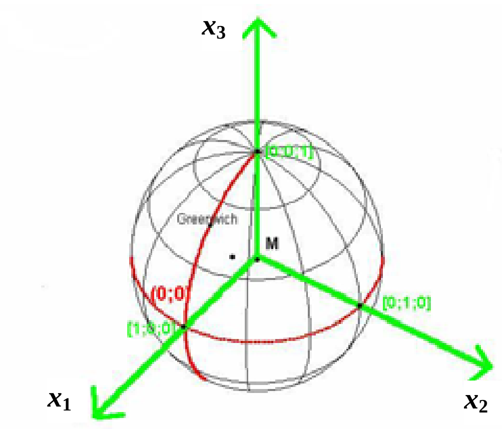
Aufgabe 5: GPS

Eine Person bestimmt ihre Position auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines GPS-Gerätes. Dieser Vorgang soll in dieser Aufgabe prinzipiell nachvollzogen werden.

Wir machen dazu folgende vereinfachende Annahmen:

- Die Erde ist eine ideale Kugel mit einem Umfang von 40 000 km und dem zugehörigen Radius von $R =$ 6 366 km. Als Längeneinheit wählen wir gerade diesen Erdradius.

- Weiterhin betrachten wir folgendes erdgebundene Koordinatensystem:
  Der Koordinatenursprung ist der Erdmittelpunkt.
  Die x_3-Achse liegt auf der Erdachse und zeigt nach Norden. Der Nordpol ist also der Einheitspunkt auf der x_3-Achse mit den Koordinaten (0 | 0 | 1).
  Die x_1-Achse geht durch den Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian, dieser Punkt mit den geographischen Koordinaten 0° Breite und 0° Länge ist der Einheitspunkt auf der x_1-Achse, hat also die Koordinaten (1 | 0 | 0) .
  Der Einheitspunkt auf der x_2-Achse hat dann 0° Breite und 180° östliche Länge und die Koordinaten (0 | 1 | 0).



- Zu einem genau fixierten Zeitpunkt der Positionsbestimmung empfängt die Person mit ihrem GPS-Gerät von zwei GPS Satelliten deren genaue Positionen Sat_1 und Sat_2 in dem genannten rechtwinkligen Koordinatensystem. Außerdem empfängt der GPS-Empfänger die genaue Uhrzeit in den Satelliten zum Zeitpunkt der Aussendung der Signale. Aus der Zeitdifferenz der beiden Uhren in den Satelliten und im GPS-Empfänger zum Empfangszeitpunkt kann dieser (mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit) die Entfernungen d_1 und d_2 von seiner unbekannten Position zu den beiden Satelliten berechnen. (Dies ist in Wirklichkeit wegen der Ungenauigkeit der Empfängeruhr komplizierter!).

Nun zur eigentlichen Aufgabe:

Es sei $Sat_1 = (\,2 \mid 2 \mid 3)$ und $d_1 = 3{,}2$ und ebenso $Sat_2 = (\,3 \mid 2 \mid 2)$ und $d_2 = 3{,}3$.

a) Erläutern Sie den prinzipiellen Weg, wie man den Standort der Person aus den gegebenen Daten berechnen kann.

b) Betrachten Sie die Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und stellen Sie die Gleichung der Kugeloberfläche auf.
Diese Kugeloberfläche schneidet die Erdoberfläche in einem Schnittkreis. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dieser Schnittkreis liegt.
(zur Kontrolle: Einen mögliche Antwort ist: E_1: $100x + 100y + 150z = 194$)

c) Wenn wir die gleiche Rechnung wie in b) für die Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2 durchführen, erhalten wir folgende Gleichung für die Schnittkreisebene: E_2: $600x + 400y + 400z = 711$.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Parameterform.

d) Bestimmen Sie nun die Koordinaten von zwei Punkten, von denen einer der Standort der Person sein muss.

e) Die Person weiß immerhin, dass sie sich in Nordeuropa aufhält.
Berechnen Sie die geographischen Koordinaten des Standorts der Person.

Gehen Sie gedanklich von Hamburg aus (53,5° N; 10° O) soweit nach Norden oder Süden, bis Sie in genau östlicher oder westlicher Richtung den Standort der Person erreichen können, und berechnen sie die Länge dieser beiden Wegstrecken.

f) Berechnen Sie die Länge des kürzesten Weges von Hamburg zum Standort der Person.

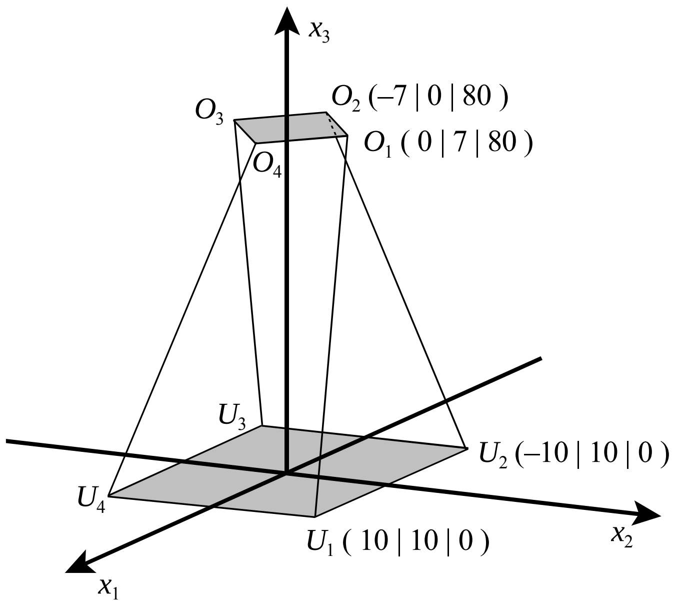
Aufgabe 6: Hafenturm

Einige Jahre lang war in Hamburg ein Hochhaus am Hafen im Gespräch, dessen grundsätzliche architektonische Idee in der nebenstehenden Zeichnung wiedergegeben ist, die allerdings in der x_3-Richtung nicht maßstäblich ist.
Diese Idee bildet die Grundlage für diese Aufgabe.

Die Bodenfläche und das Dach bilden je ein waagerechtes Quadrat.

Die beiden Quadrate sind gegeneinander um 45° gedreht.

Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sind senkrecht übereinander (auf der x_3-Achse).



In der Zeichnung sind die vier Eckpunkte der Bodenfläche mit U_1, U_2, U_3 und U_4 angegeben, die der Dachfläche mit O_1, O_2, O_3 und O_4. Für je zwei dieser Punkte sind die Koordinaten gegeben.

a) Die Gerade g_1 verbindet die Punkte U_1 und O_1, die Gerade g_2 die Punkte U_2 und O_2 und analog sind die Geraden g_3 und g_4 definiert. Berechnen Sie zunächst eine der zugehörigen Geradengleichungen und geben Sie dann unter Ausnutzung der Symmetrie auch die anderen drei an.

b) Berechnen Sie die Länge einer der vier (gleichlangen) Kanten des Gebäudes.

c) In verschiedenen Höhen h haben die Stockwerke natürlich viereckige waagerechte Bodenflächen. Bestimmen Sie die vier Punkte eines solchen Vierecks als Funktion von h und begründen Sie, dass diese Vierecke immer Quadrate sind.

d) Um welchen Winkel ist die Bodenfläche des Geschosses mit der Bodenhöhe $h = 40$ gegenüber dem Grundgeschoss gedreht?

e) „Wenn die Höhenabstände zwischen zwei Geschossen immer gleich sind, dann sind die Bodenflächen zweier aufeinander folgende Geschosse immer um den gleichen Winkel weitergedreht.“ Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist.

f) Begründen Sie, dass zwei benachbarte Gebäudekanten windschief sind.

g) Stellen Sie sich vor, die Konstruktion würde in der gleichen Weise nach oben weitergebaut werden. Beurteilen Sie, wie sich die Größe der Bodenflächen der Geschosse ändern wird.

h) Ermitteln Sie, in welchem Geschoss man die geringste Miete bezahlen müsste und wie hoch diese bei einem Mietpreis von 20 € pro Quadratmeter Bodenfläche wäre, wenn das Gebäude mit 30 Geschossen bis auf eine Gesamthöhe von 120 m weitergebaut würde und der Höhenabstand zwischen den Geschossböden immer 4 m hoch wäre.

Aufgabe 7 Flugbahnen

Die Aufgabe entspricht mit Veränderungen einer Aufgabe in der KMK-EPA.

In einem räumlichen Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung. Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 näherungsweise geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.

Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.
Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.

Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1.

b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km. Bestimmen Sie die Höhe, in welcher F_1 in die Wolkendecke eintaucht.

Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Entscheiden Sie, ob dieser Abstand mit dem Abstand der beiden Flugbahnen übereinstimmt.

c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R\,(-10{,}2 \mid -13{,}6 \mid 0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius 85 km.
Ermitteln Sie, wie viele Kilometer das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars fliegt.

d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte $G_1\ (84 \mid -3 \mid 0)$ und $G_2\ (12 \mid -99 \mid 0)$.
Bestimmen Sie, wie weit hinter der Grenze ein im Nachbarland landendes Flugzeug von dem Radar theoretisch noch erfasst werden kann.
Nennen Sie begründet Argumente, welche die errechnete Lösung in Frage stellen können.

e) Im letzten Teil wird die Landschaft nicht mehr als Ebene, sondern als Teil der Erdkugel ($r = 6376$km) angesehen.

Die Radarstation kann nur Objekte registrieren, die sich oberhalb ihres „Horizonts“ befinden.

Bestimmen Sie die maximale Flughöhe, bis zu der ein „unbekanntes Flugobjekt“ in 70km Entfernung von der Radarstation unentdeckt bliebe.

Erstellen Sie dazu eine Skizze.

Aufgabe 8 Kugel und Ebene

Gegeben seien eine Kugel *K* mit dem Mittelpunkt *M*(4 | 4 | 3) und dem Radius *r* = 7 LE sowie eine Ebene $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u, v \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Ebene *E* und die Kugel *K* mehr als einen Punkt gemeinsam haben. Berechnen Sie den Mittelpunkt *S* und den Radius r_s des Schnittkreises.

b) Die Kugel *K* soll an der Ebene *E* gespiegelt werden.

Begründen Sie die folgende Aussage:

> „Die Strecke von *M* zum Mittelpunkt *M** der Bildkugel *K** verläuft durch den Mittelpunkt des Schnittkreises.“

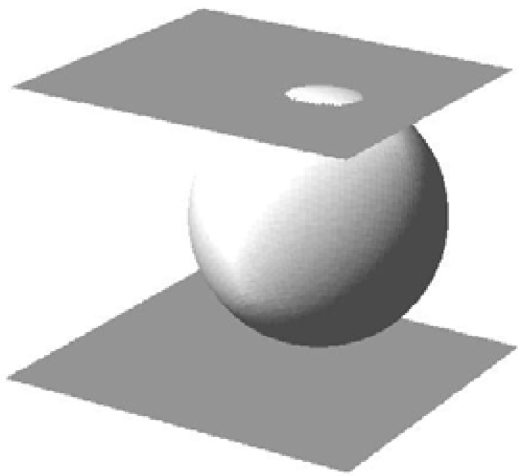
Bestimmen Sie die Gleichung der Bildkugel *K**.

c) Berechnen Sie $z > 0$ so, dass $P(6 \mid 1 \mid z)$ auf der Kugeloberfläche *K* liegt.

d) Genauso, wie es zu jedem Punkt auf einem Kreis eine Tangente mit diesem Punkt als Berührpunkt gibt, gibt es zu jedem Punkt auf einer Kugel eine Ebene, die die Kugel in diesem Punkt berührt – die so genannte <u>Tangentialebene</u>. Beim Kreis steht der Radius zum Berührpunkt senkrecht zur Tangente. Entsprechendes gilt bei der Kugel.

Ermitteln Sie die Koordinatenform derjenigen Tangentialebene *T*, welche die Kugel *K* im Punkt *P* berührt.

e) Bestimmen Sie alle zu *T* parallelen Ebenen, die die Kugel *K* schneiden.
Ermitteln Sie, wie von diesen Ebenen diejenigen gefunden werden können, für die der Radius des Schnittkreises mit der Kugel 2 LE ist.
Bestimmen Sie die Koordinatenform einer dieser Ebenen.



Aufgabe 9 Eckpyramide

Gegeben ist die Ebenenschar $\boldsymbol{E}_a$ mit $\boldsymbol{E}_a$: $(a+1)\cdot x_1 + a\cdot x_2 + (a-1)\cdot x_3 = a, \quad a\in\mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Lage von $\boldsymbol{E}_0$.

b) Beschreiben Sie, warum die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}$ in jeder der Ebenen $\boldsymbol{E}_a$ liegt.

c) Mit S_1, S_2 und S_3 seien die Schnittpunkte der jeweiligen Ebene mit den Koordinatenachsen bezeichnet.

Berechnen Sie S_1, S_2 und S_3 in Abhängigkeit von a.

Fassen Sie die Punkte S_1, S_2 und S_3 sowie den Koordinatenursprung O als Eckpunkte einer Pyramide auf, der so genannten Eckpyramide.

Zeigen Sie, dass für das Volumen V_a einer Eckpyramide gilt: $V_a = \frac{1}{6}\cdot|\overline{OS_1}|\cdot|\overline{OS_2}|\cdot|\overline{OS_3}|$.

Bestimmen Sie diejenigen positiven a, bei denen die zugehörige Eckpyramide das Volumen 1 aufweist.

d) Beschreiben Sie, welche Bedingung die Parameter m und a zweier Ebenen $\boldsymbol{E}_m$ und $\boldsymbol{E}_a$ dieser Schar erfüllen müssen, damit diese beiden Ebenen senkrecht zueinander stehen und begründen Sie Ihre Angaben.
Ermitteln Sie für $a = 2$ den Parameter m der zu $\boldsymbol{E}_2$ senkrechten Ebene $\boldsymbol{E}_m$.

e) Bestimmen Sie die Ebenen aus der gegebenen Ebenenschar, die vom Ursprung O den Abstand 0,5 aufweisen.

f) Es wird das Volumen V_a der Eckpyramiden der Ebenenschar $\boldsymbol{E}_a$ betrachtet.
Zeigen Sie:

Für $a\to\pm\infty$ geht V_a gegen den Wert $\frac{1}{6}$.

V_a hat ein Minimum, aber kein Maximum.

Aufgabe 10 Ortskurve der Schnittpunkte

Diese Aufgabe basiert auf der Abituraufgabe Analytische Geometrie V des Abiturjahrgangs 1997 in Bayern.

Gegeben sind 2 Ebenenscharen $\boldsymbol{E_t}$: $2x_1 - tx_2 + 4x_3 = 0$ und

$\boldsymbol{H_t}$: $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie den Wert von t, für den der Punkt $Q\,(-3{,}2 \mid -4 \mid 5{,}6)$ in der Ebene $\boldsymbol{E_t}$ liegt.

Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen $\boldsymbol{E_t}$ in einer Geraden s schneiden. Geben Sie eine Parametergleichung für s an.

b) Berechnen Sie den Wert von t, für den die Ebenen $\boldsymbol{E_t}$ und $\boldsymbol{H_t}$ senkrecht zueinander liegen. Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebenen $\boldsymbol{H_t}$ im Koordinatensystem haben.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g_t von $\boldsymbol{E_t}$ und $\boldsymbol{H_t}$.

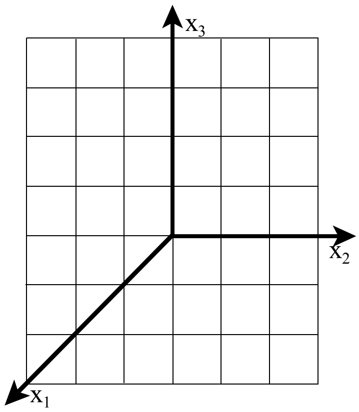
$$\text{[mögliches Ergebnis: } g_t: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \text{]}$$

Bestimmen Sie den Winkel, den die Gerade g_t mit der Ebene $x_1 = 0$ einschließt.

d) Zeigen Sie, dass durch g_0 und die x_2-Achse die Ebene $\boldsymbol{E_0}$ eindeutig festgelegt ist. Untersuchen Sie, ob alle Geraden g_t auf derselben Seite von $\boldsymbol{E_0}$ liegen.

e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3-Ebene. Zeigen Sie, dass die Punkte S_t alle auf einer Parabel in der x_2x_3-Ebene liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

Zeichnen Sie die Geraden g_{-4}, g_{-2}, g_0 und g_2 sowie die oben beschriebene Kurve in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie begründend den Verlauf der Geradenschar.



f) Der Graph der Ortskurve aus Teil e) rotiert im Intervall [0;4] um die x_2-Achse. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers.

Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion k im Intervall [a, b] um die x-Achse entsteht,

kann durch die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b (k(x))^2\,dx$ berechnet werden.

Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Falls Sie die Ortskurve in Teil e) nicht haben bestimmen können, betrachten Sie die Ortskurve $s_3 = 0{,}5\,s_2^2$. (Dies ist aber nicht die gesuchte Ortskurve.)

Aufgabe 11 Meteoriteneinschlag

In sternklaren Nächten in den Ebenen von Kansas beobachten die beiden Amateurastronomen Myers und Smith den Himmel auf der Suche nach Meteoren und Meteoriten. Smith hat dabei eine Beobachtungsposition, die gegenüber der von Myers fünf Kilometer weiter westlich und drei Kilometer weiter nördlich ist. – Sehen Sie für diese Aufgabe den Erdboden als Ebene an und setzen Sie voraus, dass der Koordinatenursprung am Ort der Beobachtungsposition von Smith ist. Die Längeneinheit ist 1km.

In der Nacht zum 4. März beobachten sie beide einen Meteoriten. Seine Feuerspur beginnt irgendwo hoch in der Atmosphäre und endet beim Eintritt in die dichtere, untere Atmosphäre. Die Astronomen bezeichnen diese beiden wesentlichen Punkte der Bahn des Meteors mit „Upper Event (U)“ und „Lower Event (L)“.
Beide können nur jeweils die Richtung angeben, in der sie die Ereignisse U und L sehen. Wenn sie sich über diese Punkte verständigen, so geben sie jeweils einen Richtungsvektor an, der von ihrer Position zum Ereignispunkt zeigt. Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koordinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben.
Gehen Sie davon aus, dass die Bahn des Meteoriten eine Gerade ist.

Für das Ereignis am 4. März ermitteln die beiden Astronomen folgende vier Richtungsvektoren.

$$\vec{r}_{My,U} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{My,L} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{Sm,U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{Sm,L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von *U* und *L*.

b) Berechnen Sie den räumlichen Abstand von *U* und *L*.

Der Meteorit schlägt am Ende seiner Bahn im Punkt *K* auf dem Erdboden auf.

c) Berechnen Sie die Koordinaten dieses Aufschlagpunktes *K* und bestimmen Sie den Winkel der Bahn zur Erdoberfläche.

d) Berechnen Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist, und ermitteln Sie für diesen die Richtung zum Aufschlagpunkt. Geben Sie dabei die Richtung in Grad gegenüber der Nordrichtung an.

Am Punkt *L* spalten sich vom Meteoriten einige kleinere Teile ab, die ebenfalls auf geraden Bahnen weiterfliegen. Die Abweichung von der Bahn des Meteoriten beträgt jeweils höchstens 1°.

e) Für zwei dieser Bruchstücke sollen Sie genaue Berechnungen vornehmen. Beide weichen in ihrer Richtung um genau 1° nach oben bzw. nach unten von der Richtung des Meteoriten ab. Fertigen Sie eine nicht maßstabgetreue Skizze an und bestimmen Sie die Entfernungen der Aufschlagpunkte der beiden Bruchstücke vom Aufschlagpunkt des Meteoriten.

f) Geben Sie begründet eine obere Abschätzung für die Größe der Fläche an, auf die der ganze Meteoritenschauer niedergeht.

Aufgabe 12 Haus mit Dach

Teile dieser Aufgabe stammen aus der Zentralabiturprüfung 1999 in Baden-Württemberg

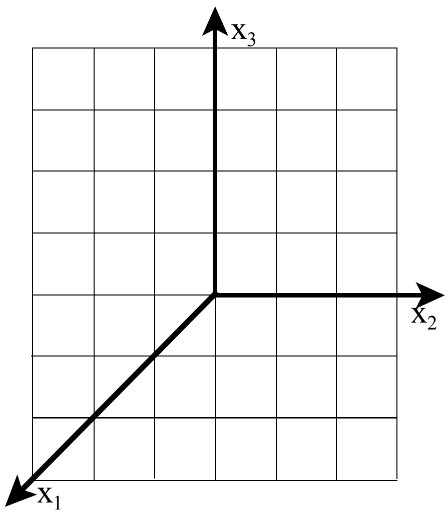
Ein quaderförmiges Haus mit aufgesetztem Dach kann in einem Koordinatensystem dargestellt werden mit Hilfe der Eckpunkte des Fußbodens B_i, der Eckpunkte des Fußbodens des Speichers S_i und der Punkte D_i, die den Dachabschluss – ein horizontal liegendes Rechteck – bilden.

Diese Punkte haben folgende Koordinaten (1 LE $\triangleq$ 1 m):

$$B_1\,(0\,|\,0\,|\,0),\quad B_2\,(10\,|\,0\,|\,0),\quad B_3\,(10\,|\,12\,|\,0),\quad B_4\,(0\,|\,12\,|\,0).$$
$$S_1\,(0\,|\,0\,|\,10),\quad S_2\,(10\,|\,0\,|\,10),\quad S_3\,(10\,|\,12\,|\,10),\quad S_4\,(0\,|\,12\,|\,10).$$
$$D_1\,(2\,|\,3\,|\,12),\quad D_2\,(6\,|\,3\,|\,12),\quad D_3\,(6\,|\,9\,|\,12),\quad D_4\,(2\,|\,9\,|\,12).$$

Die Strecken $\overline{S_1D_1}$, $\overline{S_2D_2}$, $\overline{S_3D_3}$ und $\overline{S_4D_4}$ nennt man Grate.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Gebäudes samt Dach. (Längeneinheit 1cm $\triangleq$ 1m; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $0{,}5\cdot\sqrt{2}$; Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse 135°).



b) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Grates $\overline{S_2D_2}$ gegen den Fußboden des Speichers.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ und dem Fußboden des Speichers.

d) Ermitteln Sie das Flächenmaß der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$.

Im Punkt A (9 | 5 | 10) wird ein 6 m langer Antennenmast, der das Dach durchstößt, senkrecht auf dem Fußboden des Speichers montiert.

e) Bestimmen Sie die Länge, mit der der Mast ins Freie ragt.

f) Vom Mittelpunkt des Mastes aus ist eine Stütze senkrecht zur Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ angebracht. Ermitteln Sie die Länge der Stütze, wenn sie auf dieser Dachfläche endet.

g) In der Vorderfront des Hauses befindet sich ein Torbogen. Er hat die Form eines Kreisbogens und geht durch die Punkte K_1 (10 | 3 | 0), K_2 (10 | 9 | 0) und K_3 (10 | 4 | 2).
Bestimmen Sie die Höhe des Torbogens.

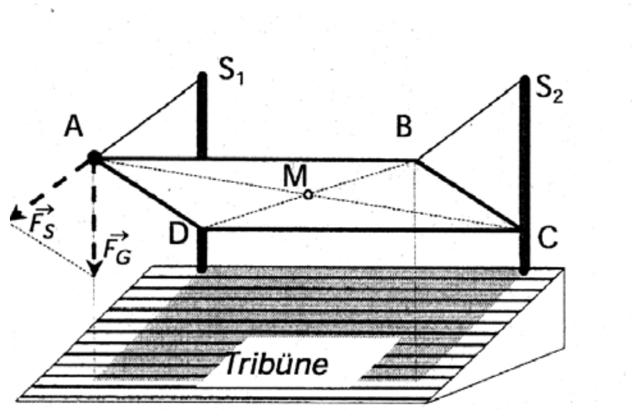
Aufgabe 13 Tribüne

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6|-12|22)$, $B(38|4|22)$ und $M(19|2|19)$ sowie die Ebene $\boldsymbol{E_1}$: $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 65$ gegeben. .

a) Die Punkte A, B und M bestimmen eine Ebene $\boldsymbol{E_2}$.
Berechnen Sie eine Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$ in Koordinatenform und den Winkel, den $\boldsymbol{E_2}$ mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
[Mögliches Ergebnis: $\boldsymbol{E_2}$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$.]

b) Die Punkte A und B seien Eckpunkte, der Punkt M sei Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms $ABCD$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und D und zeigen Sie, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.

Das Dach über dem Teilbereich einer Tribüne kann durch das Rechteck $ABCD$ aus Aufgabenteil b) beschrieben werden, wenn 1LE im Koordinatensystem 1m entspricht und die Horizontalebene durch die x_1x_2-Ebene dargestellt wird.
In den Punkten C und D ist das Dach an zwei zur Horizontalebene senkrecht stehenden Masten befestigt. Von den Punkten $S_1(0|0|26)$ und $S_2(32|16|26)$ führt jeweils ein Befestigungsseil zu den Punkten A bzw. B.
Die Tribüne liege in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$.



Skizze nicht maßstäblich

c) Im Punkt M soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Mindestabstand von 10 m zu jedem Punkt der Tribüne vorgeschrieben. Untersuchen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

d) Die Punkte $A'(6|-12|1)$, B', C' und D' seien die Projektionen der Punkte A, B, C und D auf die Tribüne, die durch zur Horizontalebene senkrechte Strahlen entstehen. Ermitteln Sie die Koordinaten von B', C' und D'.
A', B', C' und D' seien die Eckpunkte der überdachten Fläche der Tribüne. Bestimmen Sie das Maß dieser Fläche.

e) Ermitteln Sie den Winkel, den die Seile mit dem Dach einschließen.
Im Punkt A wirkt eine Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$, mit $|\overrightarrow{F_G}| = 10\,000\ N$, senkrecht zur Horizontalebene.
Diese Kraft kann in eine Komponente $\overrightarrow{F_s}$, die in Richtung der Befestigungsseile wirkt, und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt, zerlegt werden.
Ermitteln Sie den Betrag der Kraft $\overrightarrow{F_s}$.

5 Lösungen

5.1 Grundkursaufgaben

Aufgabe 1 Vegetation

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$L = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ v_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche zu Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird. n_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der nicht verbrennt und daher nach 10 Jahren zur Klasse $i + 1$ gehört ($i < 4$) bzw. in Klasse 4 verbleibt. Daher stehen n_i für $i = 1, 2$ und 3 in Zeile $i + 1$, mit der die Fläche von Klasse $i + 1$ berechnet wird. In Zeile 4 kommt noch n_4 hinzu, da dieser Anteil von Pflanzen in Klasse 4 verbleibt.	10	10	
b)	Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide machen 100 % aus, also 1.		5	
c)	Sei $X_0 = (302 \mid 284 \mid 314 \mid 1100)^T$. Dann ist die Population nach 10 Jahren $X_1 = L \cdot X_0$. $X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 302 \\ 284 \\ 314 \\ 1100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 386 \\ 299 \\ 278 \\ 1037 \end{pmatrix}$	15		
d)	Langfristig streben in diesem Modell die Flächengrößen jeweils gegen feste Werte: Die Gesamtfläche bleibt nach Vorgaben der Aufgabe unverändert 2000 km², und da die Zeilen der Matrix jeweils gleiche Elemente enthalten, ergeben sich jeweils immer dieselben Anteile an der Gesamtfläche: Anteile der Klassen 1 und 2: $0{,}185 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 370\ \text{km}^2$. Anteil der Klasse 3: $0{,}18 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 360\ \text{km}^2$. Anteil der Klasse 4: $0{,}45 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 900\ \text{km}^2$.		10	10
e)	*Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z.B.* $X_{i+1} = f(X_i) = L \cdot X_i$ und D_f = Menge aller Vektoren mit 4 Komponenten = Zielmenge.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$g(t) = L^t \cdot X_0$ (für konstante Anfangspopulation X_0 mit $D_f = \mathbb{N}$, Zielmenge wie oben. *Die 2. Darstellung eignet sich eher für Langzeitprognosen*: Population nach 50 Jahren: $g(5) = L^5 \cdot X_0$. 1. Darstellung: $X_5 = f(X_4) = f(f(X_3)) = f(f(f(X_2))) = f(f(f(f(X_0))))$ *oder ab hier verbalisiert.*			15
f)	$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}07 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}93 \end{pmatrix}$ Die Prozentanteile für das Abbrennen stehen in Zeile 1, $m_{11} = 1$, da Klasse 1 nicht abgebrannt wird, also unverändert bleibt. In den restlichen Zeilen steht der entsprechende Anteil, der nicht abgebrannt wird, in der Diagonalen, die zugehörige Klasse verkleinert sich entsprechend. $M \cdot (L \cdot X_i)$ beschreibt den kompletten Vorgang: $X_{i+1} = L \cdot X_i$ liefert die Flächenmaße durch spontane Brände, $X_{\text{neu}} = M \cdot X_{i+1}$ schließlich die sich durch gewolltes Abbrennen daraus ergebenden Flächen: $M \cdot (L \cdot X_i)$. *Die Reihenfolge ergibt sich aus dem Aufgabentext.*		25	
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 2 Kosten-Preis-Kalkulation

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$A=\begin{pmatrix}2&8&0\\3&2&0\\5&0&10\\0&2&6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&6\\3&2\\5&2\end{pmatrix}$ Es gilt $A\cdot B=C$. $\begin{pmatrix}2&8&0\\3&2&0\\5&0&10\\0&2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&6\\3&2\\5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&28\\18&22\\70&50\\36&16\end{pmatrix}=C$.	15		
b)	$C\cdot\vec{x}_E=\vec{x}_R$ mit $\vec{x}_E=\begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}32&28\\18&22\\70&50\\36&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1480\\1020\\2900\\1200\end{pmatrix}$ Bei der Abwicklung des Kundenauftrages werden folgende Rohstoffmengen benötigt: 1 480 ME von R_1, 1 020 ME von R_2, 2 900 ME von R_3 und 1 200 ME von R_4. $B\cdot\vec{x}_E=\vec{x}_Z$ mit $\vec{x}_E=\begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4&6\\3&2\\5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}260\\120\\160\end{pmatrix}$ Bei der Abwicklung des Kundenauftrages werden folgende Mengen an Zwischenprodukten benötigt: 260 ME von Z_1, 120 ME von Z_2 und 160 ME von Z_3. $K=K_R+K_Z+K_E+0,2(K_R+K_Z+K_E)=1,2(K_R+K_Z+K_E)$ $\vec{k}_R\cdot\vec{x}_R=K_R$ mit $\vec{k}_R=\begin{pmatrix}5&1&3&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5&1&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1480\\1020\\2900\\1200\end{pmatrix}=19520$ Für den Auftrag betragen die Materialkosten der Rohstoffe 19 520 €.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$\vec{k}_Z \cdot \vec{x}_Z = K_Z \quad mit \quad \vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix} = 20800$$

Für den Auftrag betragen die Herstellkosten der Zwischenprodukte 20 800 €.

$\vec{k}_E \cdot \vec{x}_E = K_E \quad mit \quad \vec{k}_E = \begin{pmatrix} 250 & 100 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = 8000$$

Für den Auftrag betragen die Herstellkosten der Endprodukte 8 000 €.

$K = 1{,}2(19520 + 20800 + 8000) = 57\,984$

Die Gesamtkosten K des Kundenauftrages betragen 57 984 €.

$$p_{\text{Min}} = \frac{K}{20+30} = \frac{57984}{50} = 1159{,}68$$

Der zugehörige Mindestverkaufspreis für beide Endprodukte muss auf volle Euro gerundet 1.160 € betragen.

</td><td>15</td><td>35</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Die Absatzmenge von E_1 sei gleich x_{E_1}, dann gilt gemäß des vorgegebenen Mengenverhältnisses von 1:3, dass die Absatzmenge von E_2 gleich $3\,x_{E_1}$ betragen muss.

$$C \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_R \quad mit \quad \vec{x}_E = \begin{pmatrix} x_{E_1} \\ 3x_{E_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{E_1} \\ 3x_{E_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \\ 220x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \end{pmatrix}$$

Die Rohstoffvorräte entsprechen dem angegebenen Vektor $\vec{x}_R$

Nach der vorherigen Rechnung muss gelten: $84x_{E_1} = 20160$.

$\Rightarrow x_{E_1} = 240 \;\wedge\; 3x_{E_1} = 720$

Unter der Beibehaltung des Mengenverhältnisses von 1:3 können maximal 240 ME von E_1 und 720 ME von E_2 produziert werden.

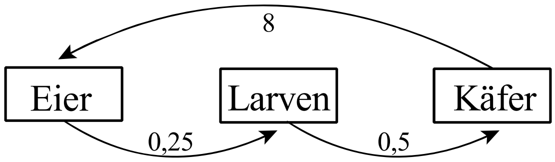
Wenn ein bestimmter Lagervorrat an Rohstoffen zur unverzüglichen Erfüllung von Kundenaufträgen bereitgehalten werden soll, so erfordert dies zunächst Kapital in Höhe der Beschaffungskosten der Vorräte.

Die Finanzierung der Lagervorräte kann entweder aus eigenen Mitteln oder durch Kredite (Fremdmittel) erfolgen. In beiden Fällen ist das Kapital in den Vorräten gebunden und für andere Zwecke nicht verfügbar. Zum Kapitalbedarf für die Vorräte kommen noch Folgekosten der Finanzierung hinzu:

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	– bei der Eigenfinanzierung entgehen dem Unternehmen Erträge aus der Nutzung anderweitiger Investitionsmöglichkeiten, – bei der Fremdfinanzierung fallen Zinsaufwendungen für die Kredite auf die Lagerhaltung an.		15	20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 3 Käferpopulation

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Graph:  Populationsmatrix $P=\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40\\40\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\10\\20\end{pmatrix}$ Die Population besteht also aus 320 Eiern, 10 Larven und 20 Käfern nach einem Monat.	20	5	
b)	$\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}320\\10\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}160\\80\\5\end{pmatrix}$, nach 2 Monaten 160 Eier, 80 Larven, 5 Käfer; $\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}160\\80\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\40\\40\end{pmatrix}$, nach 3 Monaten ist wieder der Anfangsbestand erreicht. Die Anzahl der Käfer ist stets kleiner als 60, daher reicht das kleine Terrarium.		20	
c)	$\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8z\\0{,}25x\\0{,}5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ Gleichung I in II eingesetzt ergibt $2z = y$. Damit sind x und y Vielfache von z und der Lösungsvektor lautet $(8 \mid 2 \mid 1)$. Damit bleibt z.B. die Anfangspopulation von 80 Eiern, 20 Larven und 10 Käfern unverändert. Andere Beispiele ergeben sich für andere Werte von z.		15	
d)	$P^2=\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&2\\0{,}125&0&0\end{pmatrix}$ $P^3=\begin{pmatrix}0&0&8\\0{,}25&0&0\\0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&2\\0{,}125&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hier zeigt sich auf andere Weise das Ergebnis von b), nämlich dass nach drei Monaten die Anfangspopulation wieder erreicht ist, weil gilt: $P^3 \cdot X_0 = X_0 = P^2 \cdot (P \cdot X_0) = P^2 \cdot X_1 = P \cdot (P \cdot X_1) = P \cdot X_2 = X_3$. Dabei ist X_0 der Anfangsbestand, X_1 der Bestand nach 1 Monat, X_2 nach 2 und X_3 nach 3 Monaten.		10	10
e)	$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ cb & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ cb & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Die Bedingung lautet $a \cdot b \cdot c = 1$, was bei obiger Matrix P erfüllt ist. Da $M^3 = \mathit{Einheitsmatrix}\ E$ folgt $M^4 = M^3 \cdot M = E \cdot M = M$. Die Potenzen dieser Matrizen der Form M können also nur drei verschiedene Werte annehmen, die zyklisch auftreten: $M = M^4 = M^7 = \ldots \qquad M^2 = M^5 = M^8 = \ldots \qquad M^3 = M^6 = M^9 = \ldots = E$		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 4 Fruchtsäfte

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

a)

$$C = A \cdot B \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 2a_{31}+6a_{33} & a_{31}+2a_{33} & 4a_{31}+2a_{33} \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich:
$$\begin{aligned} 2a_{31} + 6a_{33} &= 16 \\ a_{31} + 2a_{33} &= 6 \\ 4a_{31} + 2a_{33} &= 12 \end{aligned}$$

Durch Auflösen von 2 Gleichungen und Einsetzen in die 3. Gleichung erhält man: $a_{31} = 2$ und $a_{33} = 2$.

$$C \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_R \;\; mit \;\; \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ bedeutet } \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11850 \\ 24300 \\ 6600 \\ 13650 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung von 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 werden folgende Rohstoffvorräte benötigt: 11850 ME von R_1, 24300 ME von R_2, 6600 ME von R_3 und 13650 ME von R_4.

		I	II	III
a)		10	15	

b)

$$B \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_Z \;\text{ mit }\; \vec{x}_Z = \begin{pmatrix} 75 \\ z_2 \\ 100 \end{pmatrix} \;\text{ und }\; \vec{x}_E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e_1 + e_2 + 48 \\ 8e_1 + 10e_2 + 12 \\ 6e_1 + 2e_2 + 24 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich:
$$\begin{aligned} 2e_1 + e_2 + 48 &= 75 & & I & 2e_1 + e_2 &= 27 \\ 8e_1 + 10e_2 + 12 &= z_2 & \text{oder} \quad & II & 8e_1 + 10e_2 - z_2 &= -12 \\ 6e_1 + 2e_2 + 24 &= 100 & & III & 6e_1 + 2e_2 &= 76 \end{aligned}$$

Aus I folgt: $e_2 = 27 - 2e_1$. Eingesetzt in III ergibt sich:

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$6e_1 + 2(27 - 2e_1) = 76$ $6e_1 + 54 - 4e_1 = 76$ $+54 = 76$. $2e_1 = 22$ $e_1 = 11$ Dieses Ergebnis in *III* eingesetzt ergibt $e_2 = 5$. Einsetze in Gleichung *II* liefert $z_2 = 150$. *Möglich ist auch die formale Lösung des LGS:* $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 8 & 10 & -1 & -12 \\ 6 & 2 & 0 & 76 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+3\cdot I]{-II+4\cdot I} \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -6 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[II+6\cdot III]{} \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$ Hieraus lässt sich ablesen: $e_2 = 5 \wedge z_2 = 150$, eingesetzt in I folgt $e_1 = 11$ Die genannten Zwischenproduktbestände lassen sich bei der Produktion aller Endprodukte vollständig verarbeiten. Das Werk A muss dazu 150 ME von Z_2 liefern und es können zu den bestellten 12 ME von E_3, 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 hergestellt werden.	10	15	5
c)	Wenn ein bestimmter Lagervorrat an Zwischenprodukten zur Gewährleistung eines reibungslosen Produktionsablaufes in Werk B bereitgehalten werden soll, so erfordert dies zunächst Kapital in Höhe der Herstellkosten der Vorräte. Die Finanzierung der Lagervorräte kann entweder aus eigenen Mitteln oder durch Kredite (Fremdmittel) erfolgen. In beiden Fällen ist das Kapital in den Vorräten gebunden und für andere Zwecke nicht verfügbar. Zum Kapitalbedarf für die Vorräte kommen noch Folgekosten der Finanzierung hinzu: - bei der Eigenfinanzierung entgehen dem Unternehmen Erträge aus der Nutzung anderweitiger Investitionsmöglichkeiten, - bei der Fremdfinanzierung fallen Zinsaufwendungen für die Kredite auf die Lagerhaltung an. *Jede andere (eventuell kürzere) Darstellung mit obigen Aspekten wird als richtig bewertet.*		5	5
d)	<u>Bestimmung des Minimums von K:</u> $K'(t) = 3t^2 + 24t - 144$ und $K''(t) = 6t + 24$ $K'(t) = 0\ = 0$ bedeutet $3t^2 + 24t - 144 = 0$ bzw. $t^2 + 8t - 48 = 0$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$t_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16+48} \Rightarrow t_1 = 4$ und $t_2 = -12$. t_2 liegt nicht in $]0;9]$, also wird nur noch t_1 betrachtet. t_1 ist mögliche Extremstelle und aus $K''(4) = 48 > 0$ folgt, dass die Gesamtkosten K für $t_1 = 4$ minimal werden. Wann ist das neue Verfahren kostengünstiger? *Der Nachweis kann z. B. über die Lösung einer Ungleichung oder mithilfe einer geeigneten Wertetabelle erfolgen.* Ungleichung $K(t) < 5000$ $t^3 + 12t^2 - 144t + 5000 < 5000$ $t^3 + 12t^2 - 144t < 0$ $t \cdot (t^2 + 12t - 144) < 0$ $t^2 + 12t - 144 = 0$ hat die Lösungen $t_1 \approx 7{,}42$ und $t_2 \approx -19{,}42$. Aus $t(t-7{,}42)(t+19{,}42) < 0$ folgt $0 < t < 7{,}42$. Da t ganzzahlig aus]0,9] gewählt werden muss, kommen also 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 in Frage. *Oder* Wertetabelle: t: 1, 2, 3, 4, 5 → K(t): 4869, 4768, 4703, 4680, 4705 t: 6, 7, 8, 9 → K(t): 4784, 4923, 5128, 5405 Als ganzzahlige Werte für t kommen demnach nur 1, 2, 3, 4, 5, 6, oder 7 in Frage. Die neue Kostensituation ist in Abhängigkeit von t als positiv zu bewerten, weil durch die Umstellung der Produktion auf die neue Technologie die Bandbreite für eine Kostenminderung ($0 < t < 7{,}42$) erheblich größer ist als für eine Kostenerhöhung ($7{,}42 < t \le 9$).		25	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Wertetabelle:

t	K(t)
1	4869
2	4768
3	4703
4	4680
5	4705

t	K(t)
6	4784
7	4923
8	5128
9	5405

Aufgabe 5 GPS

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus den als bekannt vorausgesetzten Informationen geht hervor, dass sich die Person gleichzeitig auf der Oberfläche von drei Kugeln befinden muss: • der Erdkugel • der Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und • der Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2. Wenn die Daten realistisch sind, dann müssen sich die Erdoberfläche und jede der beiden anderen Kugeloberflächen jeweils in einem Kreis schneiden, den man berechnen kann. Die beiden Schnittkreise schneiden sich dann in zwei Punkten, die man dann auch berechnen kann und die in der Regel weit voneinander entfernt liegen, so dass man aus der grob ungefähren Kenntnis des Standortes der Person einen von beiden ausschließen kann.		25	
b)	Es sei $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ ein variabler Punkt. Die Kugelgleichung lautet dann: $\left(\vec{p} - \overrightarrow{sat_1}\right)^2 = d_1^2$, also $\left(x_1 - 2\right)^2 + \left(x_2 - 2\right)^2 + \left(x_3 - 3\right)^2 = 3{,}2^2$. Für die Erdoberfläche gilt: $P^2 = 1$, also $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1$. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt: $4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 17 = -\frac{231}{25}$. Durch Multiplikation der Gleichung mit 25 erhält man das genannte Ergebnis: $100x_1 + 100x_2 + 150x_3 = 194$. Es handelt sich um eine Ebenengleichung. Alle gemeinsamen Punkte auf den beiden Kugeloberflächen müssen diese Gleichung erfüllen (Umkehrung gilt nicht!), also muss es sich um die Ebene des Schnittkreises handeln.	20		
c)	Wenn man das unterbestimmte lineare Gleichungssystem $100x_1 + 100x_2 + 150x_3 = 194$ $600x_1 + 400x_2 + 400x_3 = 711$ äquivalent umformt (Gauß-Algorithmus) erhält man z.B. $x_2 = \frac{581}{400} - \frac{5}{2}x_1 \qquad x_3 = \frac{13}{40} + x_1$ Daraus erhält man folgende Parameterform der Schnittgeraden der beiden Schnittkreisebenen: $g: \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{581}{400} \\ \frac{13}{40} \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$.		20	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Der Standort der Person muss sowohl auf dieser Geraden, als auch auf der Erdoberfläche liegen. Das führt auf folgende quadratische Gleichung:
$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{581}{400} \\ \frac{13}{40} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 1\,.$$
Die Gleichung oder ein anderer zutreffender Ansatz kann auch verbal beschrieben werden.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Mit der Umrechnung $(\beta\,;\lambda) \to (\cos(\beta)\cdot\cos(\lambda) \mid \cos(\beta)\cdot\sin(\lambda) \mid \sin(\beta))$
berechnen wir die Koordinaten von Hamburg
$$H = \left(\cos 53{,}5°\cdot\cos 10° \mid \cos 53{,}5°\cdot\sin 10° \mid \sin 53{,}5°\right)$$ $$\approx \left(0{,}58579 \mid 0{,}10329 \mid 0{,}80386\right)$$
und der Position Pos
$$Pos = \left(\cos 57{,}3°\cdot\cos 17{,}5° \mid \cos 57{,}3°\cdot\sin 17{,}5° \mid \sin 57{,}3°\right)$$ $$\approx \left(0{,}51524 \mid 0{,}16245 \mid 0{,}84151\right).$$
Sowohl H als auch Pos liegen auf der Erdoberfläche, haben also in dem gewählten Maßstab den Betrag 1. Mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet man den sphärischen Winkel:
$$\sphericalangle H\,O\,Pos \approx \cos^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0{,}58579 \\ 0{,}10329 \\ 0{,}80386 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}51524 \\ 0{,}16245 \\ 0{,}84151 \end{pmatrix}\right) \approx \cos^{-1}\left(0{,}99506\right) \approx 5{,}7°\,.$$
Für die zugehörige Bogenlänge auf der Erdoberfläche gilt dann:
$$b \approx \frac{5{,}7}{360}\cdot 40\,000 \approx 633\,.$$
Die kürzeste Weglänge auf der Erdoberfläche von Hamburg zur Position der Person beträgt etwa 633 km.</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 6 Louvre Pyramide

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	*S* liegt in x_3-Richtung 22 m über dem Mittelpunkt $M(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 0)$ der Grundfläche der Pyramide. Darum hat *S* die Koordinaten $(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 22)$. *Zeichnung siehe Anlage.*	10		
b)	Eine Parameterform der Ebene *E* ergibt sich aus der Drei-Punkte-Form: $\boldsymbol{E}: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}\ ,\ r,t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}\ ,\ r,t \in \mathbb{R}$. Eine Koordinatenform lässt sich mithilfe eines Normalenvektors zur Ebene oder durch Umformen eines Gleichungssystems finden zu: $44x_2 - 35x_3 = 0$.		20	
c)	Um auf a) zurückgreifen zu können, betrachten wir die Seitenfläche *ABS*: Der Winkel, den zwei Ebenen einschließen, entspricht dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren der Ebenen. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von $\boldsymbol{E}$ entnimmt man der Koordinatendarstellung aus Teil b): $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor $\vec{n}_{x_1,x_2}$ zur x_1x_2-Ebene ist z.B. $\vec{n}_{x_1,x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Über die Beziehung $\cos(\alpha) = \frac{\lvert \vec{n} \cdot \vec{n}_{x_1,x_2} \rvert}{\lvert\vec{n}\rvert \cdot \lvert\vec{n}_{x_1,x_2}\rvert}$ erhält man einen Winkel zwischen den Normalenvektoren von 51,50°, der dem Winkel zwischen der Pyramidenfläche *ABS* und dem Fußboden entspricht. <u>Alternative:</u> Man betrachtet das bei *M* rechtwinklige Dreieck SMM_x, wobei *M* der Mittelpunkt der Bodenfläche und M_x der Mittelpunkt der Pyramidenkante $\overline{AB}$ sei. Dieses Dreieck hat die Kathetenlängen 22 m und 17,5 m. Der gesuchte Winkel liegt der Seite $\overline{MS}$ gegenüber. Also $\tan(\alpha) = \frac{22}{17{,}5}$, und damit $\alpha \approx 51{,}5°$.		20	
d)	Die zur Fußbodenseite gehörende Höhe eines jeden der Pyramidendreiecke erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras aus der Höhe der Pyramide und der halben Fußbodenseite: $h_\Delta = \sqrt{22^2 + 17{,}5^2}$ und damit: $A_\Delta = \frac{35 \cdot h_\Delta}{2}\,\mathrm{m}^2 \approx 492\,\mathrm{m}^2$. Acht Flächen sind zu reinigen, also rund 4 000 Quadratmeter.	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Geradengleichung des „Sonnenstrahls" durch *S* lautet: $$g_5:\ \vec{x}=\overrightarrow{OS}+t\cdot\vec{r}=\begin{pmatrix}15t+\frac{35}{2}\\10t+\frac{35}{2}\\-10t+22\end{pmatrix}.$$ Auf dem Fußboden ist die x_3-Komponente Null. Also gilt für den Schattenpunkt *P* der Pyramidenspitze: $t=\frac{11}{5}$ und damit hat *P* die Koordinaten: $(\,50{,}5\,\vert\,39{,}5\,\vert\,0\,)$.		10	
f)	Der Schwerpunkt M_1 des Dreiecks *ABS* hat den Ortsvektor $\overrightarrow{0M}_1=\frac{\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{0S}}{3}$ und damit hat M_1 die Koordinaten: $\left(\frac{35}{2}\ \vert\ \frac{35}{6}\ \vert\ \frac{22}{3}\right)$ *Wenn diese Schwerpunktformel nicht bekannt ist, kann man auch rechnen:* $\overrightarrow{0M}_1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{0S}+\overrightarrow{0B}}{2}\right)$, da *A* im Koordinatenursprung liegt. Damit hat M_1 die Koordinaten: $\left(\frac{35}{2}\ \vert\ \frac{35}{6}\ \vert\ \frac{22}{3}\right)$. *Falls gar keine Kenntnisse über den Schwerpunkt von Dreiecken vorhanden sind, kann man der Formelsammlung entnehmen, dass dieser der Schnittpunkt von zwei (aller drei) Seitenhalbierenden ist. Auch auf diesem Wege kann (notfalls) der Schwerpunkt M_1 ermittelt werden.* Der Scheinwerfer liegt auf einer Geraden mit der Gleichung: $$g:\ \vec{x}=\overrightarrow{OM_1}+t\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OM_1}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\44\\-35\end{pmatrix}\qquad\text{(vgl. Teil c))}$$ Um den gesuchten Scheinwerferpunkt M_S zu ermitteln, ist *t* so zu bestimmen, dass die zweite Komponente –7 wird. Also $44\cdot t+\frac{35}{6}=-7$. Man erhält: $t=-\frac{7}{24}\approx-0{,}29$ und damit die Koordinaten für den Ort M_S der Lichtquelle: $\left(\frac{35}{2}\vert-7\vert\frac{421}{24}\right)\approx(17{,}5\vert-7\vert17{,}5)$. Die notwendige Höhe der Lichtquelle beträgt also 17,5 m.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 7: Elementarzelle

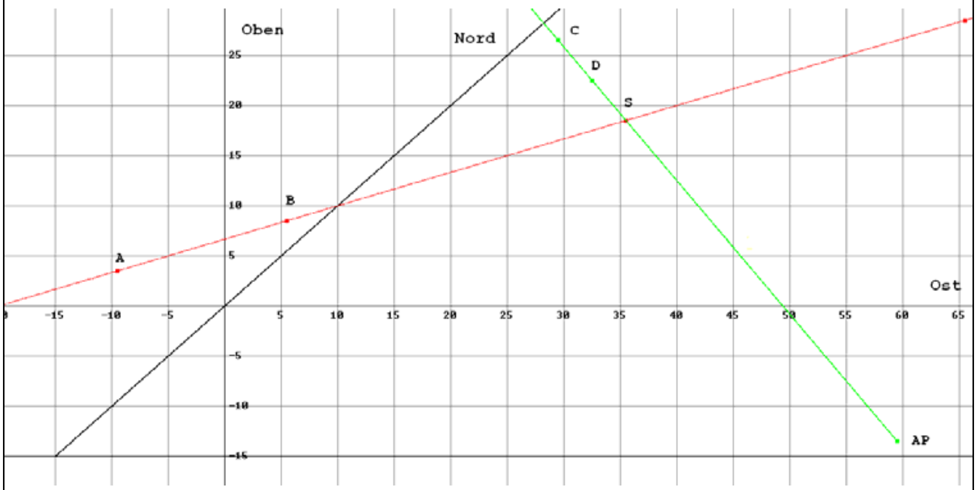
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Elementarzelle kann man sich in vier Einheitswürfel unterteilt denken. Die Raumdiagonale eines Einheitswürfels hat die Länge $d=\sqrt{3}$. Da der Berührungspunkt der äußeren Kugel und der Zentralkugel auf dieser Diagonalen liegt, müssen sich die beiden Radien r und r_a zu $\sqrt{3}$ ergänzen. Wenn die äußeren Kugeln sich (auf der Oberfläche der Elementarzelle) berühren, haben sie den größtmöglichen Radius von $r_a=1$. Wenn die Zentralkugel bis zur Oberfläche der Elementarzelle reicht, hat ihr Radius den größtmöglichen Wert von $r=1$. Damit gilt: $\sqrt{3}-1\le r\le 1$.	15		
b)	Die acht Kugelanteile der äußeren Kugeln, die in der Elementarzelle liegen, bilden zusammen eine Kugel mit dem Radius r_a. Damit ergibt sich die Volumenfunktion V zu $V(r)=\frac{4}{3}\pi\cdot(r_a{}^3+r^3)=\frac{4}{3}\pi\cdot((\sqrt{3}-r)^3+r^3)$. Ausmultipliziert ergibt sich $V(r)=4\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(r^2-\sqrt{3}r+1\right)$. *(Die Volumenfunktion ist also eine einfache quadratische Funktion von r!)* Nicht von den Kugeln eingenommen wird damit $V_{Rest}(r)=8-4\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(r^2-\sqrt{3}r+1\right)$. Da der Graph dieser Funktion eine nach unten geöffnete Parabel ist, muss die einzige Nullstelle der Ableitung (oder: der Scheitelpunkt der Parabel) eine Maximalstelle der Funktion sein. Mit $V'_{Rest}(r)=-4\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(2r-\sqrt{3}\right)$ ergibt sich: Das Restvolumen ist bei $r=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660$ maximal und hat einen Wert von $V_{Rest}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8-\pi\cdot\sqrt{3}\approx 2{,}5586$.		35	
c)	Die acht Kugelanteile der äußeren Kugeln, die in der Elementarzelle liegen, bilden zusammen eine Kugel mit dem Radius r_a. Damit ergibt sich die Oberflächenfunktion A zu $A(r)=4\pi\cdot(r_a{}^2+r^2)$ $=4\pi\cdot\left((\sqrt{3}-r)^2+r^2\right)$ $=8\pi\cdot(r^2-\sqrt{3}\cdot r+1{,}5).$ Auch ohne abzuleiten kann sofort gesehen werden, dass der Graph von A eine nach oben geöffnete Parabel und deswegen der Scheitelpunkt von A das einzige Minimum der Funktion ist. Es ergibt sich: $r_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660$ und damit $A(r_{\min})=6\pi\approx 18{,}8496$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dass V und A an derselben Stelle ihr Extrem aufweisen und dass die Extremalstelle genau in der Mitte der Diagonalen liegt, ist dann nicht mehr weiter verwunderlich, wenn man bedenkt, dass bei dieser Anordnung der Kugeln Zentralkugel und Randkugeln austauschbar sind, siehe e).		25	
d)	Da in einer Elementarzelle eine Zentralkugel und von den acht äußeren Kugeln jeweils ein Achtel (nämlich ein Kugeloktant) liegen, liegen in einer Elementarzelle je eine Kugel vom Typ Zentralkugel und eine vom Typ äußere Kugel. *(Daraus ergibt sich auch, dass beim kubisch-raumzentrierten Kristall die Rollen von Zentralkugel und von Außenkugel austauschbar sind – eine Verschiebung der Elementarzelle um eine halbe Kantenlänge kehrt die Rollen um. Damit ist natürlich auch die Symmetrie der Funktionen V und A bezüglich r verständlich.)* Da $0,43 > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \approx 0,4227$, liegt das Verhältnis von 43:57 (noch) im Definitionsbereich von *r*, die „Atomkugeln“ können sich also tatsächlich berühren. Das Restvolumen ergibt sich zu 2,2387 oder zu etwa 87,5 % des maximalen Restvolumens. Die Oberfläche ergibt sich zu 19,219, sie liegt damit etwa 2 % über der minimalen Oberfläche.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	15	70	15

Aufgabe 8 Flugbahnen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	<u>Allgemeine Bemerkung zur Lösung dieser Aufgabe:</u> Diese Aufgabe lässt sich in vielen Teilen mit sehr anschaulichen – auf Grundvorstellungen basierenden – Argumenten lösen, natürlich auch mit den üblichen Standardmethoden. Im Hinblick auf einen Kompetenz-bezogenen Mathematikunterricht sollten möglichst viele Grundvorstellungen und Argumentationswege entwickelt werden. Die hier vorgestellten Lösungsteile versuchen – wo immer es geht – inhaltlich zu argumentieren, statt formal zu rechnen.			
a)	Wir rechnen zunächst für jede Flugbahn einen Richtungsvektor als Differenzvektor aus: $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Das erste Flugzeug fliegt also nach Nordosten (die x_1- und die x_2-Komponente sind beide positiv und dem Betrag nach gleich) und das zweite Flugzeug fliegt nach Südosten (die x_1-Komponente ist positiv und die x_2-Komponente ist negativ und beide sind dem Betrag nach gleich). Das erste Flugzeug hält die Höhe (die x_3-Komponente ist null) und das zweite Flugzeug befindet sich im Sinkflug (die x_3-Komponente ist negativ).	10		
b)	Dem Richtungsvektor $\vec{v}$ kann man ansehen, dass das zweite Flugzeug in einer Minute um einen Kilometer sinkt. Die Ausgangshöhe war 10 km, also braucht das Flugzeug ab 8 Uhr 2,5 Minuten, um auf 7500 m zu sinken. $\vec{c} + 2{,}5 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 18 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$. Um 8:02:30 Uhr war das Flugzeug in 7 500 m Höhe am Ort Q mit den Koordinaten $Q\ (28 \mid 18 \mid 7{,}5)$. Die Zeitangaben sind deshalb korrekt, weil $t < 4$ und wir uns also innerhalb der ersten vier Minuten nach 8:00 Uhr befinden.	10		
c)	Die Argumentation verläuft völlig analog zu b): wir bestimmen den Punkt *AP*, bei dem die x_3-Komponente Null ist, das muss bei $t = 10$ der Fall sein (Hier sollte man t nur als Parameter betrachten, da das Flugzeug sicherlich vor dem Aufsetzen seine Geschwindigkeit verringert hatte.). $\vec{c} + 10 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -27 \\ 0 \end{pmatrix}$ Also hat *AP* die Koordinaten $(73 \mid -27 \mid 0)$.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Das zweite Flugzeug sinkt anfangs – ausgehend von einer Höhe von 10 km – in einer Minute um einen Kilometer. Das erste Flugzeug hält die Höhe von 8 km. Also ist das zweite Flugzeug bei $t = 2$ auf die Flughöhe von 8 km gesunken. $\vec{c} + 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}.$ Dann befindet es sich also im Punkt S mit den Koordinaten (25 | 21 | 8). Nur dieser Punkt S könnte ein Schnittpunkt der Flugbahnen sein. Es ist deshalb nur zu prüfen, ob dieser Punkt auf der Flugbahn des ersten Flugzeuges liegt. Das erste Flugzeug legt, wie schon festgestellt wurde, in x_1- und x_2-Richtung je 10 km pro Minute zurück, genauer: es vergrößert ausgehend von A (–5 | –9 | 8) den x_1-Wert und den x_2-Wert jeweils um 10 pro t-Einheit. Man erkennt, dass man um zum Punkt S zu kommen, den x_1-Wert und den x_2-Wert jeweils um 30 vergrößern muss, also wird der Punkt S für $t = 3$ erreicht. Somit schneiden sich die Flugbahnen. *<u>Bemerkung:</u> Wenn man hier formal rechnet, also den möglichen Schnittpunkt von zwei Geraden über ein lineares Gleichungssystem untersucht, dann müssen für die Parameter der beiden Geraden natürlich zwei verschiedene Variable angesetzt werden. Die Diskussion darüber kann fruchtbar sein.*		20	
e)	Für $t = 2$ auf der zweiten Flugbahn, bzw. für $t = 3$ auf der ersten Flugbahn erhält man den Schnittpunkt S. Beide Werte liegen in dem Vier-Minuten-Intervall, geben also auch die Zeitpunkte an, zu denen sich die Flugzeuge am Ort S befanden. Die beiden Flugzeuge passierten diese Stelle also in einem zeitlichen Abstand von einer Minute. Bei der üblichen Geschwindigkeit von Flugzeugen (vgl. f) war jedes der beiden Flugzeug mehrere Kilometer von S entfernt, als das andere Flugzeug den kritischen Punkt S passierte, insofern bestand keine Kollisionsgefahr Ein Fluglotse sieht das vermutlich anders und würde zwei Flugzeuge nicht im Minutenabstand an die gleiche Stelle „lotsen". *<u>Bemerkung:</u> Streng genommen müsste man auch noch hinzufügen, dass der Winkel zwischen den Flugbahnen nicht extrem spitz (oder gar Null) ist.*		10	
f)	Das erste Flugzeug fliegt in einer Minute von A ($t = 0$) nach B ($t = 1$). Ebenso fliegt das zweite Flugzeug in einer Minute von C ($t = 0$) nach D ($t = 1$). Darum berechnen wir einerseits den Abstand von A nach B und andererseits den Abstand von C nach D: $Abst(A,B) = \sqrt{\left(\vec{b} - \vec{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{u}\right)^2} = \sqrt{200} \approx 14{,}14,$ $Abst(C,D) = \sqrt{\left(\vec{d} - \vec{c}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{v}\right)^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}54.$ Das erste Flugzeug fliegt also zur betrachteten Uhrzeit mit einer Geschwindigkeit von 14,14 km/min ≈ 849 km/h, das zweite Flugzeug fliegt zur betrachteten Uhrzeit mit einer Geschwindigkeit von 8,54 km/min ≈ 513 km/h.		10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>
</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Statt des Abstandes eines beliebigen Punktes P_t auf der ersten Flugbahn mit dem Parameterwert t zum Flugsender minimieren wir dessen Quadrat:

$(105-10t)^2+(109-10t)^2+64=200\,t^2-4280\,t+22970$

Diese quadratische Funktion hat ihr Minimum / ihre Scheitelstelle bei $t = 10{,}7$ und dort den Wert 72. Der minimale Abstand zum Flugsender betrug also $\sqrt{72}\text{ km}\approx 8{,}485\text{ km}$.

Weiter gilt: $\vec{a}+10{,}7\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}102\\98\\8\end{pmatrix}$. Das Flugzeug befand sich im Punkt $P(102 \mid 98 \mid 8)$ dem Flugsender am nächsten.

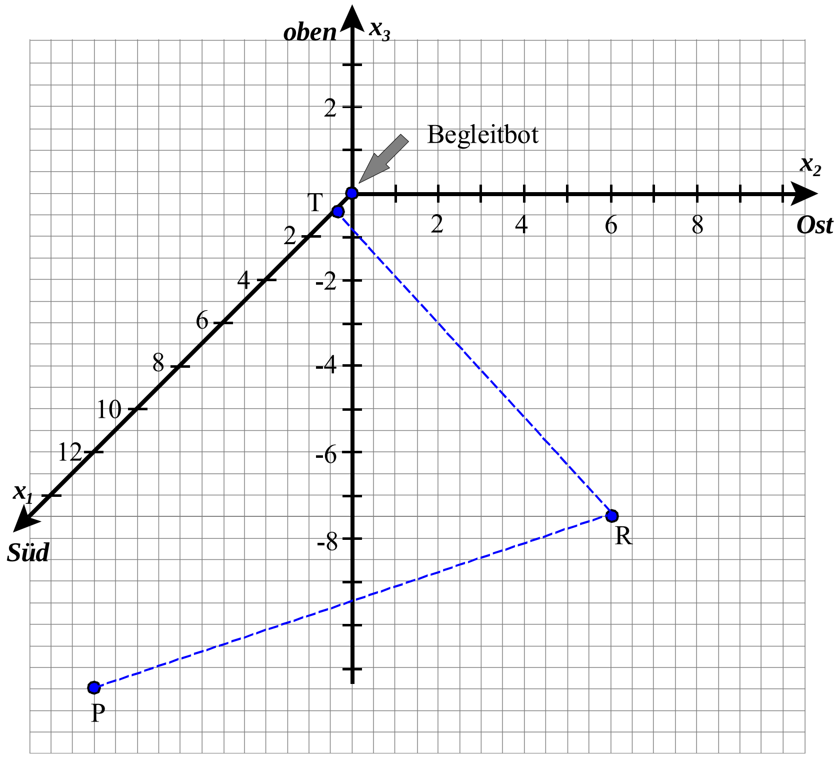
Um den Zeitpunkt bestimmen zu können, müsste man wissen, ob und ggf. wie das Flugzeug seine Geschwindigkeit verändert hatte. Wenn es seit 8:00 Uhr die Geschwindigkeit nicht verändert hätte, dann wäre das Flugzeug dem Flugsender um 8:10:42 Uhr am nächsten gewesen.

<u>Bemerkung:</u> Ein zweiter Weg führt über die Bestimmung der Länge des Lotes vom Flugsender auf die Flugbahn: Dann muss die Gleichung

$\left(\vec{a}+t\cdot\vec{u}-\overrightarrow{FS}\right)\cdot\vec{u}=0$ gelöst werden, und man erhält ebenfalls $t = 10{,}7$.

Der berechnete minimal Abstand von 8,485 km lässt übrigens darauf schließen, dass das Flugzeug fast genau vertikal über den Flugsender geflogen ist, wahrscheinlich navigierte der Pilot so, dass er auf seiner Route der Reihe nach Flugsender abflog.</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>40</td><td>40</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 9 U-Boot

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		5		
b)	Richtung Nordost heißt hier, dass die Gerade den Richtungsvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ hat. Mit dem Stützvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}$ ergibt sich für *g*: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}$.	5		
c)	Für den horizontalen Drehwinkel wird die x_3-Komponente des Richtungsvektors Null gesetzt. Damit erhält man den neuen Richtungsvektor $\vec{w}_e=\begin{pmatrix}-8\\-13\\0\end{pmatrix}$. Mithilfe der Formel für das Skalarprodukt ergibt sich als Drehwinkel in der Ebene: $\cos\alpha=\frac{\lvert\vec{v}\cdot\vec{w}_e\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{w}_e\rvert}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{\lvert 8-13\rvert}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{233}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{466}}\Rightarrow\alpha\approx 76{,}6^\circ$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Als Steigungswinkel verstehen wir den Winkel zwischen der Geraden mit dem Vektor $\vec{w}$ als Richtungsvektor und der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene, in der g liegt. Zur Berechnung benötigen wir nur den Richtungsvektor $\vec{w}$ und einen Normalenvektor der Ebene, z. B. $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, und setzen beide in die entsprechende Formel zur Schnittwinkelberechnung ein:

$$\sin\beta=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{n}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{n}|} \Leftrightarrow \sin\beta=\frac{|9|}{\left|\sqrt{314}\right|\cdot|1|} \Rightarrow \beta\approx 30{,}5°.$$

T ist der Schnittpunkt einer Geraden h und der x_1x_2-Ebene, wobei h die neue Fahrtroute beschreibt. Es gilt: $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}$. Gesucht ist s, sodass die x_3-Komponente Null wird.

Aus $-540+s\cdot 9=0$ folgt $s = 60$. Dieser Wert von s wird in die Gleichung von h eingesetzt und es ergibt sich: $\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+60\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-80\\20\\0\end{pmatrix}$, also hat T die Koordinaten (–80 | 20 | 0).

</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Der Abstand eines Punktes auf der Geraden h zum Ursprung O(0 | 0 | 0) ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} d(s)&=\left|\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right| \\ &=\sqrt{(400-8s)^2+(800-13s)^2+(-540+9s)^2} \\ &=\sqrt{314s^2-36920s+1091600}\end{aligned}$$

Der Wurzelausdruck ist extremal, wenn der Radikand extremal ist. Also:

$f(s)=314\cdot s^2-36\,920\cdot r+1\,091\,600$ und $f'(s)=628\cdot s-36\,920$. Die notwendige Bedingung für Extrempunkte ist: $f'(s)=0$. Lösen der linearen Gleichung $628\cdot s-36920=0$ führt zu $s\approx 58{,}79$. Da der Graph von f eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt bei $s\approx 58{,}79$ ein Tiefpunkt. Für S folgt daher:

$$\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+58{,}790\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-70{,}32\\35{,}73\\-10{,}89\end{pmatrix}.$$

Von allen Punkten der Geraden h hat der Punkt S(–70,32 | 35,73 | –10,89) den geringsten Abstand zum Ursprung.

Hinweis: Die x_3-Komponente ist negativ, also ist S tatsächlich ein Punkt der Fahrtstrecke von dem U-Boot.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Der SONAR-Bereich lässt sich vereinfacht als Kugel K auffassen, mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Am Punkt P tritt das U-Boot in den SONAR-Bereich ein, also hat das SONAR eine Reichweite von $r = \sqrt{1200^2 + 540^2} \approx 1316$ m. Das entspricht dem Abstand von P zum Ursprung. Der Sonarbereich lässt sich als Kugel K mit dem Radius r vorstellen. Es gilt: $K:\ \vec{x}^2 \le r^2 = 1\,731\,600$. Gesucht sind die Schnittpunkte von K mit g, also wird der Term von g in K eingesetzt und nach s aufgelöst.
$$\left(\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)^2 = r^2 = 1731600$$
$$(1200-s)^2 + s^2 + (-540)^2 = 1731600$$
$$2\cdot s^2 - 2400\cdot s + 1731600 = 1731600$$
$$2s^2 - 2400s = 0$$
$$s(2-2400) = 0\,.$$
Als Lösung erhält man s = 0 oder s = 1200. s = 0 gehört zum Punkt P und s = 1200 gehört zum Austrittspunkt Q, mit $\vec{q} = \begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix} + 1200\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1200\\-540\end{pmatrix}$.
Also hat der Austrittspunkt Q die Koordinaten (0 | 1200 | –540).

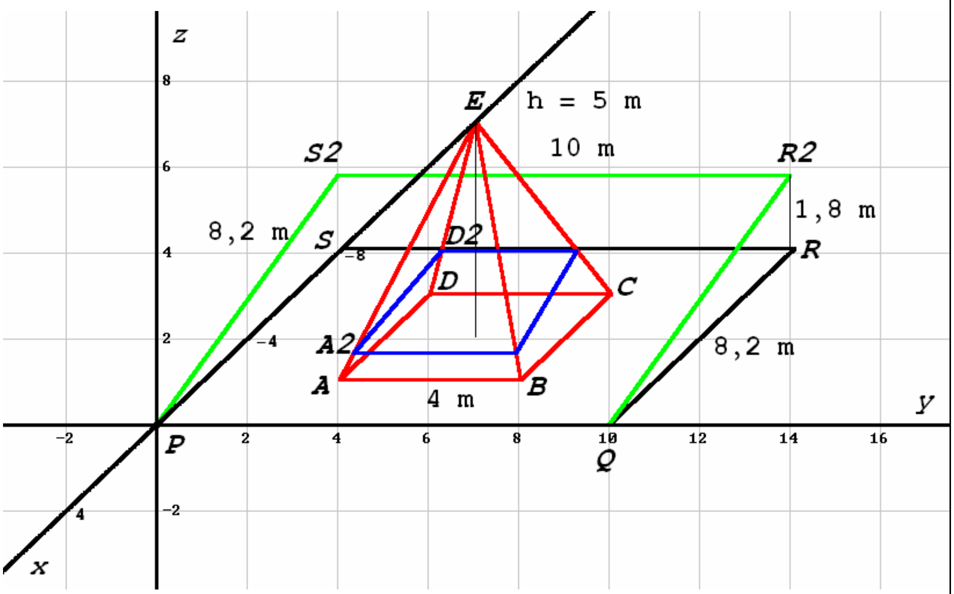
Zur Berechnung der Zeitdauer benötigt man die gefahrene Strecke s, denn mit der Geschwindigkeitsangabe v lässt sich die Zeitdauer t ermitteln. Das U-Boot fährt die Strecke
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1200\\1200\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1200)^2 + 1200^2} = 1200\cdot\sqrt{2} \approx 1\,697\,.$$
Dann gilt: $v = 10\ \text{kn} = \frac{10\cdot 1\,852\ \text{m}}{1\ \text{h}} = 18{,}52\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 18\,520\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und schließlich $t = \frac{s}{v} = \frac{1697}{18520} = 0{,}09163$ Stunden bzw. ca. 5 Minuten und 30 Sekunden.

Das U-Boot befindet sich rund 5,5 min im SONAR-Bereich.
</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Misst man die Zeit t_1, die das Signal braucht, um wieder zurückzukommen, kann man die Entfernung s eines Objekts nach der Gleichung $v = \frac{s}{t}$ mit $v = 1{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ berechnen: $s = v\cdot\frac{1}{2}t_1$.

Misst man jede Sekunde ein Ortungssignal, so erhält man jede Sekunde eine Entfernung. Aus der Entfernungsdifferenz und der Zeitdifferenz lässt sich eine
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

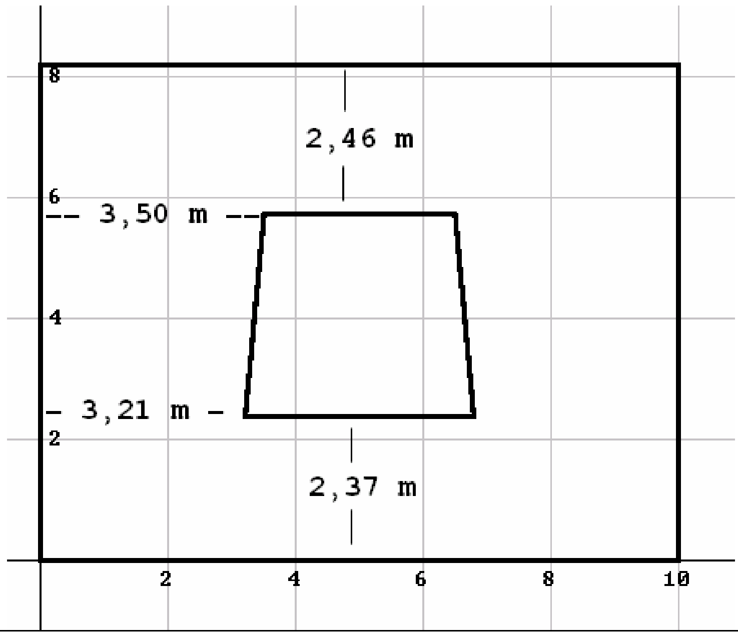
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen. Man erhält mit dieser Methode aber lediglich den Geschwindigkeitsanteil, der sich auf die Signalquelle zu bewegt bzw. von ihr weg bewegt und nicht die tatsächliche Geschwindigkeit des U-Bootes.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 10 Theaterbühne

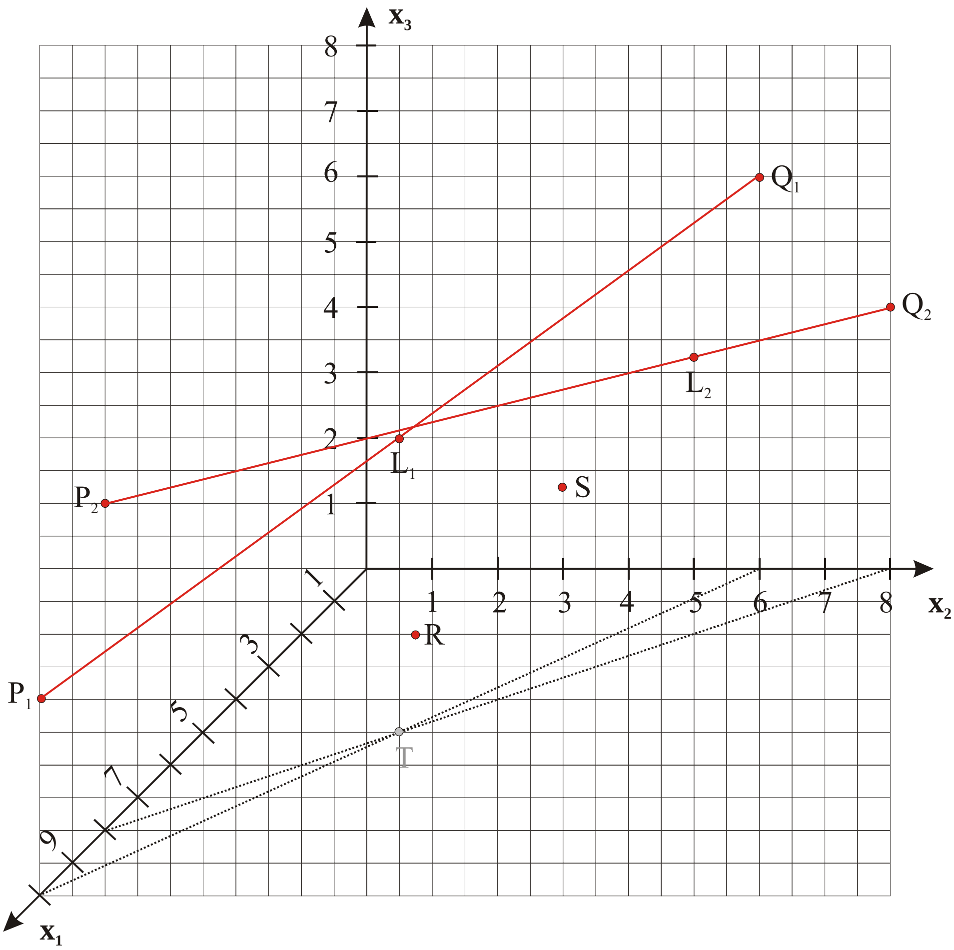
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\sin(\alpha) = \frac{1,8}{8,2}$, also $\alpha \approx 12,68°$.
Der Neigungswinkel des schrägen Bühnenboden zur Fußbodenebene beträgt ca. 13°.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Mit der skizzierten Lage des Koordinatensystems und den skizzierten Punktbezeichnungen gilt:
Boden: $P(0|0|0)$ $Q(0|10|0)$ $R(-8,2|10|0)$ $S(-8,2|0|0)$
Bühnenboden (schräg):
Der x_1-Wert der Punkte R_2 und S_2 muss zunächst mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden: $|x_1| = \sqrt{8,2^2 - 1,8^2} = 8$. Damit erhalten wir weitere Koordinaten.
Schräger Bühnenboden:
$P(0|0|0)$, $Q(0|10|0)$, $R_2(-8|10|1,8)$, $S_2(-8|0|1,8)$.
Pyramidenpunkte:
$A(-2,1|3|0)$, $B(-2,1|7|0)$, $C(-6,1|7|0)$, $D(-6,1|3|0)$, $E(-4,1|5|5)$.</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die x_2-Achse liegt in der Ebene, in der der schräge Bühnenboden liegt, insofern kann man es sich leicht machen und einfach die Gleichung der Spurgeraden in der x_1-x_3-Ebene angeben: $x_3 = -\frac{1,8}{8} x_1$ bzw. $9 \cdot x_1 + 40 \cdot x_3 = 0$
Eine Gleichung der Ebene, in der der schräge Bühnenboden liegt, lautet:
$9 \cdot x_1 + 40 \cdot x_3 = 0$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Man kann auch zuerst die Ebene in Parameterform angeben: z.B. $\vec{x} = s \cdot \vec{q} + t \cdot \vec{s_2}$. Dann erhält man anschließend die Koordinatengleichungen: $x_1 = -8 \cdot t$, $x_2 = 10 \cdot s$, $x_3 = 1{,}8 \cdot t$, woraus man ebenfalls die obige Ebenengleichung erhält.		20	
d)	Wir berechnen die Koordinaten der Punkte A_2 und D_2 als Schnittpunkte der entsprechenden Pyramidenkanten mit der in c) berechneten Bühnenebene. Die anderen beiden Punkte B_2 und C_2 (in der Skizze nicht bezeichnet) kann man dann mit Symmetriebetrachtungen leicht bestimmen. Die Gerade durch A und E lautet in Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{e} - \vec{a})$, also: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die Koordinatengleichungen: $x_1 = -2 \cdot t - 2{,}1 \qquad x_2 = 2 \cdot t + 3 \qquad x_3 = 5 \cdot t$ Diese setzen wir ein in die Ebenengleichung aus c) $9 \cdot (-2 \cdot t - 2{,}1) + 40 \cdot 5 \cdot t = 0$, also $182 \cdot t = 18{,}9$ und damit ergibt sich für den für den Punkt A_2 der Parameterwert $t = \frac{27}{260}$. Das ergibt folgende Koordinaten für A_2 : $A_2\left(\frac{-30}{13} \mid \frac{417}{130} \mid \frac{27}{52}\right)$ näherungsweise: $A_2(-2{,}31 \mid 3{,}21 \mid 0{,}52)$. Aus Symmetriegründen erhält man: $B_2\left(\frac{-30}{13} \mid 10 - \frac{417}{130} \mid \frac{27}{52}\right)$, also $B_2\left(\frac{-30}{13} \mid \frac{883}{130} \mid \frac{27}{52}\right)$, näherungsweise $B_2(-2{,}31 \mid 6{,}79 \mid 0{,}52)$. Zur Bestimmung des Punktes D_2 verfahren wir genau so: Die Gerade durch D und E lautet in Parameterform: $\vec{x} = \vec{d} + t \cdot (\vec{e} - \vec{d})$, also: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die Koordinatengleichungen: $x_1 = 2 \cdot t - 6{,}1 \qquad x_2 = 2 \cdot t + 3 \qquad x_3 = 5 \cdot t$ Diese setzen wir ein in die Ebenengleichung aus c) : $9 \cdot (2 \cdot t - 6{,}1) + 40 \cdot 5 \cdot t = 0$. Damit ergibt sich für den für den Punkt D_2 der Parameterwert $t = \frac{549}{2180} \approx 0{,}252$ und man erhält folgende Koordinaten für den Punkt D_2 :			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$D_2\left(\frac{-610}{109}\middle\vert\frac{3819}{1090}\middle\vert\frac{549}{436}\right)$, näherungsweise: $D_2(-5{,}60\vert 3{,}50\vert 1{,}26)$. Aus Symmetriegründen erhält man: $C_2\left(\frac{-610}{109}\middle\vert 10-\frac{3819}{1090}\middle\vert\frac{549}{436}\right)$, *also* $C_2\left(\frac{-610}{109}\middle\vert\frac{7081}{1090}\middle\vert\frac{549}{436}\right)$, näherungsweise: $C_2(-5{,}60\vert 6{,}50\vert 1{,}26)$.		30	
e)	Den Bühnenbauer interessieren die Abstände der vier Eckpunkte des auszusägenden Vierecks von den Außenseiten des rechteckigen Bühnenbodens. Die im dreidimensionalen Raum unter d) berechneten Koordinaten dieser Eckpunkte sind so noch nicht ausreichend: Die y-Werte sind zwar schon die Abstände von der linken Seite, aber die Abstände von der vorderen bzw. hinteren Seite des Bühnenbodens müssen noch entweder über die Abstandformel oder direkt mit dem Satz des Pythagoras aus den x_1- und x_3-Werten der in d) bestimmten Punkte berechnet werden: Abstand von A_2 zur unteren Seite $=\sqrt{\left(\frac{30}{13}\right)^2+\left(\frac{27}{52}\right)^2}=\frac{123}{52}\approx 2{,}37$ Abstand von D_2 zur oberen Seite $=8{,}2-\sqrt{\left(\frac{610}{109}\right)^2+\left(\frac{549}{436}\right)^2}=\frac{5371}{2180}\approx 2{,}46$ Für die anderen beiden Punkte ergeben sich die zugehörigen Abstände aus der Symmetrie der Anordnung.  			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 11 Lichtkunst

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>


Die Gleichungen der Geraden in Zwei-Punkte-Form lauten z.B.:
$g_1:\ \ \vec{x}=\vec{p}_1+s\cdot(\vec{q}_1-\vec{p}_1)=\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix},\quad s\in\mathbb{R}$ und
$g_2:\ \ \vec{x}=\vec{p}_2+t\cdot(\vec{q}_2-\vec{p}_2)=\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$.
Dabei sollen $s\in[0;1]$ und $t\in[0;1]$ auch als richtig gelten.
</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Gleichsetzen der Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 ergibt: $$\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}8t-10s=-2\\-8t+6s=0\\t+3s=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=\frac{1}{2}\\t=\frac{3}{8}\\\frac{15}{8}\neq 2\end{cases}$$ Die Geraden schneiden sich also nicht.		20	
c)	Der Ortsvektor von L_1 genügt der Parameterdarstellung von g_1 für $s=\frac{1}{2}$. Der Ortsvektor von L_2 genügt der Parameterdarstellung von g_2 für $t=\frac{3}{4}$. Der Abstand d der beiden Lampen voneinander beträgt: $$d=\left\|\vec{l}_1-\vec{l}_2\right\|=\sqrt{3^2+(-3)^2+0{,}25^2}=\sqrt{18{,}0625}=4{,}25$$, also 4,25 m.	10	10	
d)	Berechnet werden die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden h_i von S und L_i, $i=1{,}2$, mit der x_1,x_2-Ebene. $$h_1:\vec{x}=\vec{s}+r(\vec{l}_1-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2{,}25\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}.$$ $$h_1\cap E_{1,2}:\quad\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=-1\\r_2=5\\r=-1.\end{cases}$$ Da die x_1-Koordinate des Schnittpunktes negativ ist, liegt er nicht auf dem Raumboden. Die Lampe L_1 darf somit nicht eingeschaltet werden. $$h_2:\quad\vec{x}=\vec{s}+r\cdot(\vec{l}_2-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}.$$ $$h_2\cap E_{1,2}:\quad\begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=2\\r_2=1{,}75\\r=-1{,}125\end{cases}.$$ Die Lampe L_2 darf eingeschaltet werden, weil der Schattenpunkt $R(\,2\mid 1{,}75\mid 0\,)$ auf dem Raumfußboden liegt, da seine ersten beiden Koordinaten größer als Null sind.		20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

e) Die vertikale Projektion der beiden Schienen auf die x_1-x_2-Ebene wird betrachtet, da die neuen Lampen in die (negative) x_3-Richtung hängen. Am Schnittpunkt T der Projektionsgeraden müssen die Höhen (x_3-Koordinaten) der Schienen ausgerechnet werden.

Für die Projektionsgerade von g_1 gilt: $pg_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},\quad s \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$10 - 10s = x_1$$
$$0 + 6s = x_2$$

Durch Umformen erhält man

$pg_1:\ x_1 = 10 - \frac{5}{3}x_2$.

Entsprechend gilt: $pg_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},\quad t \in \mathbb{R}$, woraus das Gleichungssystem

$$8 - 8t = x_1$$
$$0 + 8t = x_2$$

folgt. Durch Umformen erhält man $pg_2:\ x_1 = 8 - x_2$. Durch Gleichsetzen der Projektionsterme erhält man: $10 - \frac{5}{3}x_2 = 8 - x_2$, also $x_2 = 3$. Dieser Wert wird in einen Term eingesetzt und man erhält $x_1 = 5$. Damit ist $T(5 \mid 3 \mid 0)$ der Schnittpunkt der beiden Projektionsgeraden.

Die Bestimmung der Höhen H_1 und H_2 von g_1 und g_2 über diesem Bodenpunkt ergibt:

$$g_1:\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \wedge H_1 = 4{,}5 \text{ und}$$

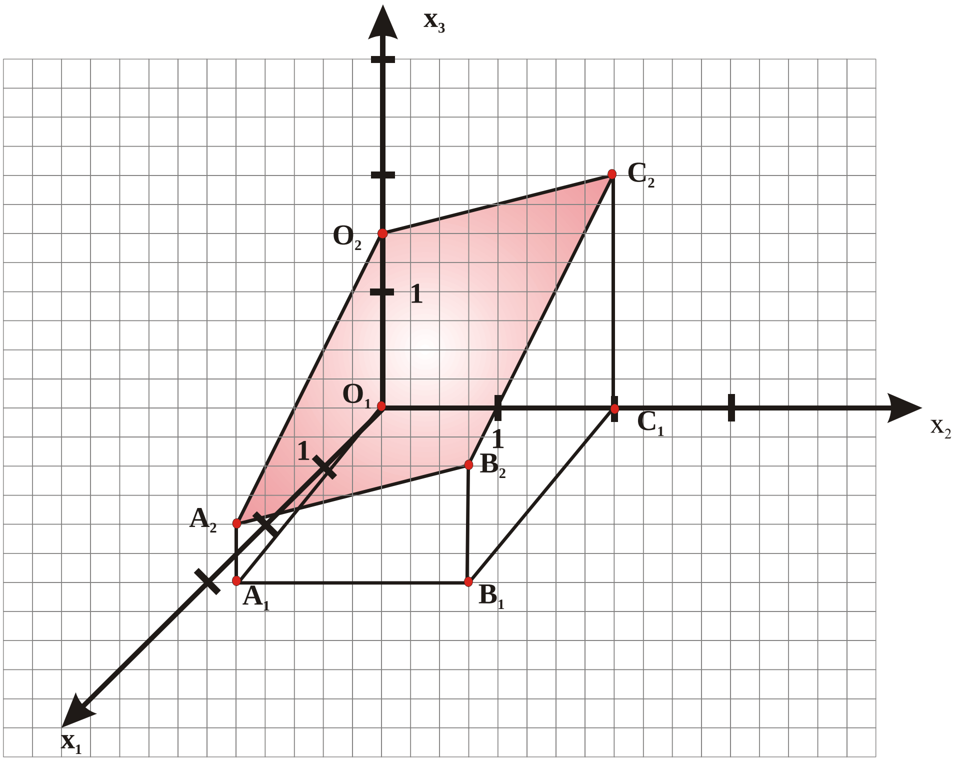
$$g_2:\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = \frac{3}{8} \wedge H_2 = 4{,}625,$$

d.h. die Höhendifferenz über dem Punkt T beträgt nur $H_2 - H_1 = 0{,}125$ m, so dass eine Lampe, die 0,2 m tief von der Schiene 2 hängt, die Schiene 1 dort berühren würde.

Es ist also nicht möglich, die neuen Lampen in der beschriebenen Weise anzubringen.

		I	II	III
e)			5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 12 Konzerthalle

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Bestimmung der Ebene E durch O_2, A_2 und C_2: $E\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1,5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0,25\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\0,5\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R}$ Prüfung, ob B_2 in E liegt: Ansatz: $\begin{pmatrix}0\\0\\1,5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0,25\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2,25\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}3r=3\\0,25r+2s=2,25\\-r+0,5s=-0,5\end{matrix}$ Aus $3r = 3$ folgt: $r = 1$. In Gleichung (3) eingesetzt ergibt sich: $s = 1$. Probe in Gleichung (2): 2,25 = 2,25. Also liegt B_2 in E. *Es kann auch ohne Rechnung erkannt werden, dass B_2 für $r = s = 1$ in E liegt.*	20	5	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>

<u>Berechnung der Seitenlängen:</u>

$$\left|\overrightarrow{O_2A_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10,0625} \qquad \left|\overrightarrow{B_2C_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -0,25 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10,0625}$$

$$\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4,25} \qquad \left|\overrightarrow{C_2O_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4,25}$$

Die Dachfläche hat die Form eines Parallelogramms.

<u>Nachweis, dass einer der Winkel ein rechter Winkel ist:</u>

Es gilt: $\overrightarrow{O_2A_2} \cdot \overrightarrow{O_2C_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} = 0.$

Die Dachfläche hat die Form eines Rechtecks.

<u>Berechnung des Flächenmaßes der Dachfläche:</u>

$F(D) = \sqrt{10,0625} \cdot \sqrt{4,25} \approx 6,5395\,FE$.

Die Dachfläche ist ca. 654 m^2 groß.

</td><td></td><td>35</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Es muss keine Extra-Steuer bezahlt werden, denn die Grundfläche ist kleiner als die Dachfläche, und diese beträgt weniger als 700 m^2.

Es ist auch möglich, den Flächeninhalt der Grundfläche zu berechnen und dann die Frage nach der Grundsteuer zu beantworten. Hier kommen zwei Möglichkeiten in Frage:

1. Berechnung mit Hilfe elementargeometrischer Überlegungen. Die Grundfläche ist ein Parallelogramm mit der Grundseite g = 2 LE und der Höhe h = 3 LE.
2. Berechnung mit Hilfe der Vektorrechnung und der Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms.

Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 6 FE. Das Flächenmaß der Grundfläche beträgt also 600 m^2.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

<u>Mögliche Berechnung der Höhe von s_1:</u>

Man berechnet den Schnittpunkt S_1 der Diagonalen der Dachfläche oder den Mittelpunkt M einer der Diagonalen. Die x_3-Koordinate dieses Punktes gibt die Höhe von s_1 (in Längeneinheiten) an.

<u>Mögliche Berechnung der Höhe von s_2:</u>

Man bestimmt den Punkt $R(1 \mid 1,5 \mid r)$, der auf der Dachfläche liegt. Die x_3-Koordinate r gibt die Höhe von s_2 (in Längeneinheiten) an.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Berechnung von s_1: $\overrightarrow{s_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{c_2} \right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}125 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$, die x_3-Koordinate ist 1,25. Die Länge des Pfeilers s_1 beträgt also 1,25 LE entsprechend 12,5 m.		5	20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 13 Hafenturm

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

<u>Geradengleichungen für die Kanten</u>:

Die erste Geradengleichung ergibt sich aus den Punkten U_1 und O_1 zu

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R}\ .$$

Die anderen sind *(Berechnung ist auch erlaubt)*:

$$g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R},\ g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\-10\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\80\end{pmatrix},\ \nu\in\mathbb{R}\quad\text{und}$$

$$g_4:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}+\rho\cdot\begin{pmatrix}-3\\10\\80\end{pmatrix},\quad \rho\in\mathbb{R}$$

<u>Länge einer Kante</u>:

Hier ist der Abstand des Grund- und des Dachpunktes auf einer Geraden zu bestimmen, z.B. $d\left(\overline{U_1O_1}\right)$. Es ergibt sich $d=\sqrt{6509}\approx 80,68$.

</td><td>25</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

<u>Bestimmen der Eckpunkte für $h = 40$</u>:

Die Eckpunkte liegen auf den Kanten, der jeweilige Parameter ist so zu wählen, dass x_3 jeweils den Wert 40 aufweist, also ist λ, μ, ν und ρ jeweils 0,5.

Die vier Eckpunkte lauten daher
E_1 (5 | 8,5 | 40), E_2 (–8,5 | 5 | 40), E_3 (–5 | –8,5 | 40), E_4 (8,5 | –5 | 40).

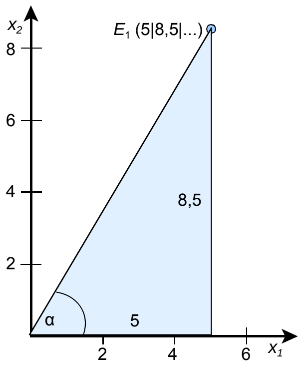
<u>Nachweis Quadrat</u>:
Man kann wie unten stehend argumentieren oder eben rechnen:

$$\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\begin{pmatrix}-13,5\\-3,5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3,5\\-13,5\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_4}\quad\text{und}$$

$$\overrightarrow{E_3E_4}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\begin{pmatrix}13,5\\3,5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3,5\\-13,5\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overrightarrow{E_3E_4}\perp\overrightarrow{E_1E_4}$$

und die drei Geschosskanten sind ersichtlich gleich lang.
Also ist das Viereck $E_1E_2E_3E_4$ ein Quadrat

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Allgemeine Argumentation: Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Seiten und Winkel dieser Vierecke gleich sein müssen, dann können es aber nur Quadrate sein wegen der Konstanz der Innenwinkel bei n-Ecken. *Hier kann auch gerechnet werden, z.B. um die Symmetrie zu belegen:* Allgemein müssen die Eckpunkte den x_3-Wert h aufweisen, der zugehörige Parameter also jeweils den Wert $\frac{h}{80}$ haben. Die vier Eckpunkte lauten daher: $E_1\left(10-\frac{h}{8} \mid 10-\frac{3h}{80} \mid h\right)$, $E_2\left(-10+\frac{3h}{80} \mid 10-\frac{h}{8} \mid h\right)$, $E_3\left(-10+\frac{h}{8} \mid -10+\frac{3h}{80} \mid h\right)$, $E_4\left(10-\frac{3h}{80} \mid -10+\frac{h}{8} \mid h\right)$ *Man kann zur Überprüfung der Rechtwinkligkeit natürlich auch hier ein Skalarprodukt ausrechnen, z.B. mit den Vektoren* $\overrightarrow{E_1E_2}$ *und* $\overrightarrow{E_1E_4}$: $\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4} = \begin{pmatrix}\frac{13h-1600}{80}\\ -\frac{7h}{80}\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{7h}{80}\\ \frac{13h-1600}{80}\\ 0\end{pmatrix} = 0$		20	10
c)	Da hier Geschosse betrachtet werden, spielt die x_3-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x_1-x_2-Ebene betrachtet werden. Die Verbindungslinie von U_1 zum Ursprung schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von 45° ein.  Für $h = 40$ betrachten wir die Verbindungslinie von E_1 zum Zentrum des Geschosses. Diese schließt mit der x_1-Achse den Winkel α ein, der sich bestimmen lässt durch $\alpha = \arctan\left(\frac{8{,}5}{5}\right) \approx 59{,}53°$. Das mittlere Geschoss ist also um 14,53° gegenüber dem Grundgeschoss gedreht.		25	
d)	Diese Aussage ist nicht richtig, wie aus c) folgt: Nehmen wir dazu der Einfachheit halber an, das Gebäude hätte nur zwei Geschosse, und ein drittes Geschoss würde noch oben draufgesetzt. Die Bodenflächen des untersten und des ersten Geschosses sind dann nach d) um 14,5° gegeneinander gedreht. Die Bodenflächen des ersten und des zweiten Geschosses sind aber gegeneinander um 30,5° (= 45° –14,5°), denn das unterste und das oberste Geschoss sind um 45° gegeneinander gedreht).		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

5.2 Lösungen - Leistungskursaufgaben

Aufgabe 1 Vegetation

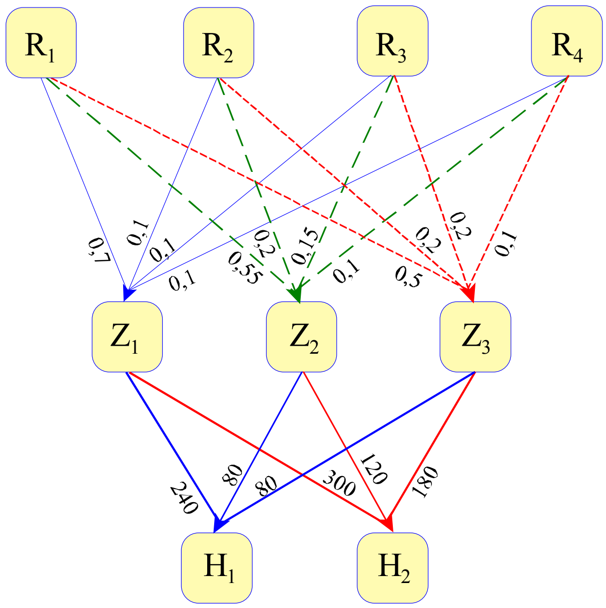
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es beschreibt v_i den Anteil an der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche von Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird. Nach der Aufgabenstellung beschreibt n_i den Anteil an der Fläche, die Pflanzen aus der Klasse i bedecken, der nicht verbrennt und daher nach 10 Jahren zur Klasse $i + 1$ gehört ($i < 4$) bzw. in der Klasse 4 verbleibt. Es stehen also n_i für $i = 1$, 2 und 3 in der Zeile $i + 1$, mit der die Fläche von der Klasse $i + 1$ berechnet wird. In der vierten Zeile kommt noch n_4 hinzu, da dieser Anteil in Klasse 4 verbleibt. Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: Der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide zusammen ergeben 100 % = 1. $$M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}$$	10	15	
b)	Der nicht verbrannte Anteil von Klasse 1 ergibt den Anteil von Klasse 2: $600 \cdot n_1 = 594$, also $n_1 = 0{,}99$. Analog für die Klasse 2: $400 \cdot n_2 = 392$, also $n_2 = 0{,}98$. Nach der Definition von v_i und n_i gilt $v_i + n_i = 1$, daher ist $v_1 = 0{,}01$ und $v_2 = 0{,}02$.	10	5	
c)	Die Definitionsmenge ist die Menge aller Vektoren mit vier Komponenten, welche die Größe der jeweiligen Klasse zu Beginn der Untersuchung angeben. Die Wertemenge ist die Menge aller Vektoren mit vier Komponenten, welche die Größe der Klasse nach 10 Jahren angeben. Die zugehörigen Werte ergeben sich aus $f: \vec{x} \rightarrow f(\vec{x}) = \mathrm{M} \cdot \vec{x}$. *Die Funktion kann statt mit der Matrix auch gleich mit vier Termen beschrieben werden, die sich als Vektorkomponenten aus der Multiplikation* $\mathrm{M} \cdot \vec{x}$ ergeben.		10	10
d)	Langfristig streben in diesem Modell die Flächengrößen der einzelnen Klassen jeweils gegen feste Werte. Geht man von der angegebenen Gesamtgröße von 2000 km^2 aus, so ergeben sich die folgenden Größen für Klasse 1: $0{,}2216 \cdot 2000 = 443{,}2$, Klasse 2: $0{,}2194 \cdot 2000 = 438{,}8$, Klasse 3: $0{,}2150 \cdot 2000 = 430{,}0$ und Klasse 4: $0{,}3440 \cdot 2000 = 688{,}0$, d.h. 443,2 km^2 des Chaparrals sind mit einer Vegetation bewachsen, die jünger als 10 Jahre alt ist, eine zwischen 10 und 20 Jahre alte Vegetation bedeckt 438,8 km^2, 430,0 km^2 werden von einer 20 bis 30 Jahre alten Vegetation bedeckt und eine Fläche von 688km^2 enthält mehr als 30 Jahre alte Pflanzen.		15	

	Lösungsskizze	I	II	III
e)	$N = \begin{pmatrix} 1 & 0,02 & 0,03 & 0,07 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,97 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,93 \end{pmatrix}$ Die Prozentanteile für das Abbrennen stehen in der 1. Zeile, wobei $n_{11} = 1$ ist, da von Klasse 1 nicht abgebrannt wird. In den restlichen Zeilen steht der jeweilige Anteil, der nicht abgebrannt wird in der Diagonalen, die zugehörige Klasse verkleinert sich entsprechend. Die Matrix $N \cdot M$ beschreibt den kompletten Vorgang: $\vec{y} = M \cdot \vec{x}$ liefert die Flächenmaße durch spontane Brände, $\vec{z} = N \cdot \vec{y}$ schließlich die sich durch gewolltes Abbrennen ergebenden Flächen. Die Reihenfolge der Matrizen ergibt sich aus dem Aufgabentext.		20	5
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 2 Industriehallen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

a)



$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}55 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \qquad A_{ZH} = \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 80 & 120 \\ 80 & 180 \end{pmatrix}$$

Rohstoffmengen pro Hallentyp:

$$A_{RH} = A_{RZ} \cdot A_{ZH} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}55 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 80 & 120 \\ 80 & 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 & 366 \\ 56 & 90 \\ 52 & 84 \\ 40 & 60 \end{pmatrix}$$

Für Hallentyp 1 werden 252 Tonnen Kies, für Hallentyp 2 werden 84 Tonnen Stahl benötigt.

Bewertung: I: 20

b)

Gesamtkosten = Rohstoffkosten + Fertigungskosten der Zwischenprodukte + Montagekosten

<u>Rohstoffkosten :</u>

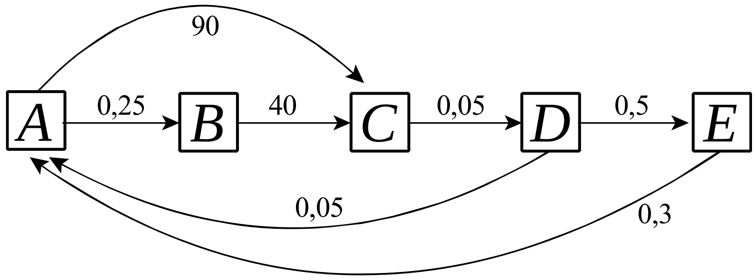
$$\begin{pmatrix} 27 & 190 & 600 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 252 & 366 \\ 56 & 90 \\ 52 & 84 \\ 40 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48764 & 77562 \end{pmatrix}$$

Die Rohstoffkosten für Halle 1 betragen 48 764 GE,
die Rohstoffkosten für Halle 2 betragen 77 562 GE.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Fertigungskosten der Zwischenprodukte:
$$\begin{pmatrix} 80 & 100 & 120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 80 & 120 \\ 80 & 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36800 & 57600 \end{pmatrix}$$
Die Fertigungskosten der Zwischenprodukte betragen 36 800 GE für Halle 1 und 57 600 GE für Halle 2.

Gesamtkosten für Halle 1:
48 764 GE + 36 800 GE + 40 000 GE = 125 564 GE.
Gesamtkosten für Halle 2:
77 562 GE + 57 600 GE + 48 000 GE = 183 162 GE.</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Rohstoffe R_1 bis R_3 können restlos aufgebraucht werden, wenn folgendes Gleichungssystem lösbar ist:
$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}55 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1712 \\ 424 \\ 384 \end{pmatrix}$$
Lösen des LGS ergibt: $x_1 = 1360$, $x_2 = 800$, $x_3 = 640$.
Es können also 1 360 Tonnen Z_1, 800 Tonnen Z_2 und 640 Tonnen Z_3 hergestellt werden.
Für diese insgesamt 2800 Tonnen Zwischenprodukte werden insgesamt $2800 \cdot 0{,}1 = 280$ Tonnen Wasser gebraucht</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Von Typ 1 können wegen der Wandplatten (Z_1) maximal 5 Hallen montiert werden.
Von Typ 2 können wegen der Träger (Z_3) maximal 3 Hallen montiert werden.
Mehr als 5 Hallen insgesamt können wegen der Wandplatten (Z_1) nicht montiert werden.</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Der Mitarbeiter hat nicht Recht. Das Gleichungssystem ist zwar in jedem Fall lösbar, aber die Vorräte können nur dann aufgebraucht werden, wenn der Lösungsvektor keine negative Komponente enthält.
Auch die Angabe eines Gegenbeispiels ist eine richtige Lösung.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 3 Libellenentwicklung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung ergibt sich folgender Graph und folgende Populationsmatrix P des Lebenszyklus:  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.	5	15	
b)	Die Startpopulation wird durch den Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 6000 \\ 200 \\ 80 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Anzahlen der ersten Generation berechnen sich durch: $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 34 \\ 6{,}25 \\ 2450 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$, also zu 34 jungen Libellen, 6 alten Libellen, 2450 Eiern, 300 Junglarven und 100 Altlarven. Die Anzahlen der zweiten Generation berechnen sich durch: $\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 45 \\ 8{,}5 \\ 3300 \\ 122{,}5 \\ 150 \end{pmatrix}$, also zu 45 jungen Libellen, 8 alten Libellen, 3300 Eiern, 122 Junglarven und 150 Altlarven. *Den Populationsvektor $\vec{v}_i$ der i-ten Generation erhält man allgemein durch: $\vec{v}_i = P^i \cdot \vec{v}_0$. Dabei kann aber nur das Endergebnis gerundet werden. So ergeben sich bei der Berechnung der 2. Generation mithilfe von P^2 3310 Eier.*	15		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Für eine sich selbst reproduzierende Population $\vec{v}$ gilt: $P\cdot\vec{v}=\vec{v} \Leftrightarrow (P-E)\cdot\vec{v}=\vec{0}$. Das Lösen des LGS ergibt: $\vec{v}=r'\cdot\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}1\\40\\2\\1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\400\\20\\10\end{pmatrix}$, $r\in\mathbb{R}$. Um „ganze“ Tiere zu erhalten, muss auf $r\in\mathbb{N}^*$ eingeschränkt werden. Das Populationsmodel beschreibt die Funktion *f* mit $f(\vec{v}_i)=P\cdot\vec{v}_i$. Die sich selbst reproduzierenden Populationen sind Fixpunkte von *f*, genauer die Menge aller Fixpunkte von *f*, da obiger Ansatz äquivalent zu $f(\vec{v})=\vec{v}$ ist.		20	5
d)	Gesucht ist der Vektor $\vec{x}$ mit $P\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\5\\2000\\40\\20\end{pmatrix}$. Lösen des LGS ergibt: $\vec{x}=\begin{pmatrix}20\\5\\800\\40\\30\end{pmatrix}$.		10	
e)	Die Matrix *H* lässt die ersten drei Komponenten des Populationsvektors unverändert und halbiert die letzten beiden Komponenten. $H=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, denn $H\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\\\frac{1}{2}D\\\frac{1}{2}E\end{pmatrix}$.		10	
f)	Stellt $\vec{v}_{E\_normal}=P^{10}\cdot\vec{v}_A$ die Endpopulation nach 10 Jahren im vorliegenden Modell dar, so ergibt sich $\vec{v}_E=H\cdot\vec{v}_{E\_normal}$. Dabei werden lediglich die Anzahlen der Jung- und Altlarven halbiert. Es gilt *P H* ≠ *H P*, denn die erste Zeile der Matrix *H P* entspricht jener von *P*, die erste Zeile von *P H* lautet aber (0 | 0 | 0 | 0,025 | 0,15). Das Endergebnis hängt daher davon ab, wann mit *H* multipliziert wird, bzw. verändert der Zeitpunkt des besonderen Umwelteinflusses das Ergebnis.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 4 Kosten und Gewinne

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & g \end{pmatrix} \qquad A_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{RE} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Werte $a, b, \dots g$ in A_{RZ}:
Wegen $A_{RZ} \cdot A_{ZE} = A_{RE}$ gilt

$$A_{RZ} \cdot A_{ZE} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a+b & 4b & 0 \\ c & 4c+3d & d \\ 0 & 3e & e \\ g & 3f & f+2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = A_{RE}$$

Durch elementweisen Vergleich erhält man die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} 2a+b=5 & 4b=12 & \\ c=2 & 4c+3d=11 & d=1 \\ & 3e=12 & e=4 \\ g=2 & 3f=3 & f+2g=5 \end{array}$$

Für die fehlenden Werte der Rohstoffmatrix erhalten wir:
$a = 1,\ b = 3,\ c = 2,\ d = 1,\ e = 4,\ f = 1,\ g = 2.$
</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Sei $\overrightarrow{v_R}$ der Vorratsvektor an Rohstoffen. Aus der Bedingung $A_{RE} \cdot \overrightarrow{x_E} = \overrightarrow{v_R}$ ergibt sich das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 0 & 1\,000-\mathrm{r} \\ 2 & 11 & 1 & 720 \\ 0 & 12 & 4 & 960 \\ 2 & 3 & 5 & 1\,000-\mathrm{r} \end{array}\right)$$

Dieses LGS ist eindeutig lösbar für $x_1 = 80$, $x_2 = 40$, $x_3 = 120$ und $r = 120$.
Es bleiben demnach von R_1 und R_4 jeweils 120 ME übrig.
</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Gesamtkosten (GK) für den Auftrag bestehen aus den Rohstoffkosten (RK), den Fertigungskosten für die Zwischenprodukte (ZK), den Fertigungskosten für das Endprodukt (EK) und den Fixkosten (FK).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Es gilt: $RK = 200 \cdot (5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 3\,000$ $ZK = 200 \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = 1\,400$ $EK = 200 \cdot 2 = 400$, $FK = 400$ Die Gesamtkosten betragen demnach 5 200 GE.		20	
d)	Die Rohstoffkosten betragen in GE: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \cdot 5 + 100 \cdot 12 + 300 \cdot 0 \\ 200 \cdot 2 + 100 \cdot 11 + 300 \cdot 1 \\ 200 \cdot 0 + 100 \cdot 12 + 300 \cdot 4 \\ 200 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2200 \\ 1800 \\ 2400 \\ 2200 \end{pmatrix} = 21600$ Die Fertigungskosten für die Zwischenprodukte betragen in GE: $\begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 4-x & 5-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \cdot 2 + 100 \cdot 0 + 300 \cdot 0 \\ 200 \cdot 1 + 100 \cdot 4 + 300 \cdot 0 \\ 200 \cdot 0 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 1 \\ 200 \cdot 1 + 100 \cdot 0 + 300 \cdot 2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 4-x & 5-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix} = 8400 - 2400x$ Die Fertigungskosten für die Endprodukte betragen in GE: $200 \cdot (3 - x) + 100 \cdot (4 - x) + 300 \cdot (5 - x) = 2500 - 600x$. Die Fixkosten betragen 1000 GE. Damit ergibt sich für die Gesamtkosten: $GK = (33500 - 3000x)$ GE. Aus $33500 - 3000x = 32000$ ergibt sich $x = 0{,}5$. Die Gesamtkosten betragen für $x = 0{,}5$ genau 32000 GE.		20	10
e)	Die Kosten für einen Auftrag von $2t$ ME von E_1, t ME von E_2 und $3t$ ME von E_3 betragen: $GK = 2t \cdot (29 - 0{,}5\ln(t)) + t \cdot (130 - 2\ln(t)) + 3t \cdot (54 - 1{,}5\ln(t)) + 4000$ $= 350t - t \cdot (\ln(t) + 2\ln(t) + 4{,}5\ln(t)) + 4000$ $= 350t - 7{,}5t \cdot \ln(t) + 4000$. Der Verkaufspreis beträgt: $VP = 2t \cdot (42 - 2\ln(t)) + t \cdot (145 - 4\ln(t)) + 3t \cdot (65 - 3\ln(t)) = 424t - 17t \cdot \ln(t)$. Der Gewinn $G = VP - GK$ beträgt demnach in Abhängigkeit von t: $G(t) = t \cdot (74 - 9{,}5\ln(t)) - 4000$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Nun gilt: $G'(t) = 1\cdot(74 - 9{,}5\ln(t)) + t\cdot(-9{,}5)\cdot t^{-1} = 64{,}5 - 9{,}5\ln(t)$. $G''(t) = -9{,}5t^{-1}$ Für maximalen Gewinn muss gelten: $G'(t) = 0$ $G'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(t) = \frac{64{,}5}{9{,}5} \quad \Leftrightarrow \quad t = e^{\frac{64{,}5}{9{,}5}} \approx 888{,}45$. Weiter gilt: $G''(888{,}45) < 0$. Also ist der Gewinn für *t* = 888,45 maximal. Er beträgt ca. 4 440 GE.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	15	60	25

Aufgabe 5: GPS

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Aus den als bekannt vorausgesetzten Informationen geht hervor, dass sich die Person gleichzeitig auf der Oberfläche von drei Kugeln befinden muss: • der Erdkugel • der Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und • der Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2. Wenn die Daten realistisch sind, dann müssen sich die Erdoberfläche und jede der beiden anderen Kugeloberflächen jeweils in einem Kreis schneiden, den man berechnen kann. Die beiden Schnittkreise schneiden sich dann in zwei Punkten, die man berechnen kann und die in der Regel weit voneinander entfernt liegen, so dass man aus der grob ungefähren Kenntnis des Standortes der Person einen von beiden ausschließen kann.		20	
b)	Es sei $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ ein variabler Punkt. Die Kugelgleichung lautet dann: $\left(\vec{p}-\vec{s}_1\right)^2 = d_1^2$, also $\left(x_1-2\right)^2+\left(x_2-2\right)^2+\left(x_3-3\right)^2=3{,}2^2$. Für die Erdoberfläche gilt: $P^2=1$, also $x_1^2+x_2^2+x_3^3=1$. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt: $4x_1+4x_2+6x_3-17=-\frac{231}{25}$. Durch Multiplikation der Gleichung mit 25 erhält man das genannte Ergebnis: $100x_1+100x_2+150x_3=194$. Es handelt sich um eine Ebenengleichung. Alle gemeinsamen Punkte auf den beiden Kugeloberflächen müssen diese Gleichung erfüllen (Umkehrung gilt nicht!), also muss es sich um die Ebene des Schnittkreises handeln.	10		
c)	Wenn man das unterbestimmte lineare Gleichungssystem $100x_1+100x_2+150x_3=194$ $600x_1+400x_2+400x_3=711$ äquivalent umformt (Gauß-Algorithmus) erhält man z.B. $x_2=\frac{581}{400}-\frac{5}{2}x_1 \qquad x_3=\frac{13}{40}+x_1$ Daraus erhält man folgende Parameterform der Schnittgeraden der beiden Schnittkreisebenen: $g:\ \vec{p}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{581}{400}\\ \frac{13}{40}\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2{,}5\\ 1\end{pmatrix}$.		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Der Standort der Person muss sowohl auf dieser Geraden, als auch auf der Erdoberfläche liegen. Das führt auf folgende quadratische Gleichung: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{581}{400} \\ \frac{13}{40} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 1$, also $\frac{33}{4}x^2 - \frac{529}{80}x + \frac{194461}{160000} = 0$ mit den Lösungen: $x_1 = \frac{529}{1320} + \frac{\sqrt{144703}}{3300}$, $x_2 = \frac{529}{1320} - \frac{\sqrt{144703}}{3300}$ bzw. $x_1 \approx 0{,}51603$, $x_2 \approx 0{,}28549$. Mit den Gleichungen aus c) oder der Parameterdarstellung der Geraden erhält man folgende mögliche Positionen der Person: $\mathrm{Pos}_1 = \left(\frac{529}{1320} + \frac{\sqrt{144703}}{3300} \mid \frac{1487}{3300} - \frac{\sqrt{144703}}{1320} \mid \frac{479}{660} + \frac{\sqrt{144703}}{3300}\right)$ $\mathrm{Pos}_2 = \left(\frac{529}{1320} - \frac{\sqrt{144703}}{3300} \mid \frac{1487}{3300} + \frac{\sqrt{144703}}{1320} \mid \frac{479}{660} - \frac{\sqrt{144703}}{3300}\right)$ bzw. $\mathrm{Pos}_1 \approx (0{,}51603 \mid 0{,}73879 \mid 0{,}84103)$ $\mathrm{Pos}_2 \approx (0{,}28549 \mid 0{,}16243 \mid 0{,}61049)$ *Anmerkung: Hier wurde bis jetzt exakt gerechnet, es ist auch zulässig, in einer früheren Phase zu Darstellungen als Dezimalbruch mit Taschenrechnergenauigkeit überzugehen.*	10	10	
e)	Die Umrechnung von geographischen Koordinaten auf der Erdoberfläche in kartesische Koordinaten erfolgt bekanntermaßen wie folgt: $(\beta;\lambda) \rightarrow (\cos\beta\cdot\cos\lambda \mid \cos\beta\cdot\sin\lambda \mid \sin\beta)$ (Beachte: $R = 1$) Diese Rechnung muss hier umgekehrt werden: $ß = \mathrm{Arcsin}(z)$ $\lambda = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{y}{\cos\beta}\right)$ Also: $(\beta_1 ; \lambda_1) \approx (57{,}3°; 17{,}5°)$ $(\beta_2 ; \lambda 2) \approx (37{,}6°; 68{,}9°)$. Es kommt nur die erste Position in Frage, diese liegt deutlich nordöstlich von Hamburg.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\frac{(57{,}3°-53{,}5°)}{360°}\cdot 40\,000 \approx 422$, $\frac{(17{,}5°-10°)}{360°}\cdot \cos 53{,}5° \cdot 40\,000 \approx 450$. Also ca. 422 km nördlich von Hamburg und von dort aus ca. 450 km östlich. *(Das ist in der schwedischen Ostsee zwischen Öland und Gotland !).*			10
f)	Mit der Umrechnung $(\beta ; \lambda) \rightarrow (\cos(\beta)\cdot\cos(\lambda) \mid \cos(\beta)\cdot\sin(\lambda) \mid \sin(\beta))$ berechnen wir die Koordinaten von Hamburg: $H := (\cos 53{,}5°\cdot\cos 10° \mid \cos 53{,}5°\cdot\sin 10° \mid \sin 53{,}5°)$ $\approx (0{,}58579 \mid 0{,}10329 \mid 0{,}80386)$ Sowohl H als auch Pos_1 liegen auf der Erdoberfläche, haben also in dem gewählten Maßstab den Betrag 1. Mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet man den sphärischen Winkel: $\sphericalangle H\,O\,Pos_1 = ArcCos(< H ; Pos_1 >) \approx 5{,}66°$. Für die zugehörige Bogenlänge auf der Erdoberfläche gilt dann: $b \approx \frac{5{,}66}{360}\cdot 40\,000 \approx 629$. Die kürzeste Weglänge auf der Erdoberfläche von Hamburg zur Position der Person beträgt etwa 629 km.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 6: Hafenturm

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die erste Geradengleichung ergibt sich aus den Punkten U_1 und O_1 zu $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$. Die anderen sind: $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 80 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}, \; g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 80 \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{R}$ und $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{R}$	10		
b)	Hier ist der Abstand des Grund- und des Dachpunktes auf einer Geraden zu bestimmen, z.B. $d\left(\overline{U_1O_1}\right)$. Es ergibt sich $d = \sqrt{6509} \approx 80{,}68$.	10		
c)	Die Eckpunkte, die auf den Kanten also auf den Geraden g_i liegen, müssen den x_3-Wert h aufweisen, also muss der zugehörige Parameter jeweils den Wert $\frac{h}{80}$ haben. Die vier Eckpunkte lauten daher: $E_1\left(10 - \frac{h}{8} \mid 10 - \frac{3h}{80} \mid h\right), \quad E_2\left(-10 + \frac{3h}{80} \mid 10 - \frac{h}{8} \mid h\right),$ $E_3\left(-10 + \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{3h}{80} \mid h\right), \quad E_4\left(10 - \frac{3h}{80} \mid -10 + \frac{h}{8} \mid h\right)$ Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Seiten und Winkel dieser Vierecke gleich sein müssen, dann können es aber nur Quadrate sein wegen der Konstanz der Innenwinkel bei *n*-Ecken. Man kann zur Überprüfung der Rechtwinkligkeit natürlich auch einmal ein Skalarprodukt ausrechnen, z.B. mit den Vektoren $\overrightarrow{E_1E_2}$ *und* $\overrightarrow{E_1E_4}$: $\overrightarrow{E_1E_2} \cdot \overrightarrow{E_1E_4} = \begin{pmatrix} \frac{13h-1600}{80} \\ -\frac{7h}{80} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7h}{80} \\ \frac{13h-1600}{80} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$		15	
d)	Da hier Geschosse betrachtet werden, spielt die x_3-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x_1-x_2-Ebene betrachtet werden. Die Verbindungslinie von U_1 zum Ursprung schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von 45° ein. Für $h = 40$ betrachten wir die Verbindungslinie von E_1 zum Zentrum des Geschosses. Diese schließt mit der x_1-Achse den Winkel α ein, der sich bestimmen lässt durch $\alpha = \arctan\left(\frac{8{,}5}{5}\right) \approx 59{,}53°$. Das mittlere Geschoss ist also um 14,53° gegenüber dem Grundgeschoss gedreht.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Diese Aussage ist nicht richtig, wie aus d) folgt: Nehmen wir dazu der Einfachheit halber an, das Gebäude hätte nur zwei Geschosse, und ein drittes Geschoss würde noch oben draufgesetzt. Die Bodenflächen des untersten und des ersten Geschosses sind dann nach d) um 14,5° gegeneinander gedreht. Die Bodenflächen des ersten und des zweiten Geschosses sind aber gegeneinander um 30,5° (45°-14,5°, denn das unterste und das zweite Geschoss sind um 45° gegeneinander gedreht).		10	
f)	Wir zeigen, dass die Geraden g_1 und g_2 keinen Punkt gemeinsam haben: Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix}$ für λ und μ. Die letzte Zeile ergibt λ = μ, und es zeigt sich leicht, dass das LGS keine Lösung aufweist. Dieses Resultat ist noch schneller einzusehen, wenn man sich klar macht, dass anderenfalls aus Symmetriegründen dann je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der x_3-Achse zusammen, in einer Spitze also und der Turm wäre eine gewöhnliche quadratische Pyramide. Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte.		10	
g)	Da benachbarte Gebäudekanten windschief aber nicht parallel sind, müssen z.B. horizontale Verbindungsstrecken (Fußbodenseiten) sich in ihrer Länge in jeder Höhe unterscheiden und irgendwo minimal sein. Beim Weiterbauen müssten die Fußbodenquadrate irgendwann wieder größer werden.			10
h)	Die Aussage aus g) wird hier quantitativ genauer untersucht. Wir schließen an an das Ergebnis von c) und berechnen die Fläche des Quadrates E_1, E_2,.E_3, E_4. Für diese Fläche *A(h)* gilt: $A(h)=(\overrightarrow{E_1E_2})^2=\dfrac{109h^2-20\,800h+1\,280\,000}{3\,200}$. Das ist ein quadratische Funktion, die ihr Minimum bei $h_{Min}=\dfrac{10\,400}{109}\approx 95{,}4$ hat. Also ist im 25. Geschoss (Bodenhöhe 96 m) die minimale Bodenfläche zu erwarten. $A(96)=89{,}92$. Das 25. Geschoss hätte die kleinste Bodenfläche von 89,9 Quadratmeter und die Miete betrüge dort 1798,40 €. Das Erdgeschoss hat übrigens 400 m^2 und das höchste Geschoss hätte 104,3 m^2.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 7 Flugbahnen

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Richtung von F_1 (über Grund): $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, zwischen NO und N;

Richtung von F_2 (über Grund): $\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, zwischen SO und O.

Der Abhebepunkt liegt in $P\,(-10{,}5 \mid -14 \mid 0)$ als Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1-x_2-Ebene,
das Zentrum der Stadt in $Z\,(0 \mid 0 \mid 0)$, denn $s = 0{,}5$ liefert $x_3 = 6$.

Abstand $\left|\overline{PZ}\right| = \left|Z - P\right| = \sqrt{10{,}5^2 + 14^2} = 17{,}5$ (km).

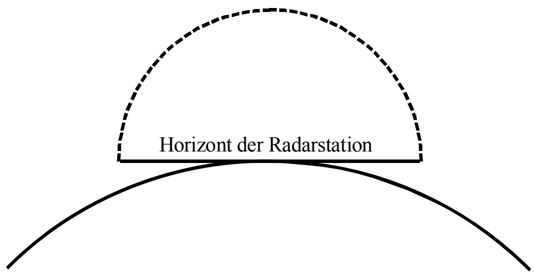
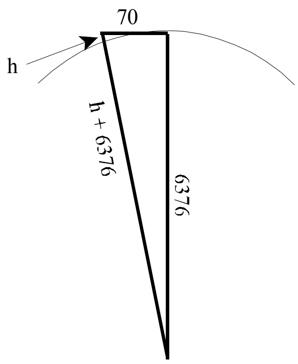
Steigungswinkel für F_1: $\tan\varphi = \dfrac{6}{17{,}5} \Rightarrow \varphi \approx 18{,}9°$
</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<u>Flugzeug 1 verschwindet in Wolkendecke:</u>
Aus $37 = |s| \cdot \sqrt{21^2 + 28^2 + 12^2} = |s| \cdot 37$ folgt im Kontext der Aufgabenstellung $s = 1$; das Flugzeug taucht also in 12 km Höhe in die Wolken ein.

<u>Flugzeuge 1 und 2 kollidieren nicht:</u>
F_2 bewegt sich parallel zur Erdoberfläche in der Ebene mit $x_3 = 12$.
F_1 durchstößt diese Ebene im Punkt $T\,(10{,}5 \mid 14 \mid 12)$.
T liegt nicht auf der Flugbahn von F_2, denn $-7{,}2 + 4t = 10{,}5$ liefert $t_0 = 4{,}425$, aber $-9{,}6 + t_0(-3) \neq 14$.

<u>Abstand:</u>
F_1 befindet sich genau über F_2 , wenn die x_1- und x_2-Koordinaten der Flugbahn übereinstimmen, also
$\begin{matrix} I & -10{,}5 + 21 \cdot s = -7{,}2 + 4 \cdot t \\ II & -14 + 28 \cdot s \quad = -9{,}6 - 3 \cdot t \end{matrix} \xrightarrow{3 \cdot I + 4 \cdot II} -87{,}5 + 175 \cdot s = -60$, woraus folgt
$175 \cdot s = 27{,}5 \Rightarrow s = \dfrac{11}{70}$. Eingesetzt z.B. in II folgt $t = 0$.
Damit erhält man als Orte der Flugzeuge die Punkte $H_1\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid \approx 1{,}9)$ bzw. $H_2\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid 12)$. Die Flugzeuge befinden sich somit ca. 10,1 km übereinander.

$\left|H_2H_2\right|$ ist nicht der Abstand der Flugbahnen, da $\overrightarrow{H_1H_2}$ nicht senkrecht auf der Flugbahn von F_1 steht:
$\overrightarrow{H_1H_2} = \begin{pmatrix}-7{,}2\\-9{,}6\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-7{,}2\\-9{,}6\\\frac{66}{35}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{354}{35}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}21\\28\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{354}{35}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R mit dem Radius 85 km:
In die Kugelgleichung $(x_1+10,2)^2+(x_2+13,6)^2+{x_3}^2=85^2$ werden die Koordinaten der Flugbahn von F_2 eingesetzt, also
$(-7,2+4t+10,2)^2+(-9,6-3t+13,6)^2+12^2=85^2 \Rightarrow$
$(4t+3)^2+(-3t+4)^2=7081 \Rightarrow$
$16t^2+24t+9+9t^2-24t+16=7081 \Leftrightarrow 25t^2=7056$ bzw. $t^2=282,24$
Lösung: $t=\pm 16,8$.
Damit ist $S_1\,(-7,2-16,8\cdot 4 \mid -9,6-16,8\cdot(-3) \mid 12)$ und
$S_2\,(-7,2+16,8\cdot 4 \mid -9,6+16,8\cdot(-3) \mid 12)$.
F_2 fliegt zwischen den Punkten $S_1\,(-74,4 \mid 40,8 \mid 12)$ und $S_2\,(60 \mid -60 \mid 12)$ im Überwachungsbereich; seine Flugstrecke dazwischen beträgt 168 km, denn
$\left|S_2-S_1\right|=\left|\begin{pmatrix}60\\-60\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-74,4\\40,8\\12\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}134,4\\100,8\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{134,4^2+100,8^2}=\sqrt{28224}=168.$
</td><td></td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Gerade g_1 durch die beiden Punkt G_1 und G_2
$g_1: \vec{x}=\vec{v}+r\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}72\\96\\0\end{pmatrix}.$
Abstand der Geraden g_1 von R:
Ein Normalenvektor zu g_1 ist $\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}$ und $\left|\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right|=120.$
$\frac{1}{120}\left|\left(\begin{pmatrix}-10,2\\-13,6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{120}\left|\begin{pmatrix}-94,2\\-10,6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right|=$
$\frac{1}{120}\left|9043,2-763,2\right|=\frac{8280}{120}=69$
Ein im Nachbarland landendes Flugzeug kann hiernach noch 16 km hinter der Grenze vom Radar erfasst werden.
Die berechnete Lösung berücksichtigt die Erdkrümmung nicht. Theoretisch erreicht der Radarstrahl den Erdboden schon in geringer Entfernung von der Station nicht mehr, so dass tieffliegende Objekte vom Strahl nicht getroffen werden.
</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Skizze:   Die gesuchte Höhe *h* ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras : $(h+6\,376)^2 = 6376^2 + 70^2 = 40\,658\,276 \Rightarrow$ $h+6\,376 = \sqrt{40\,658\,276} \approx 6\,376{,}3842$ Damit ist die Höhe *h* etwa 384 m. Die maximale Flughöhe, bis zu der ein Flugobjekt in 70 km Entfernung von der Radarstation unentdeckt bliebe, beträgt etwa 381 m.	5	5	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 8 Kugel und Ebene

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

1. Lösungsvorschlag:

Die Kugel schneidet die Ebene in mehr als einem Punkt, wenn der Abstand des Mittelpunktes von der Ebene kleiner als der Radius der Kugel ist. Dieser Abstand lässt sich mit Hilfe eines Normalenvektors der Ebene bestimmen:
Der Schnittpunkt einer Geraden längs dieses Vektors durch *M* mit der Ebene wäre zugleich der gesuchte Punkt *S*, falls $|\overrightarrow{MS}| < r$.
$(1 \mid 1 \mid 1)^T$ ist offenbar ein Normalenvektor von *E*.

$$\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\-1 & 1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\-1 & 1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[II+I]{} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\0 & -1 & -2 & 5\\0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[III+II]{} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 3\\0 & -1 & -2 & 5\\0 & 0 & -3 & 7\end{array}\right)$$ und damit

$\sigma = -\frac{7}{3}$. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $\left(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$.

Der Abstand diese Punktes von *M* ist $\left|\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right| = \frac{7}{3}\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{7}{3}\cdot\sqrt{3} \approx 4 < 7$.

Die Behauptung ist somit gezeigt und *S* bereits berechnet: $S\left(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$.
Der Radius r_s des Schnittkreises ergibt sich aus dem berechneten Abstand und dem Kugelradius mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$r_s^2 = 7^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow r_s \approx 5{,}7\,LE$$

2. Lösungsvorschlag: *(Abweichungen vom 1. Vorschlag)*

Aus der Abstandsformel folgt $\left|\left(\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{7}{\sqrt{3}} < 7$,

wobei *A* (1 | 2 | 1) ein Punkt der Ebene ist und der Normalenvektor hier normiert ist. *E* und *K* haben also mehr als einen Punkt gemeinsam.
Der Mittelpunkt *S* liegt auf einer Geraden durch *M* mit dem Richtungsvektor $(1 \mid 1 \mid 1)^T$ d.h. $(4+s)+(4+s)+(3+s)=4 \Rightarrow s = -\frac{7}{3}$, und eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich $\vec{s} = \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} - \frac{7}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$

</td><td>10</td><td>25</td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)	Die Spiegelung der Kugel an der Ebene bedeutet im Wesentlichen die Spiegelung ihres Mittelpunktes *M*. Die Verbindungsstrecke von *M* zum Bildpunkt *M** schneidet die Spiegelebene senkrecht, verläuft aus Symmetriegründen durch S und hat *S* als Mittelpunkt. Es gilt also: $\vec{m}^* = \vec{s} - (\vec{m} - \vec{s}) = 2\vec{s} - \vec{m} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow K^*: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right)^2 = 49$		15	
c)	Für *z* gilt : $\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^2 = 49 \Leftrightarrow 4 + 9 + (z-3)^2 = 49 \Leftrightarrow z = -3 \vee z = 9$ *z* = 9 ist der gesuchte positive Wert.	10		
d)	Sei *X* ein beliebiger Punkt der Tangentialebene. Dann stehen die Vektoren $\overrightarrow{PX}$ und $\overrightarrow{MP}$ senkrecht aufeinander. Mit *P* (6 | 1 | 9) gilt daher $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (x_1 - 6) - 3 \cdot (x_2 - 1) + 6 \cdot (x_3 - 9) = 0$ und damit lautet die Gleichung der Tangentialebene $T: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 63$.		5	5
e)	*Prinzipiell können bei a) und e) gleiche Lösungsstrategien verwendet werden.* Alle zu *T* parallelen Ebenen haben die Gleichungen: $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = C, C \in \mathbb{R}$. Mit der Kugel *K* gemeinsame Punkte haben diejenigen zu *T* parallelen Ebenen, die Punkte mit der Strecke $\overline{MP}$ oder mit dem am Punkt *M* gespiegelten Bild dieser Strecke gemeinsam haben. Für die Ebene durch *P* ist *C* = 63, für die Ebene durch *M* gilt *C* = 14. Für die „letzte" parallele Ebene durch den Spiegelpunkt von *P* folgt *C* = 14 – 49 = –35. Die Ebenen sind also bestimmt durch $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = C$ mit $C \in [-35; 63]$. Ist der Radius des Schnittkreises 2, folgt nach Pythagoras für den Abstand *a* seines Mittelpunktes vom Mittelpunkt der Kugel: $2^2 + a^2 = 49 \Rightarrow \|a\| = \sqrt{45}$ Mit einem Normaleneinheitsvektor der Ebenen gilt für die Mittelpunkte der beiden Kreise also $\vec{m}_{1/2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \sqrt{45} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, gerundet: $M_1(5{,}92 \| 1{,}13 \| 8{,}75)$ bzw. $M_2(2{,}08 \| 6{,}87 \| -2{,}75)$. Durch Einsetzen der Punkte erhält man die beiden möglichen Ebenengleichungen, von denen nur eine berechnet werden muss: $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 60{,}95$ und $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -32{,}95$.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

Aufgabe 9 Eckpyramide

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$\boldsymbol{E_0}$: $x_1 - x_3 = 0$ Die Ebene enthält alle Punkte der Form $(a \mid x_2 \mid a)$, $a \in \mathbb{R}$. Also enthält die Ebene die x_2-Achse ($a = 0$) und insbesondere auch den Nullpunkt. Ihr Schnitt mit der x_1-x_3-Ebene ist die Gerade $x_1 = x_3$, d. h. die Winkelhalbierende dieser Ebene.	5	5	
b)	Lösung z.B. über die Form von g mit dem allgemeinen Vektor: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 1-2k \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in die Koordinatenform von $\boldsymbol{E_a}$ ergibt dies die Gleichung $(a+1)\cdot k + a\cdot(1-2k) + (a-1)\cdot k = a$. Diese Gleichung vereinfacht sich zu der für alle a richtigen Beziehung $a = a$. Damit liegt g in jeder der Ebenen $\boldsymbol{E_a}$.	10	5	
c)	<u>Schnittpunkte</u> $S_1\,(x_{S_1} \mid 0 \mid 0)$. Einsetzen in die Koordinatenform von $\boldsymbol{E_a}$ ergibt $S_1\left(\frac{a}{a+1} \mid 0 \mid 0\right)$, $a \neq -1$. Analog ergeben sich $S_2\left(0 \mid 1 \mid 0\right)$ und $S_3\left(0 \mid 0 \mid \frac{a}{a-1}\right)$, $a \neq 1$. Die Ebene $\boldsymbol{E_1}$ hat keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse, denn die x_3-Komponente ist gleich Null und das absolute Glied ungleich Null. Entsprechend schneidet die Ebene $\boldsymbol{E_{-1}}$ die x_1-Achse nicht. (Nach Aufgabenteil a) schneidet die Ebene $\boldsymbol{E}_0$ alle drei Achsen – im Nullpunkt.) <u>Volumen der Eckpyramide:</u> Das Volumen der von den Vektoren $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$ und $\overrightarrow{OS_3}$ aufgespannten dreiseitigen Pyramide ist $\frac{1}{6}$ des Volumens des von $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$ und $\overrightarrow{OS_3}$ aufgespannten Spats, denn die Grundfläche der dreiseitigen Pyramide ist halb so groß wie die Grundfläche des Spats und eine Pyramide hat das Volumen „$\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe“. Der Spat ist ein Quader mit den Seitenlängen $\lvert\overrightarrow{OS_1}\rvert$, $\lvert\overrightarrow{OS_2}\rvert$ und $\lvert\overrightarrow{OS_3}\rvert$, also berechnet sich das Spatvolumen als $\lvert\overline{OS_1}\rvert\cdot\lvert\overline{OS_2}\rvert\cdot\lvert\overline{OS_3}\rvert$. Beide Überlegungen zusammen ergeben die gesuchte Formel. (Hier sind natürlich auch Rechnungen möglich.) Eine andere Argumentation wäre die folgende: Die Eckpyramide hat am Ursprung drei Flächen, die paarweise senkrecht aufeinander stoßen. Damit ist ihr kleinster Umhüllungsquader der Quader mit den drei Kantenlängen x_{S_1}, x_{S_2} und x_{S_3}. Dessen Volumen ist $V_Q = \lvert x_{S_1}\cdot x_{S_2}\cdot x_{S_3}\rvert$. Wählt man eine dieser Flächen als rechteckige Umhüllung der Grundfläche der Eckpyramide aus, so hat die Grundfläche der Eckpyramide als rechtwinkliges Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen genau die Hälfte des Inhalts des Rechtecks.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Andererseits weist jede Pyramide als Volumen nur ein Drittel des Volumens des sie umhüllenden Prismas auf. Da $x_{S_1} = \left\|\overrightarrow{OS_1}\right\|$ (und entsprechend für die anderen Punkte), ergibt sich das gewünschte Resultat. Bestimmung der *a*-Werte: Für die Eckpyramide der Ebenen $\boldsymbol{E_a}$ gilt (mit Einsetzen): $V_a = \frac{1}{6} \cdot \left\|\frac{a}{a+1}\right\| \cdot \left\|\frac{a}{a-1}\right\|$. Je nachdem, ob a > 1 oder 0 < a < 1 gilt, ergeben sich die beiden Bestimmungsgleichungen für *a*: $1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{a^2-1}$ oder $1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{1-a^2}$. Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen $6a^2 - 6 = a^2$ oder $6 - 6a^2 = a^2$. Diese haben die positiven Lösungen $a_1 = \sqrt{\frac{6}{5}} \wedge a_2 = \sqrt{\frac{6}{7}}$.	5	25	
d)	Grundsätzlich gilt: Zwei Ebenen stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal zueinander sind. Es gilt dabei $\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}$. Die Orthogonalitätsbedingung ergibt die Gleichung $\overrightarrow{n_m} \cdot \overrightarrow{n_a} = 0 \Leftrightarrow (m+1)(a+1) + m \cdot a + (m-1)(a-1) = 0$. Dies führt zu der Bedingung $m \cdot a = -\frac{2}{3}$. Für *a* = 2 liefert Einsetzen die Lösung $m = -\frac{1}{3}$.		15	
e)	Aus der Tafel folgt für den Abstand: $dis_a = \left\|\left(\vec{0} - \vec{v}_0\right) \cdot \vec{n}_0\right\|$, wobei $\vec{v}_0$ ein beliebiger Punkt der Ebene ist und $\vec{n}_0$ der Normaleneinheitsvektor der Ebene ist. $dis_a = \left\|\vec{v}_0 \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| = \left\|\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| = \left\|\frac{(0\|1\|0)^T \cdot (a+1\|a\|a-1)^T}{\sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2}}\right\|$ $= \left\|\frac{a}{\sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2}}\right\|$ $= \left\|\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}}\right\|$ Zu lösen sind die beiden Gleichungen $\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = 0{,}5$ und $\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = -0{,}5$			

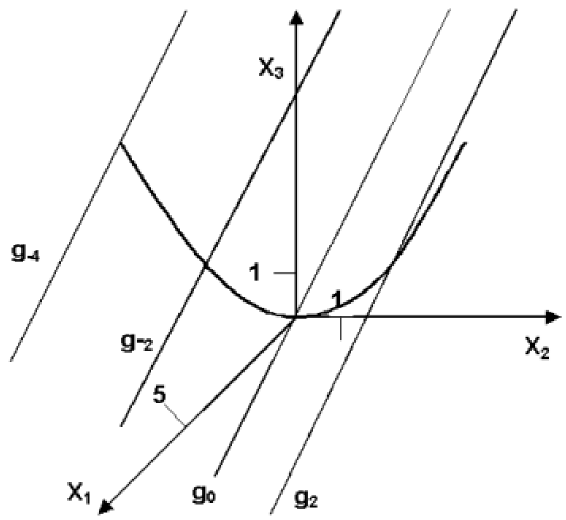
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Für die erste Gleichung folgt durch Quadrieren:
$\frac{a^2}{2+3a^2} = \frac{1}{4}$
und weiter
$4a^2 = 2+3a^2$
$a^2 = 2,$
also a = $\sqrt{2}$ oder a = $-\sqrt{2}$.
Durch Einsetzen erhält man, dass nur $a = \sqrt{2}$ Lösung der ersten Gleichung ist. Entsprechend erhält man die Lösung der zweiten Gleichung: $a = -\sqrt{2}$.
Die Ebenen $\boldsymbol{E}_{\sqrt{2}}$ und $\boldsymbol{E}_{-\sqrt{2}}$ sind diejenigen, die vom Nullpunkt den Abstand 0,5 haben.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es gilt $V_a = \left|\frac{1}{6} \cdot \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a}{a-1}\right| = \left|\frac{a^2}{6(a^2-1)}\right|$.
Für $a > 1$ oder $a < -1$ gilt: $V_a = \frac{a^2}{6 \cdot (a^2-1)}$.
Für diesen Bereich gilt also $V_a = V_{-a}$ und man kann sich auf die Betrachtung des Verhaltens der Funktion auf den Bereich $a > 1$ beschränken, für das asymptotische Verhalten auf $x \to \infty$. Es ergibt sich $\lim\limits_{a\to\infty} V_a = \lim\limits_{a\to\infty}\left(\frac{a^2}{6(a^2-1)}\right) = \frac{1}{6}$.
Für a = 0 ist ersichtlich das Volumen gleich Null. Da das Volumen aber größer oder gleich Null sein muss, liegt hier ein Minimum vor.
Andererseits liegt bei a = 1 eine Polstelle vor. Da das Volumen immer positiv ist, ist gesichert, dass V_a für beide Richtungen der Annäherung an die Polstelle über alle Grenzen wächst.
Damit hat V_a kein Maximum.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>65</td><td>15</td></tr>
</table>

Aufgabe 10 Ortskurve der Schnittpunkte

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Man setzt die Koordinaten von Q in $\boldsymbol{E}_t$ ein. Elementare Umformungen liefern $t = -4$.

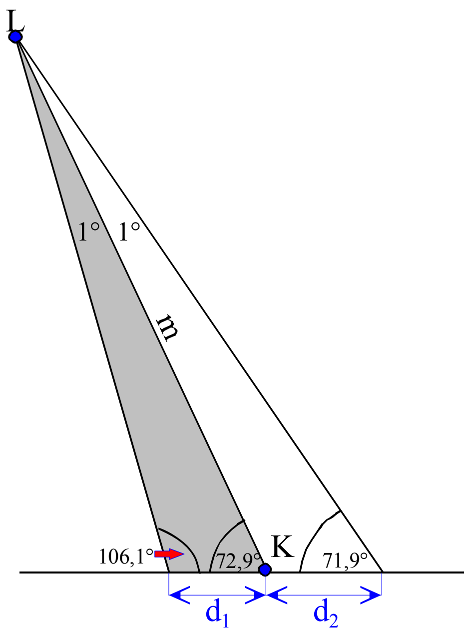
Zunächst bestimmt man eine Parameterdarstellung der Ebene $\boldsymbol{E}_t$ mit folgender Festlegung: $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$, $x_1 = \frac{t}{2}\cdot\lambda - 2\mu$.

Es folgt $E_t : \vec{x} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in IR$ als mögliche Ebenen-Darstellung.
Da der 2. Richtungsvektor unabhängig von t ist und alle Ebenen durch den Ursprung verlaufen, folgt für die Schnittgerade s: $\vec{x} = \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mu\in\mathbb{R}$.</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Wenn die Ebenen senkrecht zueinander verlaufen sollen, dann muss das Skalarprodukt der Normalenvektoren den Wert 0 ergeben:
$$\begin{pmatrix}2\\-t\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -t = 0\,.$$
Also stehen die Ebenen $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{H}_0$ senkrecht aufeinander.
$\boldsymbol{H}_t$ verläuft parallel zur x_1x_3–Ebene.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Da sich das Schnittgebilde von $\boldsymbol{E}_t$ und $\boldsymbol{H}_t$ durch $\lambda = t$ beschreiben lässt, folgt aus der Parameterdarstellung für $\boldsymbol{E}_t$ die Schnittgerade g_t:
$$g_t:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot t^2\\t\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R}$$
Den Winkel zwischen der Ebene $x_1 = 0$ und der Geraden g_t kann man mittels des Normalenvektors der Ebene und des Richtungsvektors der Geraden bestimmen:
$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$
Damit hat der Winkel den Wert ≈ 63,4°.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Ebene, die durch die x_2–Achse und die Gerade g_0 festgelegt wird, lässt sich in der folgenden Form darstellen:
$$\vec{x} = \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mu,\sigma\in\mathbb{R}\,.$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Ein zugehöriger Normalenvektor hat dann die Form $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Wie man sieht, stimmen die Normalenvektoren dieser Ebene und der von $\boldsymbol{E}_0$ bis auf einen Faktor überein. Da beide Ebenen durch den Ursprung verlaufen, sind sie identisch. Um zu überprüfen, ob alle Geraden auf derselben Seite von $\boldsymbol{E}_0$ liegen, bestimmt man zunächst die Ebene $\boldsymbol{E}_0$ in folgender Form: $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_1 + 2x_3) = 0$, sodass der zugehörige Normalenvektor normiert ist. Anschließend berechnet man den Abstand zwischen der Geraden g_t und der Ebene $\boldsymbol{E}_0$ und erhält den Wert: $\frac{t^2}{2\sqrt{5}}$. Der Wert dieses Bruches ist immer positiv, unabhängig von t. Also liegen alle Geraden auf derselben Seite, mit Ausnahme von $t = 0$. Diese Gerade liegt in der Ebene, wie man anhand eines Vergleichs der Richtungsvektoren erkennen kann.		20	
e)	Da der Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3–Ebene in der ersten Koordinate den Wert 0 annehmen muss, folgt für den Parameter: $\mu = \frac{t^4}{4}$. Also hat der Schnittpunkt die Koordinaten $S_t\,(\,0 \mid t \mid 0{,}25t^2\,)$.  Die 2. Koordinate des Schnittpunkts hat den Wert t ($x_2 = t$) und die 3. den Wert $\frac{t^2}{4}$ bzw. $x_3 = \frac{t^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot x_2^{\,2}$. Also folgt für die Ortskurve der Schnittpunkte: $x_3 = 0{,}25\,x_2^{\,2}$. Der zugehörige Graph ist eine Parabel. Die Graphen der Scharen verlaufen parallel, denn die Richtungsvektoren stimmen überein, da der Parameter t nur im Ortsvektor auftritt.		10	10
f)	Der entstehende Körper ist ein kegelförmiges Gebilde. Der Radius des Grundkreises beträgt 4 LE, die Körperhöhe ebenfalls, die Mantellinie ist allerdings keine Gerade, sondern ein Parabelbogen. Für das Volumen des Rotationskörpers um die x_2-Achse erhält man: $V = \pi \cdot \int_0^4 \frac{1}{16} x^4 dx$. Berechnet man dieses Integral, so folgt: V = 12,8 π.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 11 Meteoriteneinschlag

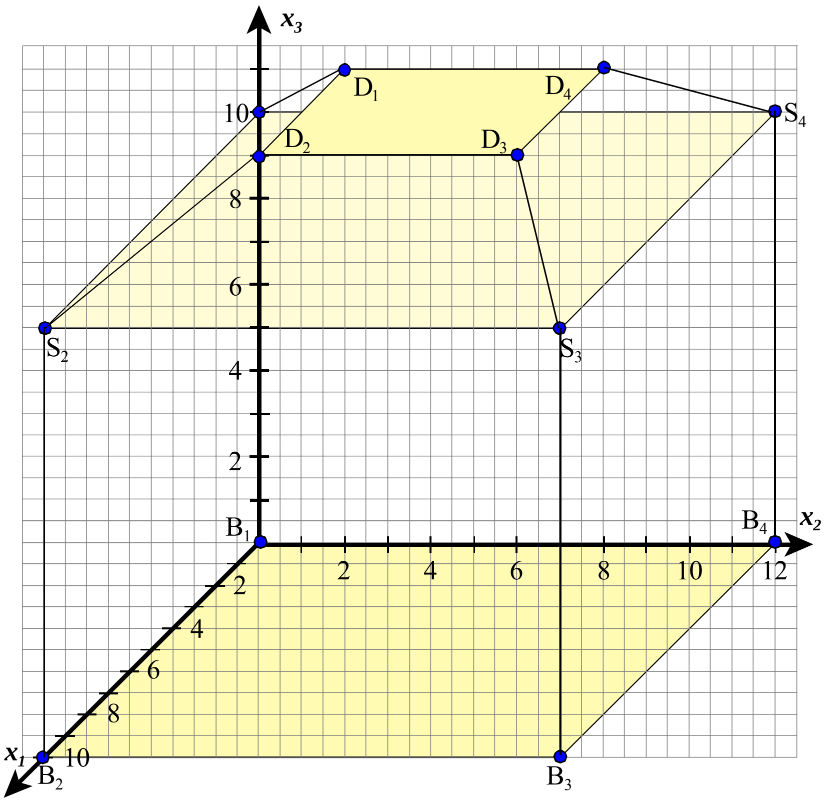
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Der Aufgabenteil fragt zweimal nach dem Schnittpunkt je zweier Geraden im Raum, wobei vorausgesetzt ist, dass diese Schnittpunkte existieren. Zunächst müssen die Beobachter und Richtungen im Koordinatensystem fixiert sein. Laut Aufgabe befindet sich Smith im Ursprung des Koordinatensystems, und die drei Koordinatenrichtungen sind Ost-Nord-Zenith. Dann befindet sich Smith am Punkt $S\,(0 \mid 0 \mid 0)$ und Myers am Punkt $M\,(5 \mid -3 \mid 0)$. Damit ergibt sich für die beiden Geraden zu U $u_S:\ \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $u_M:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}8 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für die beiden Geraden zu L $l_S:\ \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $l_M:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Lösung des ersten GLS ergibt $\lambda = \mu = 5$ und damit $U\,(-5 \mid 6 \mid 40)$, die Lösung des zweiten GLS ergibt $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ und damit $L\,(4 \mid 2 \mid 8)$.		25	
b)	Mit Hilfe der üblichen Abstandsbestimmung ergibt sich $d = \sqrt{1121}\,\text{km} \approx 33{,}5\,\text{km}$.	5		
c)	Die Bahn des Meteoriten ist eine Gerade durch U und L und lässt sich damit durch die Gleichung $b:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -32 \end{pmatrix}$ beschreiben. Im Punkt K ist die x_3-Koordinate Null; dies ergibt $t = 0{,}25$ und damit $K\,(6{,}25 \mid 1 \mid 0)$. Der Winkel lässt sich z.B. mit Hilfe einer Normalen der Erdoberfläche und dem Richtungsvektor der Bahngeraden berechnen. $\sin\alpha = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -32 \end{pmatrix} \right\rvert}{\sqrt{1121}} \approx 0{,}956 \Rightarrow \alpha \approx 72{,}9°$	5	10	
d)	Es ergibt sich $d(K,S) \approx 6{,}33$ km und $d(K,M) \approx 4{,}19$ km. Myers ist also näher am Aufschlagpunkt. Die Richtung für Myers ergibt sich aus dem Vektor $\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$: Der Winkel α seines Weges, angegeben Nord $\rightarrow$ Ost, bestimmt sich durch $\tan\alpha = \frac{1{,}25}{4}$ zu $\alpha \approx 17{,}4^0$.	10	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>


Die Strecke *m* von *L* bis *K* ist $\sqrt{(6{,}25-4)^2+(1-2)^2+(0-8)^2}\approx 8{,}37\text{ km}$.

Mit dem Sinus-Satz folgt:
$\frac{d_1}{\sin 1^\circ}=\frac{8{,}37}{\sin 106{,}1^\circ}\Rightarrow d_1\approx 152\,\text{m}$ und ebenso $d_2\approx 154\,\text{m}$.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>154 m – über den Punkt K hinaus – und 152 m – Aufschlag vor K – sind die extremen Abweichungen von der Flugbahn des Hauptteils. Die Bruchstücke befinden sich in einem Kegel mit der Spitze bei L. Die Fläche, in der die Bruchstücke auftreffen, ist die Schnittfläche dieses Kegels mit der (als eben angenommenen) Erdoberfläche, also eine Ellipse, die einem Kreis sehr ähnlich ist. Der Radius des Kreises ist sicher nicht größer als 154 m, die Fläche also nicht größer als 74 510 m^2.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 12 Haus mit Dach

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)		10		
b)	Der Grat $\overline{S_2D_2}$ hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Ebene $\boldsymbol{E_1}$, auf der der Speicherfußboden liegt, ist parallel zur x_1x_2-Ebene; ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den gesuchten Winkel α erhält man aus $\sin\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$ den Winkelbetrag $\alpha \approx 21{,}80°$.	10		
c)	Sei $\boldsymbol{E_2}$ die Ebene, auf der die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ liegt. Eine Parameterform der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$ Eine Koordinatenform der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $x_1 + 2x_3 = 30$. Mit Hilfe der Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_1}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_2}$ und der			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Formel $\cos\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert}$ erhält man $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und somit $\alpha \approx 26{,}57°$.		15	
d)	Die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ ist ein Trapez ($S_2S_3 \parallel D_2D_3$). Die Längen der parallelen Seiten: betragen $d(S_2,S_3) = 12$ m bzw. $d(D_{2'},D_3) = 6$ m. Zur Bestimmung der Höhe kann die Gerade g bestimmt werden, die in $\boldsymbol{E_2}$ verläuft, durch D_2 geht und orthogonal zu S_2S_3 ist. Mit Hilfe des Ansatzes g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\12\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}$ und der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für a den Wert –2. Der Schnittpunkt von g und S_2S_3 ist $S(10\|3\|10)$. Die Länge der Strecke $\overline{D_2S}$ beträgt $\sqrt{20}$. Die Höhe des Trapezes beträgt also $\sqrt{20}$ m. Damit ergibt sich für das Flächenmaß A der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$: $A = 9\cdot\sqrt{20}\ \text{m}^2 \approx 40{,}25\ \text{m}^2$.		15	
e)	Berechnung des Durchstoßpunktes S des Mastes durch die Dachfläche: Ansatz: $\vec{m} = \begin{pmatrix}9\\5\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Dann gilt für den Durchstoßpunkt: $S\,(9\|5\|10+r)$. Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ ergibt sich $r = 0{,}5$ und damit $S\,(9\|5\|10{,}5)$. Der Mast ragt also 5,50 m aus dem Dach.		15	
f)	Der Mittelpunkt des Mastes ist $M\,(9\,\|5\,\|\,13)$. Die Gerade g, die durch M geht und orthogonal zur Dachfläche ist, kann durch folgende Parameterform angegeben werden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}9\\5\\13\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Für den Endpunkt E der Stütze gilt demnach $E\,(9+r\,\|\,5\|\,13+2r)$. Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für $r = -1$ und damit E (8 | 5 | 11). Die Länge der Strecke $\overline{ME}$ beträgt $\sqrt{5}$. Somit ist die Stütze ca. 2,24 m lang.		15	
g)	Der Mittelpunkt des Kreises, auf dem der Torbogen liegt, ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_3}$ und von $\overline{K_1K_2}$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{K_1K_3}$ geht durch den Mittelpunkt $M\,(10\|3{,}5\|1)$ von $\overline{K_1K_3}$ und hat $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor. Geradengleichung: m_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\3{,}5\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Eine Geradengleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_2}$ ist: m_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden und damit der Mittelpunkt des Kreises ist $K\,(10 \mid 6 \mid -0{,}25)$. Der Radius r des Kreises ist der Abstand von K zu K_1, also $r = \sqrt{9{,}0625} \approx 3{,}01$. Da sich der Mittelpunkt des Kreises 0,25 m unter dem Erdboden befindet, hat der Torbogen eine Höhe von 2,76 m.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 13 Tribüne

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Koordinatengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$. Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$. Für den Schnittwinkel gilt dann: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert} = \dfrac{5}{\sqrt{30}}$. $\alpha \approx 24{,}09°$.	15		
b)	Bestimmung von C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AM} \Rightarrow C\,(32\,\lvert 16\,\rvert 16)$, Bestimmung von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\cdot\overrightarrow{BM} \Rightarrow D\,(0\,\lvert 0\,\rvert 16)$. Nachweis der Rechteckeigenschaften: Es genügt zu zeigen, dass einer der Winkel ein rechter ist. Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}32\\16\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren beträgt 0; also stehen sie senkrecht aufeinander. Es kann auch gezeigt werden, dass die Diagonalen gleich lang sind.	5	15	
c)	Abstand von M zu $\boldsymbol{E_1}$: Sei g die Gerade durch M, die senkrecht auf $\boldsymbol{E_1}$ steht. Eine Geradengleichung von g ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix}19\\2\\19\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen der Komponenten von $\vec{x}$ in die Gleichung von $\boldsymbol{E_1}$ ergibt sich: $r = -\frac{4}{3}$. Damit hat der Vektor $\overrightarrow{SM}$ den Betrag $\sqrt{80}$. Der Abstand ist demnach geringer als 10 m.		25	
d)	Flächenmaß der überdachten Fläche: Da die Fläche *ABCD* ein Rechteck ist, ist die senkrecht projizierte Fläche ebenfalls ein Rechteck. *A'* ist angegeben; *B', C', D'* unterscheiden sich von den Urbildpunkten lediglich in der x_3-Komponente, die man durch Einsetzen in die Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_1}$ erhält. Ergebnis: $B'(38\,\lvert 4\,\rvert 1)$, $C'(32\,\lvert 16\,\rvert 13)$, $D'(0\,\lvert\, 0\,\rvert 13)$. Das Flächenmaß F des Rechteckes ist das Produkt der Beträge von $\overline{A'B'}$ und $\overline{A'D'}$. $F = 18\cdot\sqrt{1280} = 643{,}987...$FE. Die überdachte Fläche hat ein Maß von circa 644 m^2.		20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Winkel α zwischen Seil und Dach: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}-6\\12\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}}{14\cdot 6\sqrt{6}} = \dfrac{13\cdot\sqrt{6}}{42} \approx 0{,}7582.$ Daraus folgt: $\alpha \approx 40{,}7°$. Betrag der Kraftkomponente: Es gilt: $\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_S} + \overrightarrow{F_D}$ mit $\overrightarrow{F_S} = r\cdot\overrightarrow{S_1A}$ und $\overrightarrow{F_D} = t\cdot\overrightarrow{AD}$. Es gilt also: $\begin{pmatrix}0\\0\\-10000\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}6\\-12\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}$. Daraus erhält man $r = t = 1000$. Damit gilt: $\lvert\overrightarrow{F_S}\rvert = 14\,000$ N. $\overrightarrow{F_S}$ hat einen Betrag von 14 000 N.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20