# Mecklenburg-Vorpommern

# Zentralabitur 2002

## Mathematik

### *Leistungskurs*

**Aufgaben**

# Hinweise für Schüler

**Aufgabenauswahl**

Die Arbeit besteht aus einem Pflichtteil und einem Wahlteil.
Die Pflichtaufgabe (**P1**) ist vollständig zu bearbeiten.
Von den vier Wahlaufgaben (**W2** bis **W5**) sind zwei auszuwählen und zu lösen.

**Bearbeitungszeit**

Die Arbeitszeit beträgt 300 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl.

**Hilfsmittel**

- Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner ohne CAS,
- Zeichengeräte,
- Duden (Die deutsche Rechtschreibung)

**Sonstiges**

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege zweifelsfrei nachvollziehbar sein.

Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa ¾ des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

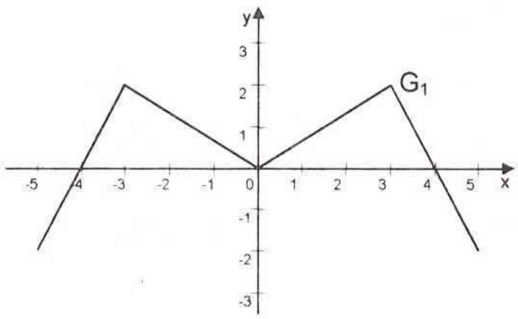
**Zusätzliche Bewertungseinheiten**

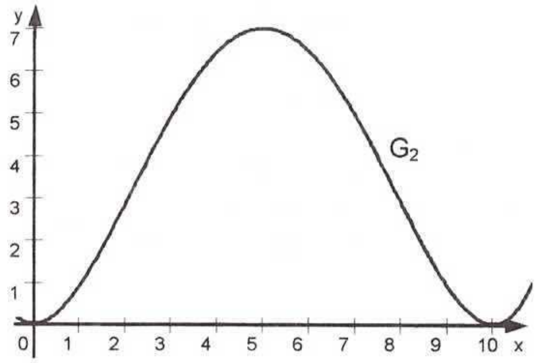
Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- vollständiger Lösung einer dritten Wahlaufgabe,
- eleganter, kreativer und rationeller Lösung.

## P1 Analysis, Geometrie, Stochastik

1.1 Die beiden unten abgebildeten Kurven $G_1$ und $G_2$ sind Graphen von Funktionen. Geben Sie für die Funktion mit dem Graphen $G_1$ die Ableitung in den offenen Intervallen
$-5 < x < -3$; $-3 < x < 0$; $0 < x < 3$ und $3 < x < 5$ an.
Skizzieren Sie für den Graphen $G_2$ einen möglichen Verlauf der Ableitungsfunktion im Intervall $0 \le x \le 10$.




1.2 Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$y = f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}\,, \quad x \in R.$$

Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem sei G.

1.2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G mit den Koordinatenachsen.

1.2.2 Die Funktion f ist im gesamten Definitionsbereich stetig.
Begründen Sie, dass f nicht überall differenzierbar ist.
Zeichnen Sie G mindestens im Intervall $-6 \le x \le 6$.

1.2.3 Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f für $x > 0$ und $y > 0$.

1.3 In einem kartesischen Koordinatensystem wird das Viereck ABCD durch die Punkte A(2/-2/2), B(6/6/-2), C(0/4/0) und D(-2/0/2) gegeben.

1.3.1 Zeichnen Sie das Viereck ABCD.
Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.

1.3.2 Berechnen Sie den Innenwinkel $\sphericalangle DAB$ und den Flächeninhalt des Trapezes.

1.3.3 Die Gerade mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

schneidet die Ebene, in der das Trapez liegt, in einem Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten von S.

1.4.1 Eine Firma produziert 200er Packungen Leuchtdioden, die ca. 1 % defekte Dioden enthalten.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass sich in einer Packung
A: genau zwei B: mindestens eine C: weniger als vier
defekte Leuchtdioden befinden.

1.4.2 Der französische Physiker und Mathematiker SIMEON DENIS POISSON (1781 – 1840) fand heraus, dass die Wahrscheinlichkeiten seltener Ereignisse einer BERNOULLI-Kette durch

$$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{für alle} \quad k \in N$$

angenähert werden können, wobei $\lambda = n \cdot p$ gilt. Ferner seien $n \in N$ groß und $p > 0$ klein.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C nach der von POISSON angegebenen Formel.
Begründen Sie, dass die Verwendung der POISSON-Formel sinnvoll ist.

## W2 Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a$ durch die Gleichung

$$y = f_a(x) = \frac{10x}{x^2 + a}, \quad x \in R,\ a \in R,\ a > 0.$$

Die zugehörige Kurvenschar in einem kartesischen Koordinatensystem sei $G_a$.

2.1 Zeigen Sie, dass jeder Graph der Schar $G_a$ symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und die der Wendepunkte von $G_a$.
Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a$ im Unendlichen, und geben Sie die Gleichung der Asymptoten von $G_a$ an.

2.3 Skizzieren Sie $G_1$ und $G_4$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

2.4 Die Extrempunkte der Kurvenschar $G_a$ liegen alle auf dem Graphen einer Funktion. Geben Sie die Gleichung dieser Funktion an.

2.5 Berechnen Sie eine Stammfunktion $F_1$ der Funktion $f_1$.
Der Graph $G_1$, die Geraden $x = 1$ und $y = 0$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

2.6 Die Funktion h mit der Gleichung

$$y = h(x) = \frac{5}{2}x\left(x^2 - 4x + 5\right), \quad x \in R$$

ist im Intervall [0;1] eine Näherungsfunktion für $f_1$.
Überprüfen Sie diese Aussage durch folgende Vergleiche:
- die Funktionswerte von $f_1$ und h an den Randpunkten des Intervalls und
- die Flächeninhalte, die sich aus $\int_0^1 h(x)\,dx$ und dem Ergebnis der Aufgabe 2.5 ergeben.

## W3 Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$y = f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}, \quad x \in R.$$

Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem sei G.

3.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die der Extrempunkte und die der Wendepunkte von G.

3.2 Bestimmen Sie das Verhalten von f im Unendlichen und skizzieren Sie den Graphen G.

3.3 Für $x \geq 0$ wird eine Stelle $x = a$ derart gesucht, dass das Dreieck OPQ mit O(0/0), P(a/0), Q(a/f(a)) einen maximalen Flächeninhalt erhält. Berechnen Sie diese Stelle und den zugehörigen Flächeninhalt.

3.4 Im Intervall $0 \leq x \leq 2$ soll die Funktion f durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades der Form

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in R, \; a, b, c, d \in R,$$

angenähert werden, um damit die Fläche zu berechnen, die von G und der x-Achse in diesem Intervall begrenzt wird. Dabei soll gelten:

$r(0) = f(0) = 0,\quad r(2) = f(2) = 4,\quad r'(0) = 0,\quad r'(2) = 0.$

Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c, d.

Wie groß ist der Fehler für den Flächeninhalt, wenn anstelle von f die Näherungsfunktion r im Intervall $0 \leq x \leq 2$ verwendet wird?

## W4 Geometrie

Ein Körper aus Aluminium ($\rho = 2{,}7 \frac{g}{cm^3}$) hat die Form einer Pyramide ABCDS.

In einem kartesischen Koordinatensystem (1 LE = 1 cm) besitzen die Eckpunkte die folgenden Koordinaten:

A(4/-1/0), B(2/3/-4), C(-6/3/0), D(-4/-1/4) und S(4/9/10).

4.1 Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABCD des Körpers ein Rechteck ist. Prüfen Sie, ob es sich bei dem Körper ABCDS um eine gerade Pyramide handelt.

4.2 Stellen Sie den Körper in einem Koordinatensystem dar und berechnen Sie die Masse des Körpers.

4.3 Auf der Kante $\overline{AD}$ soll ein Punkt P so markiert werden, dass sein Abstand zu B und zu D gleich groß ist.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

4.4 Durch den Punkt L(1/-3/-5) verläuft ein Laserstrahl in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl beim Durchbohren des Körpers durch die Diagonale $\overline{AC}$ der Grundfläche verläuft.

4.5 Ein Laserstrahl trennt den Körper durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile. Dieser Schnitt verläuft senkrecht zur Grundfläche ABCD durch den Punkt A, durch den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$ und einen Punkt auf der Kante $\overline{SB}$.
Für eine Oberflächenbehandlung muss die Schnittfläche untersucht werden. Prüfen Sie, ob die entstandene Schnittfläche die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat.

## W5 Stochastik

5.1 Zur Heilung einer seltenen Krankheit gab es bislang noch keine wirksame Behandlung. Glücklicherweise stellte sich trotzdem bei ca. 35 % aller Patienten von allein deren Genesung ein (Selbstheilung).
Die Kosten medizinischer Forschung sind sehr hoch. Daher beschloss die Europäische Gemeinschaft, ein internationales Forscherteam zu bilden. Nach zweijähriger Kooperation scheint ein Durchbruch gelungen zu sein. Die Mediziner hoffen, eine Therapie gefunden zu haben, die bei ca. 60 % der Betroffenen den ersehnten Erfolg bewirkt. Zumindest war das in der ersten Testserie so. Bevor die Forscher das Ergebnis veröffentlichen, untersuchen sie weitere Testreihen mit je 30 Freiwilligen.
Entscheidungsregel: Wird mindestens die Hälfte der Testpatienten gesund, nimmt das Team an, die Genesungen waren Therapieerfolge und nicht Selbstheilungen.
(Hinweis: Die Anzahl der genesenen Testpatienten ist annähernd binomialverteilt.)
Welche falschen bzw. richtigen Entscheidungen sind in dieser Situation möglich?
Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, eine falsche bzw. eine richtige Entscheidung zu treffen?

5.2 Bei vielen Überprüfungen von Hypothesen durch Tests genügen Aussagen mit 5%iger Signifikanz (z. B. Stabilitätstests von Bleistiften, Reinheitstests bei Waschpulver, Geräuschtests beim Zerbeißen von Cornflakes).

5.2.1 Begründen Sie, dass das Forscherteam mit beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten unzufrieden ist.
Erläutern Sie, ob 5%ige Signifikanz in der Medizin ausreichen würde
Gehen Sie dabei auf mögliche Konsequenzen von Fehlentscheidungen ein.

5.2.2 Ändern Sie die Entscheidungsregel aus Aufgabe 5.1 so ab, dass bei 30 Testpatienten die Wahrscheinlichkeit, Selbstheilung irrtümlich als Therapieerfolg zu deuten, kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.
Geben Sie für diesen Fall beide Irrtumswahrscheinlichkeiten an.
Begründen Sie, warum das Forscherteam eine Erhöhung der Anzahl der Testpatienten beschließt.

5.3 Als die Forscher die neue Therapie entdeckten, wussten sie noch nicht, wie viel Prozent der ersten 30 Testpatienten genesen werden. Sie hofften lediglich, dass die Genesungswahrscheinlichkeit p größer als 35 % sein wird. Ein Schätz- bzw. Erfahrungswert für p lag noch nicht vor. Trotzdem wollten sie bei Anwendung der Entscheidungsregel (siehe Aufgabe 5.1) zu Aussagen über Irrtumswahrscheinlichkeiten gelangen.
Tabelle 2 enthält Wahrscheinlichkeiten, einen Therapieerfolg irrtümlich als Selbstheilung zu deuten, in Abhängigkeit von p, wenn p in 10%-Schritten wächst. Stellen Sie die Abhängigkeit in einem Koordinatensystem dar und deuten Sie die Darstellung.

## Tabellen für Aufgabe W5

Tabelle 1: $B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \; F_{n,p}(k) = \sum_{i=0}^{k} B_{n,p}(i)$

| k | $B_{30;\,0,35}(k)$ | $F_{30;\,0,35}(k)$ | $B_{30;\,0,60}(k)$ | $F_{30;\,0,60}(k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | 0,0000 | 0,0000 | | |
| 2 | 0,0003 | 0,0003 | | |
| 3 | 0,0015 | 0,0019 | | |
| 4 | 0,0056 | 0,0075 | | |
| 5 | 0,0157 | 0,0233 | | |
| 6 | 0,0353 | 0,0586 | | |
| 7 | 0,0652 | 0,1238 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 0,1009 | 0,2247 | 0,0002 | 0,0002 |
| 9 | 0,1328 | 0,3575 | 0,0006 | 0,0009 |
| 10 | 0,1502 | 0,5078 | 0,0020 | 0,0029 |
| 11 | 0,1471 | 0,6548 | 0,0054 | 0,0083 |
| 12 | 0,1254 | 0,7802 | 0,0129 | 0,0212 |
| 13 | 0,0935 | 0,8737 | 0,0269 | 0,0481 |
| 14 | 0,0611 | 0,9348 | 0,0489 | 0,0971 |
| 15 | 0,0351 | 09699 | 0,0783 | 0,1754 |

| k | $B_{30;\,0,35}(k)$ | $F_{30;\,0,35}(k)$ | $B_{30;\,0,60}(k)$ | $F_{30;\,0,60}(k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 0,0177 | 0,9876 | 0,1101 | 0,2855 |
| 17 | 0,0079 | 0,9955 | 0,1360 | 0,4215 |
| 18 | 0,0031 | 0,9986 | 0,1474 | 0,5689 |
| 19 | 0,0010 | 0,9996 | 0,1396 | 0,7085 |
| 20 | 0,0003 | 0,9999 | 0,1152 | 0,8237 |
| 21 | 0,0001 | 1,0000 | 0,0823 | 0,9060 |
| 22 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0505 | 0,9565 |
| 23 | | | 0,0263 | 0,9828 |
| 24 | | | 0,0115 | 0,9943 |
| 25 | | | 0,0041 | 0,9985 |
| 26 | | | 0,0012 | 0,9997 |
| 27 | | | 0,0003 | 1,0000 |
| 28 | | | 0,0000 | 1,0000 |
| 29 | | | | |
| 30 | | | | |
| | | | | |

Tabelle 2: P(p)

| p in % | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(p) in % | 100 | 100 | 100 | 98,3 | 82,5 | 42,8 | 9,7 | 0,6 | 0 | 0 | 0 |