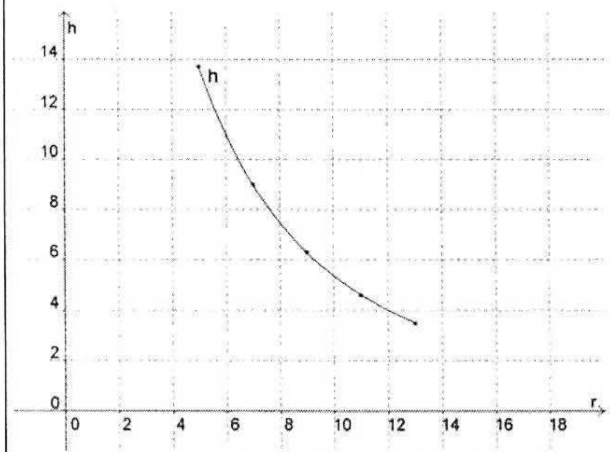
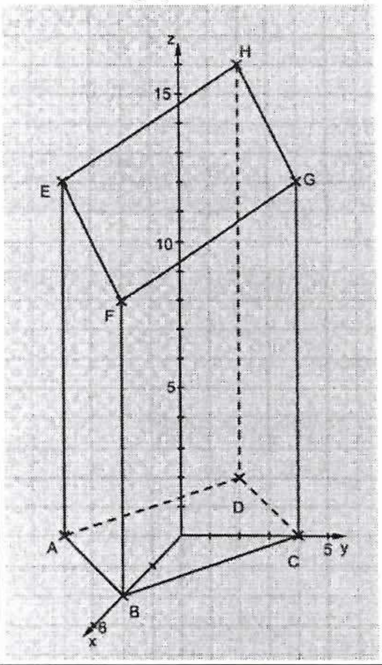
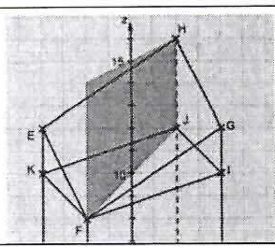
Aufgabe A1

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungen</th><th>mögliche BE</th><th>erteilte BE</th></tr>
<tr><td>1.1.1</td><td>Wertetabelle
<table>
<tr><td>r</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td></tr>
<tr><td>h(r)</td><td>13,7</td><td>9,0</td><td>6,3</td><td>4,6</td><td>3,5</td></tr>
</table></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Darstellung des Graphen

</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.1.2</td><td>Beschreibung</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$r \to 4$: gerader Kreiszylinder und Höhe nimmt zu</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$r \to \infty$ $(h \to 0)$: Scheibe</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Wachs:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$V_{rot} = \pi \cdot \int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{0,8}^{11} \left(2,3 \cdot \sqrt[8]{x^3 - 0,8^3}\right)^2 dx$</td><td>1 1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$V_{rot} = 621,9$ VE → ca. 620 cm³</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Glas:
äußere Rotationskörper → gerader Kegelstumpf</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$V = \frac{\pi}{3} h\left(r_2^2 + r_2 \cdot r_1 + r_1^2\right)$ $\quad r_1 = y_A = 4 \quad r_2 = y_B = 6 \quad h = 11$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$V = 875,5$ VE</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$V_{Glaskörper} = V_{Kegelstumpf} - V_{rot} = 253,6$ VE → ca. 250 cm³</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Berechnung der Masse:
$m = \rho \cdot V = 2,2 \frac{g}{cm^3} \cdot 250\ cm^3 = 550\ g$</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Schnitt mit Koordinatenachsen</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Zählerpolynom keine Nullstellen →
$f_a(x)$ kein Schnittpunkt mit der x-Achse;
$f_a(0) = \frac{2625}{a \cdot \pi}$ → $S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{2625}{a \cdot \pi}\right)$</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
	Hochpunkt		
	$f_a'(x) = \dfrac{-5250 \cdot (x+2)}{\pi \cdot (x^2 + 4x + a)^2}$	1	
	Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$		
	$x_E = -2$	1	
	y-Koordinate: $f_a(-2) = \dfrac{2625}{(a-4) \cdot \pi}$		
	$P_{max}\left(-2 \;\middle|\; \dfrac{2625}{\pi \cdot (a-4)}\right)$	1	
	Anzahl der Polstellen		
	Nullstellen des Nennerpolynoms	1	
	$0 = \pi \cdot (x^2 + 4x + a) \rightarrow \quad x_{1;2} = -2 \pm \sqrt{4-a}$	1	
	zwei Polstellen für a < 4,	1	
	eine für a = 4,	1	
	keine für a > 4		

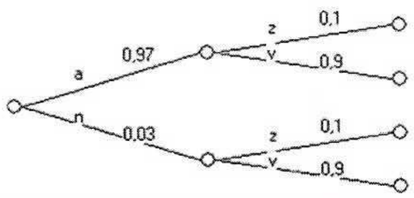
Aufgabe A2

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
2.1	Zeichnung (verdeckte Körperkanten) 	3	
2.2	**Begründung** z-Koordinate alle Punkt A, B, C und D ist null	1	
2.3	**Koordinatengleichung der Ebene** $\vec{\eta}_{EFGH} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Koordinatengleichung lautet: $x + 2z - d = 0$. Einsetzen der Koordinaten z. B. des Punktes E $0 + 0 + 2 \cdot 12 - d = 0$ $d = 24$ $\rightarrow$ x + 2z - 24 = 0 **Neigungswinkel der Ebene** mithilfe des Skalarproduktes der Vektoren $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{\eta}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{\eta} \circ \vec{\eta}_{xy} = \lvert\vec{\eta}\rvert \cdot \lvert\vec{\eta}_{xy}\rvert \cdot \cos\sphericalangle\left(\vec{\eta}, \vec{\eta}_{xy}\right)$ $\cos\sphericalangle\left(\vec{\eta}_{EFGH}, \vec{\eta}_{xy}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\sphericalangle\left(\vec{\eta}_{EFGH}, \vec{\eta}_{xy}\right) = 26{,}56°$	1 1 1 1 1	

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
2.4	**Prüfen der Aussagen** $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$		
	alle Vektoren sind gleich lang	1	
	$\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{GH}$ und $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{HE}$	1	
	Winkel zwischen zwei Vektoren $\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FG} = -4 \neq 0$	1	
	Viereck EFGH ist ein Parallelogramm (C), ein Rhombus (A), kein Quadrat (B)	1	
	Flächeninhalt Viereck EFGH $A = \left\| \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{FG} \right\|$	1	
	$A = 16\sqrt{5} \approx 35{,}78\,\text{FE}$	1	
2.5	**Eckpunkte** linker unterer Eckpunkt: $Q(3 \mid 1 \mid 7{,}5)$,	1	
	rechter oberer Eckpunkt: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{BC} \qquad \left\| r \cdot \overrightarrow{BC} \right\| = 2{,}83 \Rightarrow \cancel{r_1 = -0{,}5} \wedge r_2 = 0{,}5$ $S(1 \mid 3 \mid 9)$	1	
	rechter unterer Eckpunkt: $R(1 \mid 3 \mid 7{,}5)$	1	
	Kante des Körpers $Q_t \rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \text{für } t = 0 \rightarrow F \\ \text{für } t = 1 \rightarrow G \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{FG}$	1 1	
	Minimale Länge $a(t) = \left\| \overrightarrow{PQ_t} \right\| = \sqrt{3 \cdot \left(12t^2 - 4t + 1\right)}$	1	
	$a'(t_E) = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot (6t_E - 1)}{\sqrt{12{t_E}^2 - 4t_E + 1}} = 0 \rightarrow \qquad t_E = \dfrac{1}{6}$	1	
	$a''\left(\dfrac{1}{6}\right) = 18\sqrt{2} > 0 \Rightarrow \text{Min}$	1	
2.6	**Beschreibung** Zerlegung: Ebene durch DFH → zwei Pyramiden mit trapezförmigen Grundflächen 	2	

Aufgabe A3

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungen</th><th>mögliche BE</th><th>erteilte BE</th></tr>
<tr><td>3.1.1</td><td>
Der Vorgang als Baumdiagramm:



<table>
<tr><th>Stufe 1 - Anschnallpflicht</th><th>Stufe 2 - Geschwindigkeit</th></tr>
<tr><td>a – angeschnallt
n – nicht angeschnallt</td><td>z – zu schnell
v – vorschriftsmäßig</td></tr>
</table>

Pfadregel: $P = 0,97 \cdot 0,9 = 0,873 = 87,3\ \%$
</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.1.2</td><td>

Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B

Bernoulli-Experiment
$n = 372$
Ereignis A:
Ω = {zulässige Geschwindigkeit wird eingehalten;
zulässige Geschwindigkeit wird nicht eingehalten}.
$p = 0,9;\ k = 335$

$$P(A) = B_{372;\,0,9}(335) = \binom{372}{335} \cdot 0,9^{335} \cdot 0,1^{37} = 0,0689$$

Ereignis B:
Ω = {Fahrzeugführer ist nicht angeschnallt;
Fahrzeugführer ist angeschnallt }
$p = 0,03;\ \ k = \{12;\ 13;\ \ldots;\ 371;\ 372\}$

$$P(B) = 1 - F_{372;\,0,03}(11)$$

$$P(B) = 1 - \sum_{k=0}^{11}\left(\binom{372}{k} \cdot 0,03^{k} \cdot 0,97^{372-k}\right) = 0,440$$

Angabe der Höhe der zu erwartenden Einnahmen

$E = n \cdot p = 372 \cdot 0,03 = 11,16$

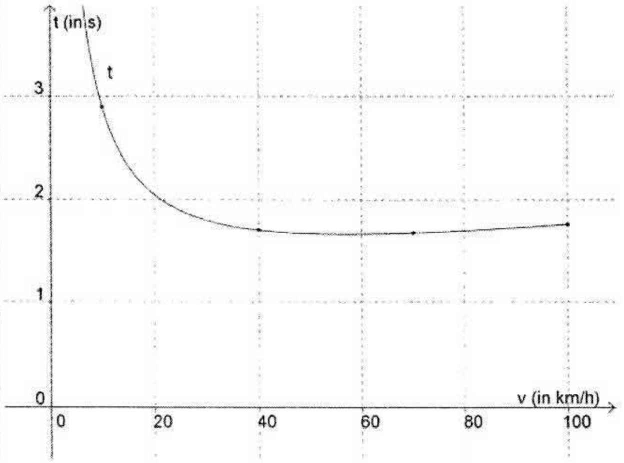
Erwartete Einnahmen = $11,16 \cdot 30\ € = 334,80\ €$
</td><td>2

2

2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.1.3</td><td>

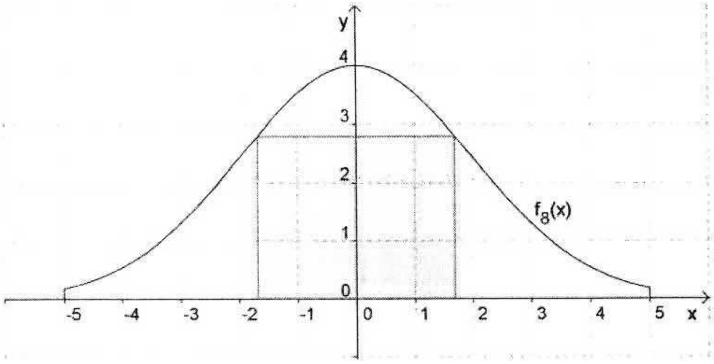
Äußerung zur Gültigkeit der Annahmen

Bernoullikette
→ Wahrscheinlichkeit konstant
Information im Rundfunk
→ einige Fahrzeugführer ändern ihr Fahrverhalten
→ Änderung der Wahrscheinlichkeit
→ keine Bernoullikette mehr
</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
3.2	**Gleichung für den Sicherheitsabstand** Gleichungssystem, Data-Matrix-Editor, ... $s(v)=1{,}52\cdot 10^{-3}v^2+0{,}286v+0{,}500$	2	
	Berechnung des Sicherheitsabstandes $s\ (60)\ =\ 1{,}52\cdot 10^{-3}\cdot 60^2+0{,}286\cdot 60+0{,}5=23{,}13$	1	
	Berechnung der Geschwindigkeit $25=1{,}52\cdot 10^{-3}v^2+0{,}286v+0{,}5$ $\Rightarrow v_1=63{,}94 \qquad v_2=-252{,}1$ (entfällt wegen $v<0$)	2	
	Graph von t(v) 	2	
	Geschwindigkeit, für minimale Taktzeit $t'(v)=\dfrac{0{,}0055\cdot\left(v^2-3289\right)}{v^2} \quad\wedge\quad t''(v)=\dfrac{36}{v^3}$	1	
	notw. Bed.: $t'(v_E)=0$ $v_{E1}=57{,}35 \quad\wedge\quad v_{E2}=-57{,}35$ (entfällt wegen $v<0$)	2	
	hinr. Bed.: $t''(57{,}35)=0{,}0002>0 \quad\Rightarrow\quad$ Minimum	1	
	Ermittlung der Anzahl der Fahrzeuge minimale Taktzeit: $t\ (57{,}35)=1{,}657$	1	
	Anzahl der Fahrzeuge: $\dfrac{60}{1{,}66}=36{,}1$	1	
	Begründung Die berechnete Geschwindigkeit von 57 km/h liegt knapp unterhalb der festgelegten Geschwindigkeitsbegrenzung auf 60 km/h. Somit ist die Geschwindigkeitsbegrenzung nicht für eventuell auftretende Staus verantwortlich.	2	

Aufgabe B1

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
1.1	**Ableitungen:**		
	$f_k'(x) = -x \cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$	1	
	$f_k''(x) = \left(\frac{2x^2}{k} - 1\right) \cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$	1	
	$f_k'''(x) = \frac{-2x\left(2x^2 - 3k\right)}{k^2} \cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$		
	Extrempunkte:		
	$f_k'(x_E) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 0 \wedge f_k(0) = \frac{k}{2}$	2	
	$f_k''(0) = -1 \Rightarrow$ Hochpunkt $\Rightarrow \quad H\left(0 \,\middle\vert\, \frac{k}{2}\right)$	1	
	Wendepunkte:		
	$f_k''(x_W) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = \pm\frac{\sqrt{2k}}{2} \wedge f_k\left(\pm\frac{\sqrt{2k}}{2}\right) = \frac{k}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	1	
	$\Rightarrow \quad W_{1;2}\left(\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2k} \,\middle\vert\, \frac{k}{2\cdot\sqrt{e}}\right)$	1	
	Ortskurve:		
	$x = \pm\frac{\sqrt{2k}}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 2x^2$	1	
	$y = \frac{k}{2}e^{-\frac{1}{2}} \quad \left(k = 2x^2\right)$		
	$y = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot x^2$	1	
1.2	**Umfang der Fläche**		
	$u_k = \text{arcLen}\left(f_k(x), x, a_k, b_k\right) + \text{arcLen}\left(w(x), x, a_k, b_k\right) > 16$	2	
	$k = 1 \quad u_1 = 3{,}05\,\text{LE}$		
	$k = 2 \quad u_2 = 4{,}59\,\text{LE}$		
	$k = 5 \quad u_5 = 8{,}39\,\text{LE}$	2	
	$k = 10 \quad u_{10} = 14{,}03\,\text{LE}$		
	$k = 11 \quad u_{11} = 15{,}12\,\text{LE}$		
	$k = 12 \quad u_{12} = 16{,}20\,\text{LE}$		
	$k = 15 \quad u_{15} = 19{,}41\,\text{LE}$		
	Für k = 12 ist der Umfang erstmals größer als 16 LE.	1	

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungen</th><th>mögliche BE</th><th>erteilte BE</th></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Skizze

</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Maße des Fensters
Zielfunktion: $A(a,b) = a \cdot b$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Nebenbedingung:
$a = 2 \cdot x$ (Fenster liegt symmetrisch zur y – Achse)
$b = f_8(x)$ $(b \geq 2,50)$
$A(x) = \frac{8x}{e^{\frac{x^2}{8}}}$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Mindesthöhe: $f_8(x) \geq 2,50 \quad \Rightarrow \quad -1,94 \leq x \leq 1,94$
$D_A : 0 \leq x \leq 1,94$
$A'(x) = \left(8 - 2x^2\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$
$A'(x_E) = 0$
$x_E = \pm 2$
$\Rightarrow \quad x = 1,94$.</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Breite a = 3,88 m, Höhe von b = 2,50 m.</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe B2

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
2.1	**Größter Radius in der Mitte** $r_a = \sqrt{\lambda \frac{a\cdot(d-a)}{d}}$ $r_a' = \frac{-(2a-d)\cdot\lambda}{2\cdot\sqrt{\frac{-a\cdot(a-d)\cdot\lambda}{d}}\cdot d}$ $\quad r_a'' = \frac{d\cdot\lambda}{4a\cdot(a-d)\cdot\sqrt{\frac{-a\cdot(a-d)\cdot\lambda}{d}}}$ Notw. Bed.: $r_a' = 0 \quad \Rightarrow \quad r_a = \frac{d}{2}$ $r''_a\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{-2\lambda}{d\cdot\sqrt{d\cdot\lambda}} < 0$ (wegen λ und d > 0) $\Rightarrow$ Max	1 2 1	
2.2.1	**Aufstellen der Geradengleichung** z. B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 25 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -700 - 800 \\ 1000 - 200 \\ 20 - 25 \end{pmatrix}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 25 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1500 \\ 800 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 1$	$(\vec{x})$ 2 (t) 1	
2.2.2	**Maximaler Radius** $d = \left\lvert\begin{pmatrix} -1500 \\ 800 \\ -5 \end{pmatrix}\right\rvert = 1700 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{2} = 850$ $r_a(850) = \sqrt{0{,}125\cdot\frac{850\cdot(1700-850)}{1700}} = 7{,}29$ Der maximale Radius der ersten Fresnelzone beträgt 7,29 m. **Überprüfung höchster Punkt des Hindernisses innerhalb der Fresnelzone** Abstand $= a(t) = \left\lvert \vec{g} - \begin{pmatrix} 45 \\ 590 \\ 22 \end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 755-1500\,t \\ 800\,t-390 \\ 3-5\,t \end{pmatrix}\right\rvert$ $a(t) = \sqrt{2890025\,t^2 - 2889030\,t + 722134}$ $a'(t_E) = 0 \Rightarrow t_E = 0{,}5$	2 1 1 1 1	

Aufgabe	Lösungen	mögliche BE	erteilte BE
	Punkt P auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 25 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -1500 \\ 800 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 600 \\ 22,5 \end{pmatrix}$	1	
	Abstand vom höchstem Punkt des Hindernisses zum Punkt P $\left\| \begin{pmatrix} 50 \\ 600 \\ 22,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 590 \\ 22 \end{pmatrix} \right\| = 11,20$ 11,20 m > 7,29 m Der höchste Punkt des Hindernisses liegt außerhalb der Fresnelzone und verursacht keine Sendestörungen.	1	
	Alternativ: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 590 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 755 \\ -390 \\ 3 \end{pmatrix}$ Abstand: $d = \frac{\left\| \vec{v} \times \vec{r}_g \right\|}{\left\| \vec{r}_g \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 755 \\ -390 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1500 \\ 800 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -1500 \\ 800 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|} = 11,19$ *Hinweis: Tiefere Punkte des Hindernisses haben wegen 22,5 > 22 einen noch größeren Abstand.*		
2.3	**Beurteilung des Testergebnisses** n = 5000 Annahmebereich $k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$		
	$P(X \le 7) = \sum_{k=0}^{7} \left(\binom{5000}{k} \cdot 0,001^k \cdot 0,999^{5000-k} \right) = 0,867$	2	
	$P(X \ge 8) = 1 - 0,867 = 0,133 = 13,3\% > 5\%$	2	
	Der Ablehnungsbereich ist zu groß gewählt. Die Annahme ist nicht gerechtfertigt.	1	