Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2011

Mathematik ohne CAS

Aufgaben

Name, Vorname: ....

Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1–3 des Arbeitsblattes)

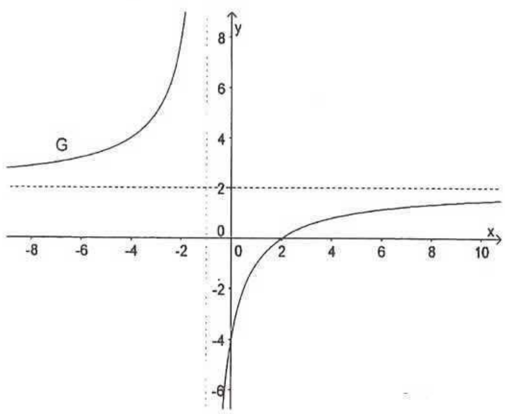
Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

1 Analysis

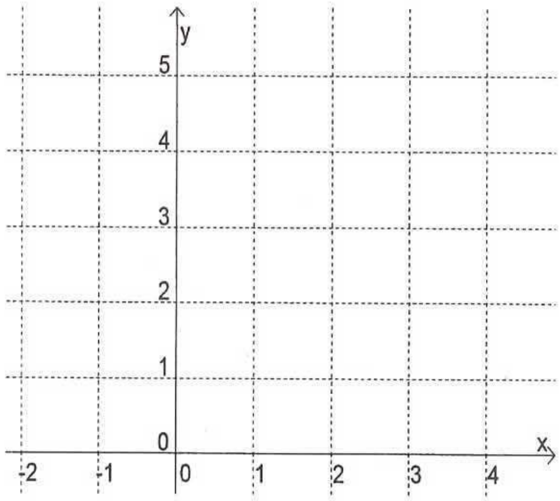
1.1 Gegeben ist der Graph G einer Funktion f.
Begründen Sie anhand von 3 Eigenschaften, dass die folgende Funktionsgleichung diesem Graphen zuzuordnen ist.

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$$



1.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Untersuchen Sie, ob die Funktion an der Stelle x = 1 einen Grenzwert besitzt.



1.3 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x^2 - 4x + a$.

- Berechnen Sie für die Graphen von f_a jeweils den Extrempunkt und begründen Sie, dass keiner der Graphen von f_a Wendepunkte besitzt.

- Geben Sie ein a an, so dass die Funktion f_a keine Nullstelle besitzt.

- Geben Sie ein a an, so dass die Funktion f_a zwei ganzzahlige Nullstellen besitzt.

1.4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6x^2 - 2x$.

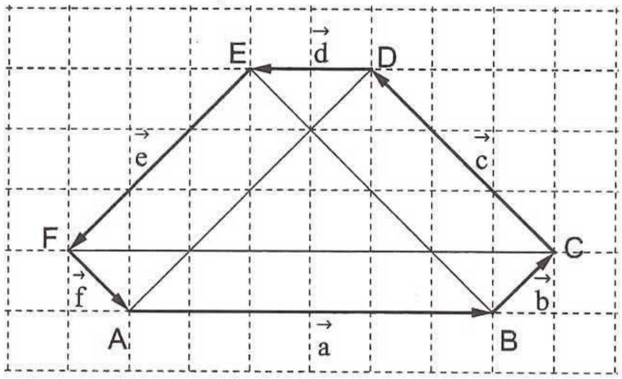
- Berechnen Sie $\int_0^2 (6x^2 - 2x)\,dx$.

- Geben Sie die Menge aller Stammfunktionen von f an.

- Berechnen Sie den Anstieg einer Stammfunktion von f an der Stelle x = 1.

2 Analytische Geometrie

2.1 In dem Sechseck ABCDEF sind je 3 Strecken (Seiten bzw. Diagonalen) parallel.
Geben Sie jeweils für den Vektor $\vec{x}$ einen Repräsentanten an.



- $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$
- $\vec{x} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$
- $\vec{x} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{e}$

2.2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z+2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie z so, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

2.3 Gegeben sind Punkte $A(6 \mid 2 \mid -4)$ und $K(2 \mid 0 \mid 8)$. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und Punkt K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B.

3 Stochastik

Peter feiert mit 4 Freunden Geburtstag. Ein Gratulant schenkt ihm ein einfaches Schloss, dass nur 3 Stellen mit jeweils den Ziffern 0 und 1 hat.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Einstellungen

A: Alle Stellen zeigen dieselbe Ziffer

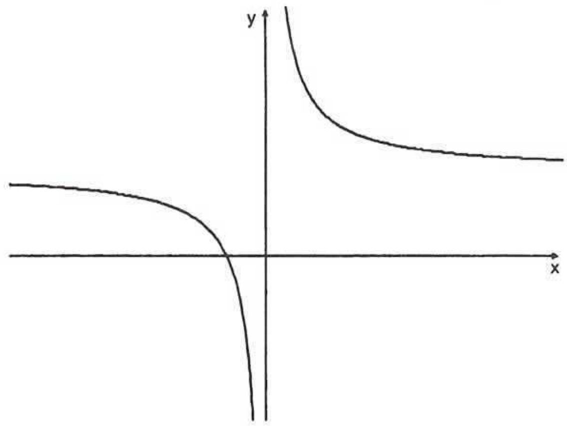
B: Es ist mindestes zweimal die Ziffer 1 dabei.

A1 Analysis (25 BE)

Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

Der Graph von f ist K.



1.1 Berechnen Sie die Nullstelle von f.
Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

1.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass K keine Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt.

1.3 An den Graphen K wird durch den Punkt $P(1 \mid f(1))$ eine Tangente t gelegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung von t.
Der Graph von t schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

1.4 Die Geraden $x = 1$, $x = 8$, die x-Achse und der Graph K schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt.
Geben Sie die benötigte Stammfunktion an.

1.5 Auf K existiert ein Punkt $Q(r \mid f(r))$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Durch Q werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt. Diese Parallelen und die Koordinatenachsen bilden ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Q so, dass der Umfang des Rechtecks minimal wird.
Berechnen Sie den minimalen Umfang.

1.6 Gegeben ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = x + 1$ und eine Funktionenschar f_b durch die Gleichung

$$f_b(x) = \frac{2x+b}{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Kurvenschar ist K_b.
Für genau eine Kurve der Schar K_b ist die Gerade g eine Tangente dieser Kurve.
Bestimmen Sie den Wert für b und die Koordinaten des Berührungspunktes.

A2 Analytische Geometrie (25 BE)

Die Punkte A(7 | 2 | −3), B(−1 | 4 | −1), C(−1 | −2 | 5), D(7 | −3 | 2) und S(−1 | 1 | 7) bestimmen als Eckpunkte eine Pyramide.

2.1 Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem dar.

2.2 Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene ε an, in der das Viereck ABCD liegt.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene ε mit der xy-Ebene einschließt.

2.3 Untersuchen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:

- Die Gerade g durch S und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ verläuft durch den Punkt P(3 | 3 | 2).
- Das Viereck ABCD ist ein Trapez mit mindestens einem rechten Innenwinkel.

2.4 Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilpyramiden mit den Eckpunkten ABCS und ACDS.

2.5 Zeigen Sie, dass es auf der z-Achse keinen Punkt Q gibt, für den gilt:
Winkel $\sphericalangle AQD = 90°$.

A3 Analysis und Stochastik (25 BE)

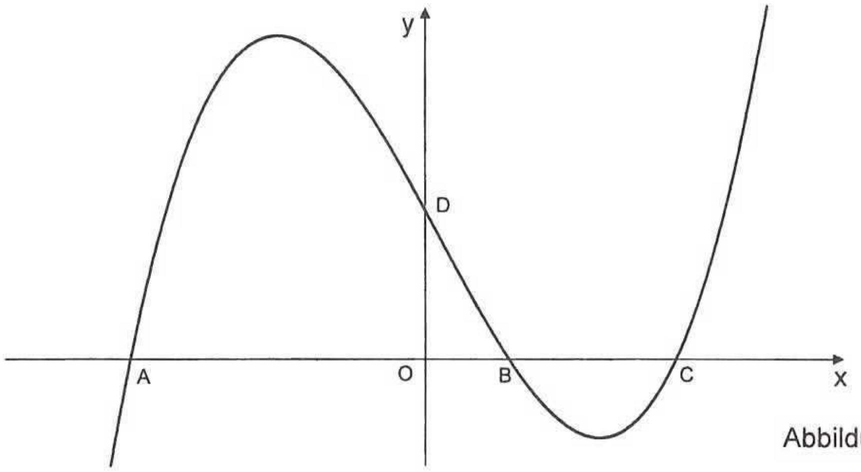


Abbildung nicht maßstäblich

3.1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = (x-1)\cdot(2x^2 + x - 21) \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f besitzt die drei Schnittpunkte A, B und C mit der x-Achse. Der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse ist D (siehe Abbildung).

3.1.1 Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte A, B, C und D.

3.1.2 Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktion die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

3.1.3 Der Koordinatenursprung O sowie die Punkte B und D bilden ein Dreieck mit dem Flächeninhalt A. Dieser Flächeninhalt A entspricht näherungsweise dem Inhalt I der Fläche unter dem Graphen von f über dem Intervall $0 \le x \le 1$.
Berechnen Sie, um wie viel Prozent A von I abweicht.
Geben Sie die benötigte Stammfunktion an.

3.1.4 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und D.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte, in denen Parallelen zu g den Graphen von f berühren.

3.2 Es werden Funktionen $f(x) = (x-r)\cdot(2x^2 + x - s)$, $x \in \mathbb{R}$ gebildet, wobei für r die natürlichen Zahlen von 1 bis 11 und für s die natürlichen Zahlen von 1 bis 23 eingesetzt werden dürfen.

3.2.1 Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Funktionsgleichungen auf diese Weise maximal gebildet werden können.

3.2.2 Es werden zufällig je ein Wert für r und s aus den angegebenen Bereichen gewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

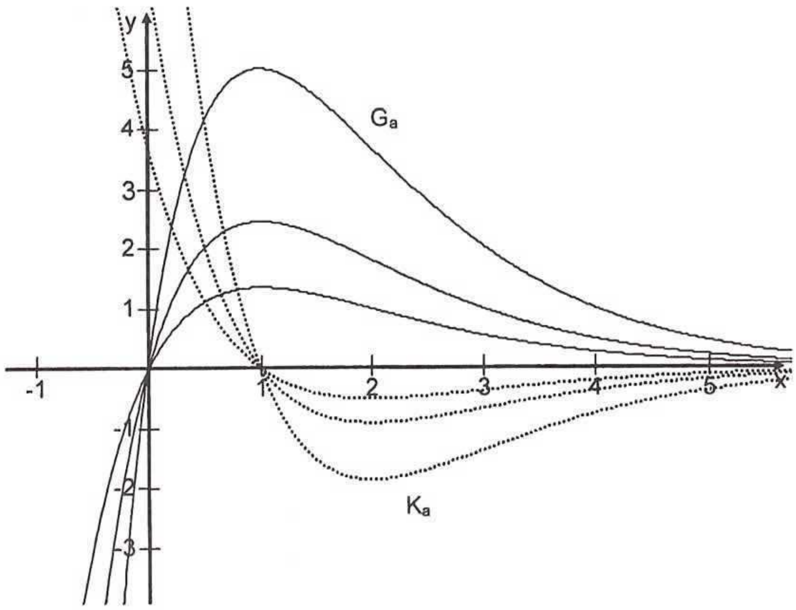
- r und s sind jeweils ungerade Zahlen.
- Entweder nur r oder nur s ist eine ungerade Zahl.

B1 Analysis (20 BE)

Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$$f_a(x) = \frac{1}{a}x \cdot e^{a-x} \text{ mit } x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Die zugehörige Kurvenschar ist G_a.
Die Kurvenschar der ersten Ableitungsfunktion f_a' ist K_a.



1.1 Zeigen Sie, dass $f_a'(x) = \frac{1}{a}e^{a-x} \cdot (1-x)$ die erste Ableitungsfunktion von f_a ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von G_a in Abhängigkeit von a.
Weisen Sie die Art des Extremums mit Hilfe der Ableitungsfunktion nach.

1.2 Zeigen Sie, dass G_a und K_a genau einen Punkt P_a gemeinsam haben.
Berechnen Sie die Koordinaten von P_a.

1.3 Die Gerade x = 2 schneidet G_a und K_a in jeweils genau einen Punkt.
Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Abstand der Punkte minimal wird.
Geben Sie die minimale Streckenlänge an.

1.4 K_a und die Koordinatenachsen schließen für a > 0 eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a.

1.5 G_a schneidet die x-Achse im Punkt A. Die Tangente an G_a im Punkt $C_a(a \mid f(a))$ schneidet die x-Achse im Punkt B_a.
Ermitteln Sie den Wert von a so, dass das Dreieck AB_aC_a mit der Basis $\overline{AB_a}$ gleichschenklig ist.

B2 Analytische Geometrie und Stochastik (20 BE)

2.1 Die Punkte $A(7 \mid 2 \mid -3)$, $B(-1 \mid 4 \mid -1)$, $C(-1 \mid -2 \mid 5)$, $D(7 \mid -3 \mid 2)$ und $S(-1 \mid 1 \mid 7)$ bestimmen als Eckpunkte eine Pyramide.

2.1.1 Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ und $\overline{CS}$ liegen in einer Ebene ε.
Die Strecke $\overline{DS}$ schneidet ε im Punkt E.
Bestimmen Sie die Koordinaten von E.

2.1.2 Zeigen Sie, dass die Punkte $P(-3 \mid -9{,}5 \mid 9)$ und $Q(0 \mid 8{,}5 \mid 9)$ in verschiedenen Halbräumen bezüglich ε liegen.

2.1.3 Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen der Ebene ε und der Ebene durch die Punkte A, D und S.

2.1.4 Es werden Pyramiden $ABCDS_r$ mit den Spitzen $S_r(-1 \mid 1 \mid r)$ mit $r \in \mathbb{R}$ gebildet.
Der Abstand von S_r zur Geraden BC wird mit d bezeichnet.
Ermitteln Sie die beiden Werte von r, für die gilt: $d = \sqrt{18}$ LE.

2.2 Einem Großhändler für Spielzeug wird der Kauf einer größeren Menge von Holzpyramiden zu günstigen Konditionen angeboten.
Die Anzahl der defekten Pyramiden wird als binomialverteilt angenommen.

2.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Stichprobe von 10 Pyramiden genau 2 beschädigt sind, wenn der Anteil der beschädigten Pyramiden 5 % beträgt.

2.2.2 Der Hersteller garantiert für derartige Pyramiden eine Ausschussquote von höchstens 5 %. Der Händler prüft 20 zufällig ausgewählte Pyramiden.
Entscheiden Sie, ob man bei einem Signifikanzniveau von 4 % der Behauptung des Herstellers zustimmen kann, wenn mehr als 3 der ausgewählten Pyramiden defekt sind.

Tabelle der Binomialverteilung (Summenfunktion) für n = 20 und p = 0,05

k	0	1	2	3	4	5	6
$F_{20;\,0,05}(k)$	0,3585	0,7358	0,9245	0,9841	0,9974	0,9997	1