Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2008

Mathematik

Aufgaben

Name, Vorname: ....

Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1-3 des Arbeitsblattes)

Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk und Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

1.2 Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung

$$h(x) = \frac{x^2 - 49}{x - 7} \text{ mit } x \in D_h.$$

Geben Sie die Nullstelle von h an.

1.3 Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = (x - 2)(x + 2) \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

- Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' von f.
- Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1.4 In den Abbildungen sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, der zugehörigen Ableitungsfunktion f′ und einer weiteren Funktion g dargestellt.

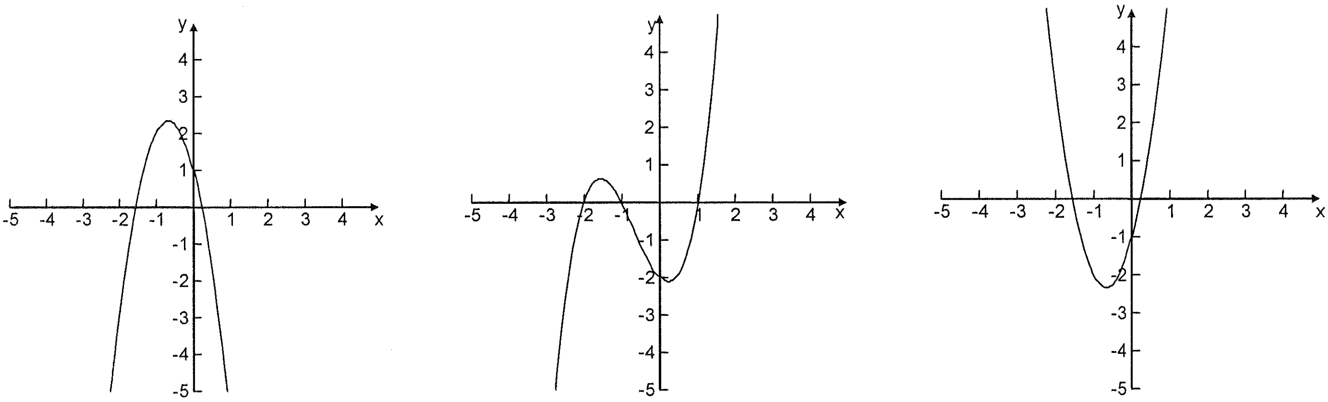


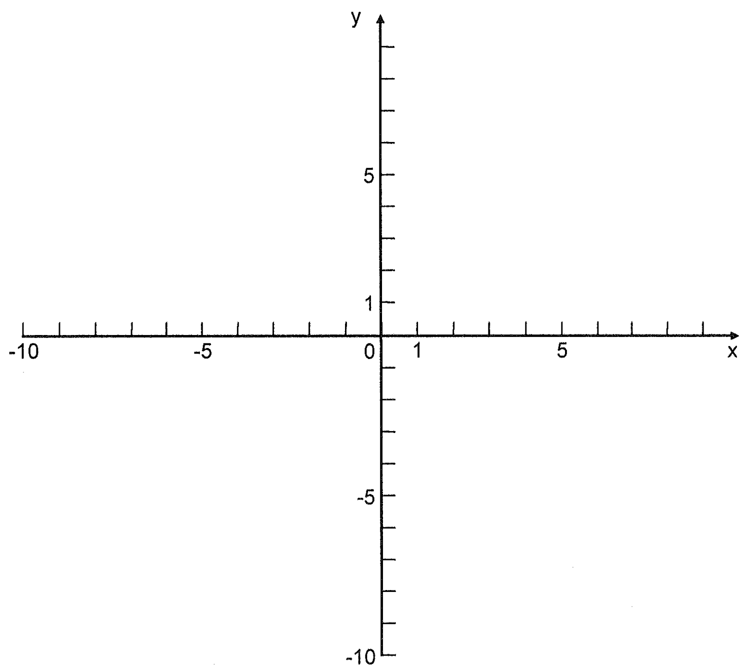
Abbildung 1 Abbildung 2 Abbildung 3

Ordnen Sie den Abbildungen die Funktionen f und f′ zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.5 Gegeben ist eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- Eine Polstelle von f ist 2.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
- Eine Nullstelle von f ist −1.

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit diesen Eigenschaften.



2	**Analytische Geometrie**
	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD gegeben: A(4 | 1 | 2), B(2 | 3 | 2), C(2 | 1 | 4), D(4 | −1 | 4).
2.1	- Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm handelt. - Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist. - Ermitteln Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes.
2.2	Gegeben ist ein weiterer Punkt E(3 | 2 | 1). Untersuchen Sie, ob E auf der Viereckseite $\overline{AB}$ liegt.

3	**Stochastik**

Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her.
Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft sind.
An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5 %.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde am Montag produziert.
B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl: Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.
Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten.
Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen.

Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B. Von den Aufgaben B1, B2 und B3 ist **eine** auszuwählen.

Bearbeitungszeit: Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Grundkursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 255 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Hilfsmittel: Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Hinweis: Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.
Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges: Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.

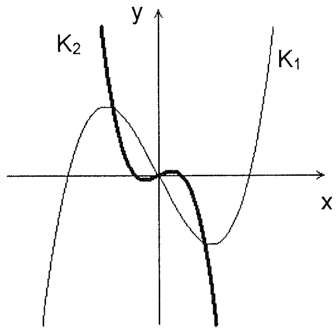
Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form werden entsprechend der geltenden Prüfungsbestimmungen gewertet.

A1 Analysis

1.1 Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{18}x^3 - 2x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 0{,}5x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$



Der Graph von f_1 ist K_1. Der Graph von f_2 ist K_2.

1.1.1 Untersuchen Sie den Graphen K_2 auf Symmetrie.

1.1.2 Die beiden Graphen K_1 und K_2 schließen für $x \geq 0$ eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.1.3 Gegeben sind die Punkte $Q(u \mid f_1(u))$ und $R(u \mid f_2(u))$ im Intervall $0 \leq u \leq 3, u \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Abstand der Punkte Q und R für u = 1.

Ermitteln Sie rechnerisch den Wert für u so, dass der Abstand zwischen den Punkten Q und R maximal wird.

1.2 Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$$f_a(x) = \frac{1}{12a}x^3 - ax \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

1.2.1 Weisen Sie nach, dass die Graphen G_2 und $G_{-\frac{1}{2}}$ im Koordinatenursprung senkrecht aufeinander stehen.

1.2.2 Für die folgenden Betrachtungen gilt a > 0.

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a und geben Sie die Art der Extrema an.

A2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(4 | 1,5 | −3,5), B(−1 | 1,5 | −3,5), C(−1 | −1,5 | 0,5) und D(4 | −1,5 | 0,5) gegeben.

2.1 Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen.

2.2 Stellen Sie das Viereck ABCD in einem kartesischen Koordinatensystem dar. Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein Quadrat ist.

2.3 ABCD sei die gemeinsame Grundfläche zweier gerader quadratischer Pyramiden mit den Spitzen S_1 und S_2 und der Höhe von je 5 LE.

2.3.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2.

2.3.2 Eine der beiden Spitzen hat nur positive Koordinaten.

Ergänzen Sie die grafische Darstellung der Grundfläche zu der Pyramide mit dieser Spitze.

2.4 Gegeben ist eine gerade Pyramide P mit der Spitze S(1,5 | 4 | 1,5) und der quadratischen Grundfläche ABCD.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide P.

2.5 Die Punkte P_t (4 − 5t | 1,5 | −3,5) liegen auf der Geraden durch A und B.

2.5.1 Berechnen Sie die Größe des Winkels DP_2C.

2.5.2 Zeigen Sie, dass für keinen Wert von t gilt: $\sphericalangle\ DP_tC = 90°$.

A3 Analytische Geometrie / Stochastik

3.1 Die geradlinigen Kurse zweier Flugzeuge werden in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Geraden k_1 und k_2 beschrieben.

k_1 verläuft durch den Punkt $P(-290 \mid 320 \mid 140)$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ -50 \end{pmatrix}$.

k_2 verläuft durch die Punkte $Q_1(-800 \mid 500 \mid -70)$ und $Q_2(200 \mid 0 \mid -70)$.
(1 LE $\hat{=}$ 1 km)

3.1.1 Zeichnen Sie die Geraden k_1 und k_2 in ein geeignetes Koordinatensystem. Berechnen Sie die Entfernung von P nach Q_1.

3.1.2 Geben Sie für k_1 und k_2 je eine Geradengleichung an. Ermitteln Sie die Lage der beiden Geraden zueinander.

3.1.3 Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 310 \\ 620 \\ -610 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

die Geraden k_1 und k_2 senkrecht schneidet.

Ermitteln Sie den Abstand der Geraden k_1 von der Geraden k_2.

3.2 Eine Fluggesellschaft verwendet für eine bestimmte Strecke Flugzeuge mit 50 Plätzen. Die Flüge auf dieser Strecke sind vorab stets ausgebucht. Im Durchschnitt werden 10 % der gebuchten Plätze jedoch storniert und damit nicht belegt.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der nicht belegten Plätze je Flug an.
X ist annähernd binomialverteilt.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse für je einen Flug.

A: Genau 5 Plätze sind nicht belegt.

B: Höchstens 2 Plätze sind nicht belegt.

3.2.2 Um Flugzeuge auf dieser Strecke besser auszulasten, bietet eine Fluggesellschaft stets 4 % mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Damit geht das Unternehmen das Risiko der Überbuchung ein. Für ein Flugticket nimmt die Fluggesellschaft 120 €. Bei Stornierung zahlt der Fluggast 60 €. Bei Abweisung eines Fluggastes wegen Überbuchung entstehen der Fluggesellschaft Kosten von 500 €.

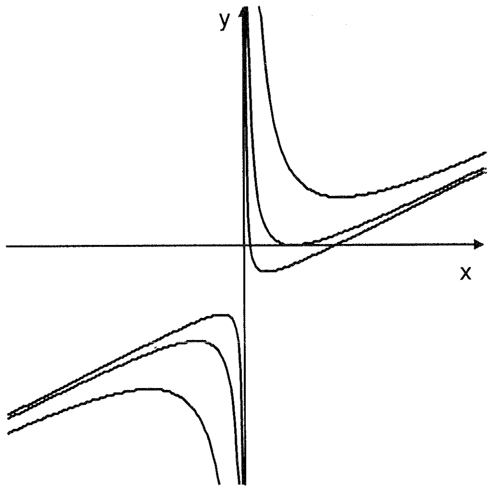
Berechen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fluggäste wegen Überbuchung nicht mitfliegen können.
Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft für einen Flug, wenn 51 Fluggäste den Flug antreten möchten?

B1 Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$$f_k(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{k \cdot x} - 1 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R},\, x \neq 0,\, k \in \mathbb{R},\, k > 0\,.$$

G_k sind die zu f_k gehörenden Graphen (siehe Abbildung).



1.1 Berechnen Sie in Abhängigkeit von k:

- die Anzahl der Nullstellen von f_k,
- die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von G_k.

1.2 Geben Sie je eine Gleichung für die beiden Asymptoten von G_k an.

1.3 Errechnen Sie den Inhalt der von $G_{\frac{16}{3}}$ und der x-Achse vollständig begrenzten Fläche.

1.4 Berechnen Sie, für welche x-Werte die Differenz der Funktionswerte von $f_{\frac{16}{3}}$ und der Funktion $y = \frac{x}{2} - 1$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

1.5 An der Stelle x_k wird die Tangente an den Graphen G_k gelegt.
Ermitteln Sie x_k in Abhängigkeit von k so, dass die Tangente durch den Koordinatenursprung verläuft.

B2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

$A_u(-2 \mid -4u \mid 1), B_u(2u \mid -4 \mid 4)$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $C(4 \mid 0 \mid 4)$

und eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die Ebene ε_u enthält die Punkte A_u, B_u und C.

2.1 Zeigen Sie, dass die Gerade g in den Ebenen ε_3 und ε_{-1} liegt.

2.2 Gegeben sind die Punkte $D_t(t \mid t^2 \mid 4)$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Genau zwei dieser Punkte liegen in der Ebene ε_3.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Im Intervall $[-4; 2]$ gibt es einen Wert von t, für den der Abstand des Punktes D_t zur Ebene ε_3 maximal wird.
Berechnen Sie diesen Wert von t.

2.3 Die Punkte $P_1(4 \mid 0 \mid -6)$ und $P_2(4 \mid -6 \mid -3)$ sind benachbarte Eckpunkte eines Rechtecks. Die beiden anderen Punkte liegen auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung.
Berechnen Sie den Umfang des Rechtecks.

2.4 Überprüfen Sie folgende Aussage:
Die Vektoren $\overrightarrow{CA_u}$ und $\overrightarrow{CB_u}$ sind linear abhängig.

B3 Stochastik

Eine Firma produziert Staubsauger eines bestimmten Typs. Die Qualitätskontrolle eines Gerätes besteht aus der Prüfung seiner mechanischen Belastbarkeit und seiner Saugleistung. Die Resultate beider Prüfungen sind unabhängig voneinander.

3.1 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Staubsauger dieses Typs

- den mechanischen Belastungstest nicht besteht, beträgt 5,5 %,
- den Saugleistungstest besteht, beträgt 90 %.

Veranschaulichen Sie den Vorgang „Qualitätskontrolle" in einem Baumdiagramm.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

A: Ein Staubsauger besteht beide Tests.
B: Ein Staubsauger besteht genau einen Test

3.2 Staubsauger, die beide Tests bestehen, besitzen die Qualität I.
Ihre Anzahl ist annähernd binomialverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Staubsauger die Qualität I besitzt, wird im Folgenden als Erfolgsquote bezeichnet.

3.2.1 Die Erfolgsquote beträgt $p = 85$ %. Es werden 50 Staubsauger getestet.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Staubsauger, die die Qualität I besitzen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 40 aber weniger als 45 Staubsauger die Qualität I haben.
Ermitteln Sie die minimale Zahl $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$, sodass die Wahrscheinlichkeit, mindestens k Staubsauger von der Qualität I zu erhalten, größer als 97 % ist.

3.2.2 Die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle 50 Staubsauger die Qualität I besitzen, sei 99 %.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Erfolgsquote p.

3.2.3 Bestimmen Sie rechnerisch die Anzahl n der zu kontrollierenden Staubsauger, damit bei einer Erfolgsquote von $p = 99$ % die Wahrscheinlichkeit, dass alle Qualität I haben, rund 80 % beträgt.

3.3 Ein Großhändler für Staubsauger hat den Verdacht, dass mehr als 10 % der mit Qualität I ausgewiesenen Staubsauger dieser nicht genügen.
In einem Test wird dieser Verdacht an 50 Staubsaugern überprüft.

3.3.1 Beschreiben Sie an diesem Beispiel den Begriff Fehler 1. Art.

3.3.2 Wie wird auf Grund der Stichprobe entschieden, wenn 10 der überprüften Staubsauger der Qualität I nicht genügen?
Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 2 %.

Hinweis: Tabellen der Binomialverteilung auf Seite 9

Binomialverteilung und summierte Binomialverteilung:

n	k	p = 0,85 $B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$
50	28		
	29		
	30	0,00001	0,00002
	31	0,00004	0,00006
	32	0,00015	0,00021
	33	0,00045	0,00066
	34	0,00129	0,00195
	35	0,00334	0,00529
	36	0,00788	0,01317
	37	0,01689	0,03006
	38	0,03275	0,06281
	39	0,05711	0,11992
	40	0,08899	0,20891
	41	0,12299	0,33190
	42	0,14935	0,48125
	43	0,15745	0,63870
	44	0,14195	0,78065
	45	0,10725	0,88789
	46	0,06606	0,95395
	47	0,03186	0,98581
	48	0,01128	0,99709
	49	0,00261	0,99970
	50	0,00030	1,00000

Summierte Binomialverteilung:

n = 50, p = 0,1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{n;p}(k)$	0,00515	0,03379	0,11173	0,25029	0,43120	0,61612	0,77023	0,87785	0,94213

k	9	10	11	12	13	14	15	16
$F_{n;p}(k)$	0,97546	0,99065	0,99678	0,99900	0,99971	0,99993	0,99998	1