Mecklenburg-Vorpommern

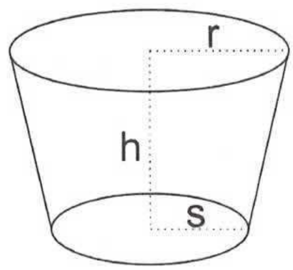
Zentralabitur 2011

Mathematik mit CAS

Aufgaben

A1 Analysis

1.1 Ein Körper soll ein Volumen von 875 VE und die Form eines geraden Kegelstumpfes haben. Die Grundfläche hat den Radius s = 4 LE und die Deckfläche hat den Radius r.
Die Höhe h lässt sich bei diesem konstanten Volumen als Funktion in Abhängigkeit von r durch die folgende Gleichung beschreiben:



Skizze nicht maßstäblich

$$h(r) = \frac{2625}{\pi \cdot (r^2 + 4r + 16)} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}, \quad r > 4.$$

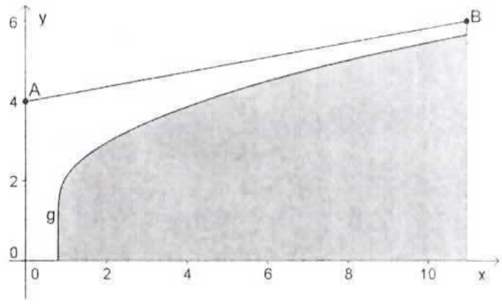
1.1.1 Berechnen Sie aus dem Intervall $5 \leq r \leq 13$ fünf Funktionswerte und stellen Sie damit den Graph der Funktion h in diesem Intervall dar.

1.1.2 Beschreiben Sie die Veränderungen der Form des Kegelstumpfes in Abhängigkeit von r, wenn r sich dem Wert vier nähert bzw. sehr groß wird.

1.2 Kerzenwachs wird manchmal in Glasbehälter gefüllt.

Nachfolgend gilt: 1 LE entspricht 1 cm.

Die äußere Form der Glasbehälter kann durch die Rotation des Teilstücks des Graphen einer linearen Funktion vom Punkt $A(0\,|\,4)$ bis $B(11\,|\,6)$ um die x-Achse beschrieben werden.



Die innere Form der Glasbehälter kann durch die Rotation des Teilstücks des Graphen einer Funktion g im Intervall $0{,}8 \leq x \leq 11$ um die x-Achse beschrieben werden. Eine Gleichung der Funktion g lautet: $g(x) = 2{,}3 \cdot \sqrt[8]{x^3 - 0{,}8^3}$, $x \in D_f$

Die Dichte des Glases beträgt $2{,}2\ \frac{g}{cm^3}$.

Berechnen Sie das Volumen, das maximal mit Wachs gefüllt werden kann.

Berechnen Sie die Masse eines leeren Glases.

1.3 Gegeben ist eine Funktionenschar $f_a(x)$ durch die Gleichung

$$f_a(x) = \frac{2625}{\pi \cdot (x^2 + 4x + a)} \quad \text{mit } x \in D_f;\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$ Ihre Graphen heißen F_a.

Entscheiden Sie, ob die Graphen F_a Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen besitzen. Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an.

Für $a \neq 4$ hat jeder Graph F_a genau einen Hochpunkt. Berechnen Sie seine Koordinaten.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl der Polstellen von f_a.

A 2 Analytische Geometrie

2 Ein ebenflächig begrenzter Körper K hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Eckpunkte mit den Koordinaten $A(0 \mid -4 \mid 0)$, $B(4 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 4 \mid 0)$, $D(-4 \mid 0 \mid 0)$, $E(0 \mid -4 \mid 12)$, $F(4 \mid 0 \mid 10)$, $G(0 \mid 4 \mid 12)$ und $H(-4 \mid 0 \mid 14)$.

2.1 Stellen Sie K in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

2.2 Begründen Sie, dass die Grundfläche ABCD des Körpers in der xy-Ebene liegt.

2.3 Geben Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene ε an, in der das Viereck EFGH liegt. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene ε bezüglich der xy-Ebene.

2.4 Prüfen Sie, welche der folgenden Aussagen zutreffen.

(A): Das Viereck EFGH ist ein Rhombus
(B): Das Viereck EFGH ist ein Quadrat
(C): Das Viereck EFGH ist ein Parallelogramm

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks EFGH.

2.5 Der Körper K ist das Modell eines Gebäudes. In der Fläche BCGF gibt es ein Fenster mit folgenden Eigenschaften. Zwei Kanten des Fensters sind parallel zu BC. Das rechteckige Fenster hat die Breite von 2,83 LE und die Höhe von 1,50 LE. Der linke obere Eckpunkt hat die Koordinaten $P(3 \mid 1 \mid 9)$.

Geben Sie die Koordinaten der weiteren Eckpunkte des Fensters an.
Bestimmen Sie, welche Kante des Körpers K durch die Menge der Punkte $Q_t(4-4t \mid 4t \mid 10+2t)$ mit $0 \le t \le 1$ beschrieben wird.
Ermitteln Sie t so, dass die Länge der Strecke PQ_t minimal wird.

2.6 Der Fußboden des Dachraumes liegt in einer zur Grundfläche parallelen Ebene, die den Punkt F enthält.
Beschreiben Sie eine geeignete Möglichkeit, das Volumen des Dachraumes zu berechnen.

A3 Analysis und Stochastik

3.1 Bei einer Verkehrskontrolle werden die Geschwindigkeit sowie die Einhaltung der Anschnallpflicht der Fahrzeugführer kontrolliert. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass 3% der Fahrzeugführer nicht angeschnallt sind sowie 10% die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreiten. Beide Vergehen treten unabhängig voneinander auf. Ein Fahrzeug ist vorschriftsmäßig unterwegs, wenn sein Fahrzeugführer angeschnallt ist und die zulässige Geschwindigkeit einhält. Insgesamt werden 372 Fahrzeuge überprüft.

3.1.1 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug die Kontrollstelle vorschriftsmäßig passiert.

3.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B, wenn man davon ausgeht, dass die Kontrollen als Bernoullikette aufgefasst werden können.

(A) Bei dieser Kontrolle halten genau 335 Fahrzeugführer die zulässige Geschwindigkeit ein.

(B) Bei dieser Kontrolle sind mehr als 11 Fahrzeugführer nicht angeschnallt.

Das Nichtanlegen des Sicherheitsgurtes wird mit 30,00 € bestraft.
Geben Sie an, in welcher Höhe Einnahmen hinsichtlich der Anschnallpflicht bei dieser Kontrolle zu erwarten sind.

3.1.3 Über diese Verkehrskontrolle wird im Rundfunk informiert. Äußern Sie sich, welche Bedeutung dies für die Betrachtung der Kontrolle als Bernoullikette hat.

3.2 In einer Baustelle ist die Geschwindigkeit auf 60 km/h begrenzt.
Es soll überprüft werden, ob durch diese Geschwindigkeitsbegrenzung Staus entstehen. Dazu soll ermittelt werden, wie viele Fahrzeuge pro Minute in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in den Baustellenbereich einfahren können.

Für den theoretischen Sicherheitsabstand zwischen zwei mit der Geschwindigkeit v (in km/h) fahrenden Fahrzeuge gelten folgende Werte:

v in km/h	50	75	100
Sicherheitsabstand s in m	18,6	30,5	44,3

Ermitteln Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion s(v), die den Sicherheitsabstand s in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v beschreibt.

(Zur Kontrolle: $s(v) = 1{,}52 \cdot 10^{-3} v^2 + 0{,}286 v + 0{,}500$)

Die Aufgabe wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

Berechnen Sie den Sicherheitsabstand für eine Geschwindigkeit von 60 km/h sowie die Geschwindigkeit, für die der Sicherheitsabstand 25 m beträgt.

Die Zeit, die vergeht, bis das nächste Auto in die Baustelle einfahren kann, wird als Taktzeit bezeichnet. Für die Taktzeit gilt: $t(v) = \frac{3{,}6 \cdot (4{,}5 + s(v))}{v}$.
(t in s, v in km/h)

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion t für $0 < v \leq 100$.

Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, für die die Taktzeit minimal ist.
Ermitteln Sie, wie viele Fahrzeuge pro Minute in den Baustellenbereich einfahren können.
Begründen Sie, dass entsprechend dieser Modellannahmen die Geschwindigkeitsbegrenzung nicht die Ursache für eventuell auftretende Staus sein kann.

B1 Analysis

1 Gegeben ist eine Funktionenschar mit der Gleichung

$$f_k(x) = \frac{k}{2\,e^{\frac{x^2}{k}}} \text{ mit } k \in \mathbb{R}, k > 0.$$ Ihre Graphen heißen G_k.

1.1 Berechnen Sie Lage und Art der Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen G_k.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte der Graphen G_k.

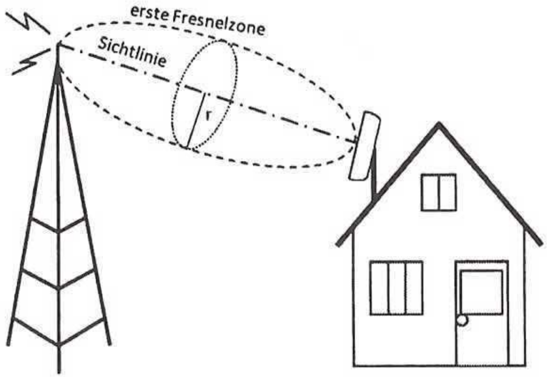
1.2 Nun gilt als weitere Einschränkung $k \in \mathbb{N}$.

Der Graph der Funktion w mit der Gleichung $w(x) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ schneidet die Graphen G_k jeweils an den Stellen $a_k = -\frac{\sqrt{2k}}{2}$ und $b_k = \frac{\sqrt{2k}}{2}$.
Für jedes k schließt der jeweilige Graph G_k mit dem Graphen von w eine Fläche ein.
Mit größer werdendem k wird der Umfang dieser Fläche größer.
Ermitteln Sie, ab welchem Wert von k der Umfang dieser Fläche größer als 16 LE ist.

1.3 Ein Architektenbüro entwirft einen dem Stadtbild angepassten Giebel eines Hauses.
In einem Koordinatensystem wird der Giebel durch den Graphen G_8, die Geraden mit den Gleichungen $x = -5$ bzw. $x = 5$ sowie die x-Achse begrenzt.
In diesen Giebel soll für ein Atelier ein möglichst großes rechteckiges Fenster eingebaut werden. Dieses Fenster liegt symmetrisch zur y-Achse und mit der Unterkante auf der x-Achse. Das Fenster soll mindestens eine Höhe von 2,50 m aufweisen (1 LE = 1 m).

Fertigen Sie eine Skizze an.
Bestimmen Sie die Maße des Fensters.

B2 Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik



2 Die Richtfunktechnik ist eine Möglichkeit der Datenübertragung, die heute besonders in Mobilfunknetzen eingesetzt wird. Notwendig zur effektiven Verwendung dieser Technik ist ein hindernisfreier Raum zwischen den Antennen des Senders und Empfängers. Zusätzlich zur hindernisfreien Sichtlinie zwischen den beiden Antennen muss auch die so genannte erste Fresnelzone frei von Hindernissen sein. Die erste Fresnelzone ist ein gedachter Rotationskörper mit der direkten Sichtlinie als Rotationsachse.

Die Größe des Rotationsradius um einen Punkt der Sichtlinie, der den Abstand a von der Sendeantenne hat, kann mithilfe der Gleichung

$r_a = \sqrt{\lambda \dfrac{a \cdot (d-a)}{d}}$ bestimmt werden. Dabei ist d die Länge der Sichtlinie zwischen Sender und Empfänger und λ die Wellenlänge der verwendeten Strahlung.

2.1 Zeigen Sie durch Berechnung, dass der Radius r_a genau in der Mitte zwischen den Antennen am größten ist.

2.2 Ein konkreter Fall wird in einem kartesischen Koordinatensystem betrachtet. Die Empfangsantenne befindet sich im Punkt $(800 \mid 200 \mid 25)$. Der Fußpunkt des Mastes mit der Sendeantenne hat die Koordinaten $(-700 \mid 1000 \mid 0)$. Die Sendeantenne ist in einer Höhe von 20 m angebracht (1 LE = 1 m). Es werden Wellen mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}125\ \text{m}$ verwendet.

2.2.1 Beschreiben Sie die Sichtlinie mithilfe einer Gleichung.

2.2.2 Berechnen Sie den maximalen Radius der ersten Fresnelzone, der sich genau in der Mitte zwischen den beiden Antennen befindet.

Der höchste Punkt eines Hindernisses hat die Koordinaten $(45 \mid 590 \mid 22)$.

Prüfen Sie, ob dieser Punkt innerhalb der ersten Fresnelzone liegt und dadurch Sendestörungen verursachen kann.

2.3 Andere Faktoren können auch zu Störungen der übertragenen Signale führen. Durchschnittlich rechnet man mit 0,1% gestörter Signale. In einem Test werden 8 von 5000 übertragenen Signalen ungenau empfangen, d. h. die Übertragungen wurden gestört. Daraufhin wird angenommen, dass der Anteil der gestörten Signale höher sei. Beurteilen Sie diese Annahme unter Berücksichtigung einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.