Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2008

Mathematik

CAS

Aufgaben

Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl: Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.
Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten.
Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen.

Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B. Von den Aufgaben B1, B2 und B3 ist **eine** auszuwählen.

Bearbeitungszeit: Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Grundkursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 255 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Hilfsmittel: Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner und das an der Schule zugelassene CAS,
- Zeichengeräte
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Hinweis: Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.
Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges: Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.

Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form werden entsprechend der geltenden Prüfungsbestimmungen gewertet.

A1 Analysis

1.1 Geben Sie die maximale Anzahl der Extremstellen an, die eine ganzrationale Funktion 3. Grades haben kann.
Begründen Sie ihre Entscheidung.

1.2 Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph ist G.

1.2.1 Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion an.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch G und die x-Achse vollständig begrenzt wird.

Eine weitere Fläche befindet sich vollständig im ersten Quadranten.
Sie wird durch G, die Koordinatenachsen und eine senkrechte Gerade $x = k$ begrenzt.
Ihr Flächeninhalt beträgt 30 FE.
Berechnen Sie k.

1.2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente und die Gleichung der Normalen, die durch den Wendepunkt verläuft.

1.2.3 Ein Dreieck OAB entsteht durch den Koordinatenursprung O, den Schnittpunkt A des Graphen mit dem positiven Teil der x-Achse und den Punkt B.
Der Punkt B liegt im ersten Quadranten auf G.
Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

1.3 Gegeben ist eine Funktionenschar g_a durch die Gleichung

$$g_a(x) = \frac{a}{30}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten der Graphen dieser Schar.

A2 Analytische Geometrie

Zur Herstellung von Modeschmuck werden pyramidenförmige Körper benötigt. Eine solche Pyramide ABCDS besitzt die Grundfläche ABCD mit den Eckpunkten A(4 | −3 | 2), B(7 | 1 | 0), C(4 | 3 | −1), D(1 | 1 | 0) und die Spitze S(4 | 4 | 11). Die Koordinatenangaben beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem.

2.1 Zeichnen Sie den Körper ABCDS.
Bestätigen Sie die Tatsache, dass die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD die Form eines Drachenvierecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABS.
Weisen Sie nach, dass der Punkt L(4 | −1 | 1) der Höhenfußpunkt der Pyramide ABCDS ist.
Berechnen Sie das Volumen des Schmuckstücks, wenn 1 LE $\hat{=}$ 1 mm gilt.

2.3 Ein ebener Schnitt durch die Punkte B, D und R(1,5 | 0,75 | 3,25) schneidet die Kante $\overline{AS}$ in einem Punkt P und zerlegt das Schmuckstück in zwei Teilkörper.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.
Untersuchen Sie, welche besondere Form das Dreieck BDP aufweist.

2.4 Es gibt Ebenen, die den Körper ABCDS in zwei volumengleiche Teile zerlegen.
Beschreiben Sie die Lage einer solchen Ebene und begründen Sie Ihre Entscheidung.

A3 Stochastik und Analysis

3.1 Zur Herstellung von Taschenlampen werden unter anderem je acht Leuchtdioden (LED) und eine Batterie pro Lampe gebraucht. Erfahrungsgemäß sind von den zu verwendenden LED 1 % defekt. Von den Batterien funktionieren etwa 2 % nicht. Andere Fehler treten beim Bau der Lampen nicht auf.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig der laufenden Produktion entnommene Taschenlampe fehlerfrei ist.

3.2 Ein Großmarkt bekommt eine Sendung von 1000 Taschenlampen, von denen man weiß, dass etwa 7 % davon nicht fehlerfrei sind.

3.2.1 Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Lampen in der gesamten Lieferung.

3.2.2 Der Lieferung werden 10 Lampen zufällig entnommen.
Berechnen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.

A: Genau eine geprüfte Lampe ist fehlerhaft.
B: Höchstens zwei geprüfte Lampen sind fehlerhaft.
C: Von den geprüften Lampen sind mehr als zwei aber nicht mehr als 6 fehlerhaft.

3.2.3 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der fehlerhaften Lampen unter den 10 geprüften an.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Interpretieren Sie diese.

3.3 Der Großmarkt kann die Lampen auch von anderen Herstellern beziehen. Dabei kann der Anteil p der fehlerhaften Lampen an einer Lieferung je nach Hersteller verschieden sein.

3.3.1 Berechnen Sie für $p_1 = 0{,}2$ und für $p_2 = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 10 getesteten Lampen höchstens zwei fehlerhafte befinden.

3.3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion, die den Zusammenhang beschreibt zwischen dem Anteil fehlerhafter Lampen pro Lieferung und der Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Stichprobe vom Umfang 10 höchstens zwei fehlerhafte Lampen zu finden.

(mögliches Ergebnis: $f(p) = (p-1)^8 \cdot (36p^2 + 8p + 1)$)

Geben Sie Definitions- und Wertebereich dieser Funktion an.

Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion.

Formulieren Sie den dargestellten Zusammenhang.

B1 Analysis

1.1 Über die 8 Planeten unseres Sonnensystems sind die in der Tabelle gegebenen Daten bekannt.
Dabei ist v die Maßzahl der mittleren Bahngeschwindigkeit in $km \cdot s^{-1}$ und r die Maßzahl der mittleren Entfernung von der Sonne in 10^6 km.

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
r	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1427,0	2869,9	4496,7
v	47,80	35,03	29,79	24,13	13,06	9,64	6,81	5,43

1.1.1 Der Zusammenhang zwischen v und r kann durch Funktionen näherungsweise beschrieben werden.
Finden Sie die Gleichungen geeigneter Funktionen, indem Sie folgende Regressionen ausführen:
(1) $v = f_1(r)$ ... lineare Regressionsfunktion
(2) $v = f_2(r)$ ... exponentielle Regressionsfunktion
(3) $v = f_3(r)$ ... Potenz- bzw. Powerregression
Beurteilen Sie die ermittelten Funktionen hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit, den Sachverhalt zu beschreiben.

1.1.2 Eine mögliche Funktion zur Beschreibung des Sachverhaltes ist f mit der Gleichung

$$v = f(r) = 364 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R},\ r > 0.$$

Bestimmen Sie die Bahngeschwindigkeit, die ein Planet hätte, der sich zwischen Mars und Jupiter befinden würde (mittlere Entfernung von der Sonne 400 Millionen km).

Pluto zählt heute nicht mehr zu den Planeten. Seine Bahngeschwindigkeit beträgt $4{,}74\ km \cdot s^{-1}$.
Berechnen Sie seinen mittleren Abstand von der Sonne.

1.2 Die Funktion f ist gegeben mit der Gleichung

$$f(x) = 364 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

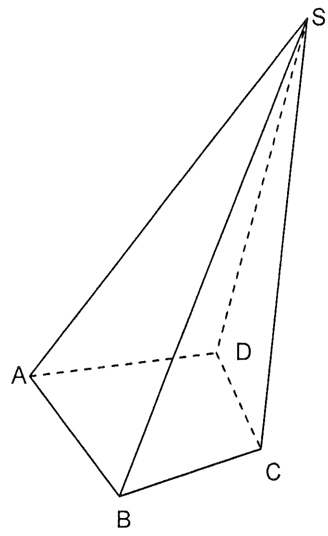
Im ersten Quadranten werden Flächen A_k durch den Graphen von f, die Koordinatenachsen und die Gerade x = 200 sowie die horizontale Gerade y = k begrenzt.

1.2.1 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_{500}.

Untersuchen Sie, ob der Inhalt der Fläche A_k größer als 20 000 Flächeneinheiten werden kann, wenn die horizontale Gerade immer weiter nach oben verschoben wird.

1.2.2 Die Fläche A_{500} rotiert um die x-Achse.
Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

B2 Analytische Geometrie



Skizze nicht maßstäblich

Betrachtet wird eine Pyramide ABCDS (siehe Skizze).
Diese Pyramide besitzt die Grundfläche ABCD mit $A(4 \mid -3 \mid 2)$, $B(7 \mid 1 \mid 0)$, $C(4 \mid 3 \mid -1)$, $D(1 \mid 1 \mid 0)$ und die Spitze $S(4 \mid 4 \mid 11)$.
Die Koordinatenangaben beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem.

2.1 Die Ebene durch die Punkte B, D und den Mittelpunkt der Kante $\overline{AS}$ zerlegt die Pyramide ABCDS in zwei Teilkörper.

Berechnen Sie das Volumen von einem der beiden Teilkörper.

2.2 Es werden alle ebenen Körperschnitte betrachtet, die durch B, D und einen Punkt der Kante $\overline{AS}$ verlaufen.

Weisen Sie nach, dass alle dabei auftretenden Schnittdreiecke gleichschenklig sind.
Prüfen Sie, ob ein gleichseitiges oder ein rechtwinkliges Dreieck als Schnittfigur auftreten kann.
Untersuchen Sie ferner, ob es Schnittdreiecke gibt, die einen Flächeninhalt von mindestens 36 FE besitzen.

2.3 Das Grundflächenviereck ABCD besitzt die Form eines Drachenvierecks.
Entscheiden Sie, ob dieses Drachenviereck einen Umkreis besitzt.

B3 Stochastik

Ein Hersteller von Flachbildschirmen hat für eines seiner Produkte folgende Ausfallwahrscheinlichkeiten ermittelt:

Alter in Monaten	0 – 6	7 – 12	13 – 18	19 – 24
Ausfallwahrscheinlichkeit in Prozent	5,0	0,5	0,5	0,8

Die Angabe bedeutet, dass ein Flachbildschirm innerhalb des ersten halben Jahres mit 5 % Wahrscheinlichkeit ausfällt; ein verbleibender fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % innerhalb des zweiten halben Jahres aus usf.

3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiges Gerät innerhalb der ersten 12 Monate nicht ausfällt.

Bestimmen Sie, wie viele defekte Geräte innerhalb des ersten Jahres zu erwarten sind, wenn insgesamt 1000 Geräte ausgeliefert wurden.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 1000 Geräten nicht mehr als 55 innerhalb des ersten Jahres ausfallen.

3.2 Innerhalb des ersten Jahres gibt es kostenlose Garantieleistungen.
Das Unternehmen hat beschlossen, interessierten Kunden nach Ablauf des ersten Jahres eine kostenpflichtige Garantieverlängerung für ein weiteres Jahr anzubieten.
Man schätzt, dass von 1000 Kunden 300 diese Garantieverlängerung kaufen würden.

3.2.1 Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Flachbildschirms innerhalb des zweiten Jahres 0,01225 ist.

3.2.2 Jeder im zweiten Jahr auftretende Garantiefall verursacht durchschnittliche Kosten in Höhe von 75,00 €.

Der Hersteller möchte die Gesamtkosten für alle im zweiten Jahr auftretenden Garantiefälle über den Preis für die Garantieverlängerung ausgleichen.

Bestimmen Sie den Preis, den ein Kunde für die Garantieverlängerung zahlen muss.

3.3 Die Gehäuse für die Flachbildschirme werden von einem Zulieferer bezogen.
Die Gehäuse können Material- oder Farbfehler aufweisen. Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Andere Fehler gibt es nicht.

3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein fehlerfreies Gehäuse, wenn Materialfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % und Farbfehler mit 2%-iger Wahrscheinlichkeit auftreten.

3.3.2 Ein anderer Zulieferer behauptet, seine Gehäuse seien mindestens zu 97 % fehlerfrei. Um dies zu prüfen, werden aus einer großen Anzahl von Gehäusen 50 zufällig ausgewählt und überprüft.
Ermitteln Sie den Erwartungswert für die Anzahl der fehlerhaften Gehäuse.

Eine Entscheidungsregel lautet: Wenn sich unter den 50 getesteten Gehäusen mehr als drei fehlerhafte Gehäuse befinden, wird die Lieferung abgelehnt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P_{Fehler} dafür, eine Lieferung fälschlicherweise als mangelhaft abzulehnen.

Erstellen Sie eine neue Entscheidungsregel, sodass gilt: $P_{Fehler} < 0,05$.