Abiturprüfung Leistungskurs 1999/2000

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen

PAETEC

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer:

Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Maier (Sachsen-Anhalt)
Dr. Eva-Maria Westerhoff (Thüringen)

1. Auflage

Internet: www.paetec.de

Redaktion: Dr. Hubert Bossek
Layout: Marlen Bossek, Thilo Krüger, Tino Mai
Umschlaggestaltung: Birgit Kintzel
Druck: Saale-Druck Naumburg GmbH

ISBN 3-89517-277-4

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die in den zentralen Abiturprüfungen des Schuljahrs 1999/2000 für Mathematik-Leistungskurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen gestellt wurden.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung wie auch der Beachtung der reformierten Rechtschreibung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren. Aus Platzgründen war es erforderlich, mitunter „fortlaufende“ Gleichungen oder „Schlussketten“ zu verwenden. Das Zeichen „$\Rightarrow$“ wird dabei als Abkürzung für „daraus folgt“, „daraus ergibt sich“ u. Ä. genutzt, also nicht allein zur Kennzeichnung einer Implikation im strengen Sinne.

Der PAETEC Verlag für Bildungsmedien hofft, auch mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahr gewiss interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, Oktober 2000

Abiturprüfung
Leistungskurs

1999 / 2000

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweise:

- Die Schüler erhielten zwei Aufgabenblöcke, bestehend aus Pflicht- und Wahlteil, von denen einer auszuwählen war. Der Pflichtteil war vollständig, von den Wahlaufgaben waren zwei zu bearbeiten.
- Zur Aufgabenauswahl stand den Schülern eine Zeit von 30 Minuten zur Verfügung, die reine Arbeitszeit betrug 300 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel waren:
  Tafelwerk; nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner; Zeichengeräte; Duden (Rechtschreibung)

Aufgabe P1: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind $A(3|-2|3)$, $B(5|2|-1)$, $C(1|6|1)$ und $S(13|7|11)$ die Eckpunkte einer Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S.

1.1 Zeichnen Sie die Pyramide in ein kartesisches Koordinatensystem.
Weisen Sie nach, dass A, B und C die Eckpunkte eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks sind.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

1.2 Auf der vom Punkt B ausgehenden Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC liegt der Punkt $P(3|y_p|z_p)$. Berechnen Sie y_p und z_p.
Prüfen Sie, ob die Strecke $\overline{PS}$ Höhe der Pyramide ist.

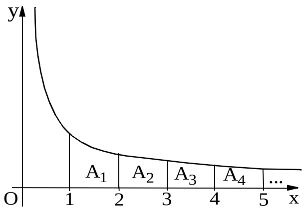
1.3 Die Kante $\overline{AB}$ der Pyramide schneidet die x-z-Ebene des Koordinatensystems im Punkt Q. Geben Sie die Koordinaten des Punktes Q an.

Aufgabe P2: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
Der zugehörige Graph sei G.

2.1 Berechnen Sie einige Funktionswerte f(x) für $0{,}5 \leq x \leq 5$ und skizzieren Sie G.

2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung für die Normale n an den Graphen G durch $P(4|f(4))$. Die Gerade $x = 1$, der Graph G und die Normale n begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen sie den Inhalt dieser Fläche.



2.3 Zwischen dem Graphen G und der x-Achse werden Flächenstreifen der Breite 1 gebildet (vgl. Abbildung). Die Maßzahlen A_1, A_2, ... der Inhalte dieser Flächen bilden eine Folge (A_n).

2.3.1 Geben Sie für die Folge (A_n) und die Partialsummenfolge (S_n) je ein explizites Bildungsgesetz an.

2.3.2 Für welche Werte von n ist S_n kleiner als 30?

Aufgabe P3: Stochastik

3.1 Bei der Herstellung bunter magnetischer Figuren zur Haftung auf metallischen Untergründen treten unabhängig voneinander Fehler in der Farbgebung und Fehler in der Haftfähigkeit auf. Die Wahrscheinlichkeit für einen Farbfehler beträgt 5 %, für Fehler in der Haftfähigkeit liegt sie bei 2 %. Weitere Fehler treten nicht auf.

3.1.1 Eine Figur wird zufällig der Produktion entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Die Figur hat sowohl einen Farbfehler als auch einen Haftungsfehler.
B: Die Figur ist fehlerfrei.

3.1.2 Ein Abnehmer prüft 10 zufällig der Produktion entnommene Figuren.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Figur fehlerhaft ist.

3.1.3 Wie viele Figuren müsste man mindestens prüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von von mindestens 99 % mindestens eine fehlerhafte Figur zu finden?

3.2 Eine andere Firma, die auch solche Figuren herstellt, beziffert den Anteil fehlerfreier Figuren in ihrer Produktion auf mindestens 96 %. Bei einer Qualitätskontrolle werden der laufenden Produktion 50 Figuren entnommen und auf Fehler untersucht. Geben Sie den Ablehnungsbereich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % an.

Binomialverteilung (Summenfunktion)

$F_{n;p}(k) = B_{n;p}(0) + ... + B_{n;p}(k)$

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5	
50	0	0,3642	2181	1299	0769	0052	0001	0000	0000	0000	0000	0000	49
	1	7358	5553	4005	2794	0338	0012	0002	0000	0000	0000	0000	48
	2	9216	8108	6767	5405	1117	0066	0013	0000	0000	0000	0000	47
	3	9822	9372	8609	7604	2503	0238	0057	0000	0000	0000	0000	46
	4	9968	9832	9510	8964	4312	0643	0185	0002	0000	0000	0000	45
	5	9995	9963	9856	9622	6161	1388	0480	0007	0001	0000	0000	44
	6	9999	9993	9964	9882	7702	2506	1034	0025	0005	0000	0000	43
	7		9999	9992	9968	8779	3911	1904	0073	0017	0000	0000	42
	8			9999	9992	9421	5421	3073	0183	0050	0002	0000	41
	9				9998	9755	6830	4437	0402	0127	0008	0000	40
	10					9906	7986	5836	0789	0284	0022	0000	39
	11					9968	8827	7107	1390	0570	0057	0000	38
	12					9990	9373	8139	2229	1035	0133	0002	37
	13					9997	9693	8894	3279	1715	0280	0005	36
	14					9999	9862	9393	4468	2612	0540	0013	35
	15						9943	9692	5692	3690	0955	0033	34
	16						99789	9856	6839	4868	1561	0077	33
	17						9992	9937	7822	6046	2369	0164	32
	18						9998	9975	8594	7126	3356	0325	31
	19						9999	9991	9152	8036	4465	0595	30
	20							9997	9522	8741	5610	1013	29
	21							9999	9749	9244	6701	1611	28
	22								9877	9576	7660	2399	27
	23								9944	9778	8438	3359	26
	24								9976	9892	9022	4439	25
	25								9991	9951	9427	5561	24
	26								9997	9979	9686	6641	23
	27								9999	9992	9840	7601	22
	28									9997	9924	8389	21
	29									9999	9960	8987	20
		0,98	0,97	0,96	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,50	k

p

Nicht ausgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei $p \geq 0{,}5$ gilt:
$F_{n;p}(k) = 1 -$ abgelesener Wert

Aufgabe A4: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch die Gleichung

$$f_a(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2(x-4)}\ , x \in \mathbb{R}, x \neq 4, a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Der zu f_a gehörige Graph sei G_a.

4.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen.
Ermitteln Sie das Verhalten von f_a im Unendlichen und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_a an.

4.2 Für welche Werte von a besitzen die Graphen G_a Extrempunkte?
Zeigen Sie, dass kein Graph G_a einen Wendepunkt hat.

4.3 Skizzieren Sie G_3 und die Asymptoten dieses Graphen mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem.

4.4 Die x-Achse und G_3 begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

4.5 Für jeden Wert x, $x > 4$ sind die Punkte $A(4|\ 0)$, $B(x|\ 0)$ und $C(x|\ f_3(x))$ Eckpunkte eines Dreiecks. Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks sei h(x).
Zeigen Sie, dass die Funktion h für $x > 4$ kein lokales Extremum hat.

Aufgabe A5: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch

$$f_a(x) = x^2(a - \ln x),\ x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ a \in \mathbb{R},\ a \geq 0.$$

Der zu f_a gehörige Graph sei G_a.

5.1 Berechnen Sie von G_a die Koordiaten der Schnittpunkte mit der x-Achse und die der Extrempunkte.
Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a einen Wendepunkt hat.

5.2 Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte der Schar auf einer Parabel liegen.

5.3 Skizzieren Sie G_1 und G_2 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

5.4 Um eine Flächenberechnung vorzunehmen, wird f_2 durch eine quadratische Funktion p mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ angenähert.
Dabei sollen die Punkte O(0| 0), E(4,5| 10) und N(7,5| 0) Punkte des Graphen von p sein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt, der vom Graphen von p und der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe A6: Geometrie

Gegeben sind ein dreiseitiges Prisma ABCDEF durch die Eckpunkte A(12| 0| 0), B(12| 6| 0), C(0| 6| 0), D(0| 0| 0), E(12| 0| 3), F(0| 0| 3) sowie die Gerade g durch die Punkte G(6| 8| 5) und H(6| 6| 3).

6.1 Stellen Sie das Prisma ABCDEF und die Gerade g in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

6.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene BCFE.

6.3 Berechnen Sie den Abstand des Punktes G von der Geraden EF.

6.4 Gegeben ist eine Ebenenschar ε_k durch die Gleichung $x + ky = 12$, $k \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass alle Ebenen dieser Schar durch A und E gehen.
Genau eine Ebene dieser Schar verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Bestimmen Sie den Wert von k für diese Ebene.

6.5 Auf der Strecke $\overline{BC}$ liegt ein Punkt $P(x_p| 6| 0)$, so dass das Volumen der dreiseitigen Pyramide PBDF genau 9 Volumeneinheiten beträgt.
Berechnen Sie x_p.

Aufgabe B4: Analysis

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit der Gleichung
$y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ besitzt die lokalen Extrempunkte E_1, E_2, E_3 und an der Stelle x = 0 eine Tangente t mit der Gleichung y = 4x + 5.
Gegeben sind: $E_1(-1| 1)$, $E_2(2| f(2))$

4.1 Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c, d, e mithilfe obiger Bedingungen.
(Zur Kontrolle: $y = f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$)

4.2 Bestimmen Sie die Koordinaten von E_3 und die aller Wendepunkte des Graphen von f. Begründen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen hat. Skizzieren Sie den Graphen von f.

4.3 Der Graph von f und die Gerade durch die Minimumpunkte begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

4.4 Die Gerade y = 5 schneidet den Graphen von f außer in $P_1(0|\,5)$ und $P_2(1|\,5)$ in zwei weiteren Punkten. Berechnen Sie Abszissen dieser beiden Punkte.

Aufgabe B5: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch

$y = f_a(x) = xe^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. G_a sei der zu f_a gehörige Graph.

5.1 Berechnen Sie die Koordiaten der Extrem- und Wendepunkte von G_a. Skizzieren Sie die Graphen $G_{0,5}$ und $G_{0,25}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

5.2 Zeigen Sie, dass der Anstieg von f_a an der Stelle 0 von a unabhängig ist.

5.3 Beweisen Sie, dass F_a mit $F_a(x) = \frac{-1}{a} e^{-ax} \left(x + \frac{1}{a}\right)$ eine Stammfunktion von f_a ist.
Der Graph G_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = z, z > 0, schließen eine Fläche mit dem Inhalt A(z) ein. Berechnen Sie $\lim\limits_{z \to \infty} A(z)$.

5.4 Die Punkte $O(0|\,0)$, $P(u|\,0)$, $Q(u|\,f_a(u))$ und $R(0|\,f_a(u))$, u > 0, sind Eckpunkte eines Rechtecks. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q so, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.

Aufgabe B6: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine Ebene ε_1 durch die Punkte $A(1|\,{-2}|\,3)$, $B(6|\,3|\,{-2})$ und $C(0|\,6|\,1)$,

eine Gerade g mit der Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

und eine Gerade h durch die Punkte $P(7|\,2|\,7)$ und $Q(-11|\,-1|\,-8)$ gegeben.

6.1 Ermitteln Sie für die Ebene ε_1 eine Koordinatengleichung.
Die Ebene ε_1 schneidet die y-z-Ebene des Koordinatensystems in der Geraden s. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade s an. Stellen Sie das Dreieck ABC und die Gerade s in ein und demselben Koordinatensystem dar.

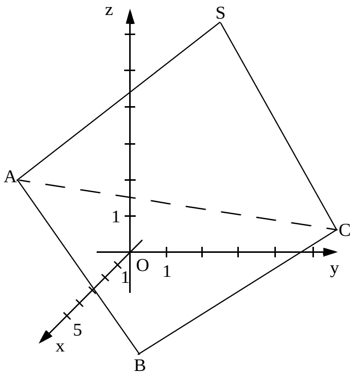
6.2 Die Geraden g und h schneiden einander in einem Punkt S.
Zeigen Sie, dass S in der Ebene ε_1 liegt.

6.3 Prüfen Sie, ob die Geraden g und h symmetrisch bezüglich ε_1 liegen.

6.4 Die Ebene ε_2 verläuft durch den Punkt $A(1|\,-2|\,3)$ und senkrecht zur Geraden g. Ermitteln Sie eine Gleichung für ε_2. Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene ε_2.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1: Geometrie

1.1



Behauptung:
(1) △ ABC ist rechtwinklig
(2) △ ABC ist gleichschenklig

Nachweis:

zu (1): $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 + 16 - 8 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, d. h. △ ABC ist rechtwinklig.

zu (2): $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$, d. h. △ ABC ist gleichschenklig.

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ FE

1.2 Die Seitenhalbierende verläuft durch den Punkt B(5| 2| –1) und den Mittelpunkt M der Dreiecksseite $\overline{AC}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow M(2|\,2|\,2)$$

$$g_{BM}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Da $P(3|\,y_p|\,z_p) \in g_{BM}$ folgt $\begin{pmatrix} 3 \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

I $\quad 3 = 5 - 3t$
II $\quad y_p = 2$
III $\quad z_p = -1 + 3t \qquad \Rightarrow t = \frac{2}{3}$; $y_p = 2$; $z_p = 1$ und P(3| 2| 1)

$\overline{PS}$ ist Höhe der Pyramide, wenn $\overline{PS} \perp \triangle$ ABC, d. h., wenn

$\overrightarrow{PS} = r(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC})\cdot$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} = (8+16)i - (4-16)j + (8+16)k = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{5}{12} \Rightarrow \overline{PS} \perp \triangle ABC,$$

d. h. $\overline{PS}$ ist Höhe der Pyramide ABCS.

1.3 Da sich x-y-Ebene und $g_{\overline{AB}}$ im Punkt Q schneiden, gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}; 0 \le r \le 1$$

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2r \\ 0 &= -2 + 4r \\ z &= 3 - 4r \end{aligned} \qquad \Rightarrow r = \frac{1}{2};\ x = 4;\ z = 1 \text{ und } Q(4|\ 0|\ 1)$$

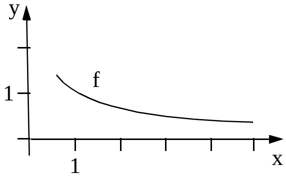
Bewertungsvorschlag:

1.1 Darstellung	2 BE
Nachweise	4 BE
Flächeninhalt	1 BE
1.2 Koordinaten y_p, z_p	3 BE
Überprüfung	3 BE
1.3 Koordinaten des Punktes Q	2 BE
	15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P2: Analysis

2.1

x	0,5	1	2	4	5
f(x)	≈1,4	1	≈0,7	0,5	0,45



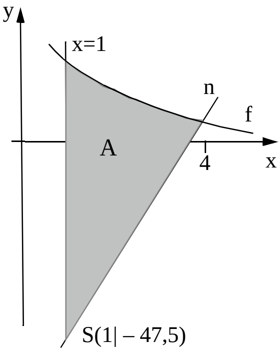
2.2 Normale n an den Graphen G durch P(4| f(4)):

$f'(x)) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ $\qquad f'(4) = -\frac{1}{2\sqrt{64}} = -\frac{1}{16}$

Anstieg der Tangente t in P: $m = -\frac{1}{16}$

Anstieg der Normale n in P: $\overline{m} = -\frac{1}{m} = 16$

Gleichung für n in P(4| 0,5): $0{,}5 = 16 \cdot 4 + b \Rightarrow y = 16x - 63{,}5$



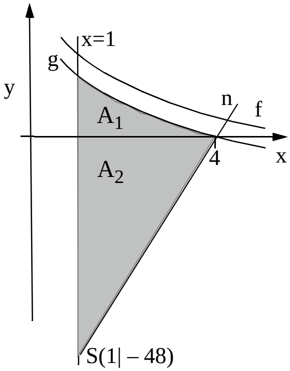
Flächeninhalt A:

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - (16x - 63{,}5)\right)dx$$

$$= [2\sqrt{x} - 8x^2 + 63{,}5x]_1^4$$

$$= 130 - 57{,}5 = 72{,}5 \quad \Rightarrow \quad A = 72{,}5 \text{ FE}$$

Lösungsvarianten:
Durch Verschiebung von f und n und/oder Zerlegung der Fläche in Teilflächen sind mehrere Lösungswege denkbar.
Z. B.:
Normale n und der Graph von f schneiden einander im Punkt P(4| 0,5).
Normale n und Gerade x = 1 schneiden einander im Punkt S, seine Ordinate erhält man durch
$y = 16 \cdot 1 - 63{,}5 = -47{,}5 \Rightarrow S(1| -47{,}5)$
Durch Verschieben von f und n um – 0,5 in y-Richtung erhält man nebenstehendes Bild. Es gilt : $g(x) = f(x) - 0{,}5 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 0{,}5$



Es folgt: $A_1 = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 0{,}5\right)dx$

$= [2\sqrt{x} - 0{,}5x]_1^4 = 4 - 2 - (2 - 0{,}5) = 0{,}5 \Rightarrow A_1 = 0{,}5$ FE

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 3 = 72 \qquad \Rightarrow A_2 = 72$ FE

Zu berechnender Flächeninhalt: $A = A_1 + A_2 = 72{,}5$ FE

2.3.1 $A_1 = [2\sqrt{x}\,]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

$A_2 = [2\sqrt{x}\,]_2^3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$A_3 = [2\sqrt{x}\,]_3^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{4} - \sqrt{3})$

$\vdots$

$A_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (Explizites Bildungsgesetz für A_n)

$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$
$= 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})]$

Nach Auflösen der Klammern und Zusammenfassen erhält man:
$S_n = 2(\sqrt{n+1} - 1)$ (Explizites Bildungsgesetz für S_n)

Lösungsvariante:

$$A_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}\,]_n^{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$S_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}\,]_1^{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2 = 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

2.3.2 Aus $S_n = 2(\sqrt{n+1} - 1) < 30$ folgt $\sqrt{n+1} < 16$ und $n < 255$.

Bewertungsvorschlag:

2.1	Funktionswerte, Skizze	3 BE
2.2	Normale	3 BE
	Flächeninhalt	5 BE
2.3.1	Bildungsgesetz für A_n und S_n	4 BE
2.3.2	Wert für n	3 BE
		18 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P3: Stochastik

3.1.1 Mit F: „Figur hat Farbfehler“ und P(F) = 0,05 bzw. H: „Figur hat Haftfehler“ und P(H) = 0,02 folgen:

$P(A) = P(F \cap H) = P(F) \cdot P(H) = 0{,}05 \cdot 0{,}02 = 0{,}001$

$P(B) = P(\overline{F} \cap \overline{H}) = (1 - P(F)) \cdot (1 - P(H)) = 0{,}95 \cdot 0{,}98 = 0{,}931$

3.1.2 X: „Anzahl der fehlerfreien Figuren“

X ist B(10/ (1 – 0,931))-verteilt

P(mindestens eine Figur fehlerhaft) = P(X ≥ 1)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,069^{0}(1 - 0,069)^{10-0}$$
$$= 1 - 0,931^{10} \approx 0,51$$

3.1.3 Y: „Anzahl der fehlerhaften Figuren“

Y ist B(n/ (1 – 0,931))-verteilt

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0,99$

$$0,01 \geq P(Y = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0,069^{0}(1 - 0,069)^{n} = 0,931^{n}$$
$$\lg 0,01 \geq n \lg 0,931$$

$n \geq 64,4 \Rightarrow$ Es sind mindestens 65 Figuren zu prüfen.

3.2 A: „Ablehnungsbereich von H“;

B: „Befürwortungsbereich von H“

A von H B von H

$$B_{50;\,0,96}(X \leq k) = B_{50;\,0,96}(X \geq 50 - k) \leq 0,05$$
$$1 - B_{50;\,0,96}(X \leq 50 - k - 1) \leq 0,05$$
$$B_{50;\,0,96}(X \leq 50 - k - 1) \geq 0,95$$

Aus der Tabelle der normierten Binomialverteilung folgt

$50 - k - 1 \geq 4$, also $k \leq 45$.

Der Ablehnungsbereich von H beträgt bei einer 5 %igen Signifikanz

A = {0; 1; 2; ...; 45}, d. h., bei einem Stichprobenumfang von 50 dürfen maximal 45 fehlerfreie Figuren vorhanden sein, um die Hypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % abzulehnen.

Lösungsvariante:

X Anzahl der fehlerhaften Figuren; $X \sim B_{(n;p)}$

H_0: $p_0 \leq 0,04$ H_1: $p_1 > 0,04$ $n = 50$; $\alpha = 0,05$

$A = \{0; 1; ...; k - 1\}$ $\overline{A} = \{k; ...; 50\}$

$$P_{p0}(X \in \overline{A}) = P_{0,04}(X \geq k) \leq 0,05$$
$$1 - P_{0,04}(X \leq k - 1) \leq 0,05$$
$$P_{0,04}(X \leq k - 1) \geq 0,95 \qquad \Rightarrow k - 1 = 4;\ k = 5$$

d. h. $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ und $\overline{A} = \{5; ...; 50\}$

Bewertungsvorschlag:

3.1.1	Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse A und B	2 BE
3.1.2	P(mindestens eine Figur fehlerhaft)	2 BE
3.1.3	Anzahl der zu prüfenden Figuren	2 BE
3.1.4	Ablehnungsbereich	2 BE
		8 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

4.1 Schnittpunkte:

G_a mit der x-Achse: $0 = \frac{x}{2} + \frac{a}{2(x-4)}$

$\Rightarrow 0 = x(x-4) + a$, also $0 = x^2 - 4x + a$

$\Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-a}$ und $P_1(2 + \sqrt{4-a} \mid 0)$, $P_2(2 - \sqrt{4-a} \mid 0)$

G_a mit der y-Achse: $0 = \frac{0}{2} + \frac{a}{2(0-4)} = \frac{-a}{8}$ $\Rightarrow P_3(0 \mid \frac{-a}{8})$

Verhalten von f_a im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{2(x-4)}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + a}{2x - 8} = \pm\infty$$

Gleichungen der Asymptoten von G_a:

(1) $(x^2 - 4x + a) : (2x - 8) = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2x-8}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

$-(x^2 - 4x)$

$0 + a$

(2) Polasymptote: $2x - 8 = 0$ $\Rightarrow y = 4$

4.2 x_E ist Extremstelle, wenn $f_a'(x_E) = 0$ und $f_a''(x_E) \neq 0$:

$$f_a'(x) = \frac{(2x-4)(2x-8) - (x^2 - 4x + a)2}{(2x-8)^2} = \frac{2x^2 - 16x + 32 - 2a}{(2x-8)^2}$$

$f_a'(x_E) = 0 \Leftrightarrow 2x_E^2 - 16x_E + 32 - 2a = 0$ und $(2x_E^2 - 8)^2 \neq 0$

Aus $2x_E^2 - 16x_E + 32 - 2a = 0$ folgt $x_E^2 - 8x_E + 16 - a = 0$.

$\Rightarrow$ $x_{E1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16 + a} = 4 \pm \sqrt{a}$.

Außerdem gilt für $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ $(2(4 - \sqrt{a})^2 - 8)^2 \neq 0$ und $(2(4 - \sqrt{a})^2 - 8)^2 \neq 0$.

Die Graphen G_a besitzen demzufolge für $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ Extrempunkte.

Nachweis, dass kein Graph G_a einen Wendepunkt besitzt:

x_w ist Wendestelle von f_a, wenn $f_a''(x_w) = 0$ und $f_a'''(x_w) \neq 0$.

$$f_a''(x) = \frac{(4x-16)(2x-8)^2 - (2x^2 - 16x + 32 - 2a)2(2x-8)2}{(2x-8)^4}$$

$$= \frac{4a}{(2x-8)^3}$$

$f_a''(x_W) = 0 \Leftrightarrow 4a = 0$ und $(2x_W - 8)^3 \neq 0$

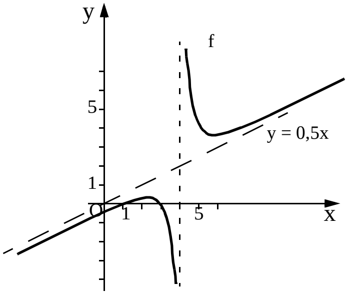
Da die Gleichung $4a = 0$ für $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ keine Lösung hat, besitzt keiner der Graphen G_a einen Wendepunkt; die Behauptung wurde damit bestätigt.

4.3 Wertetabelle und Graph von G_3:

x	– 1	0	1	2,27
$f_3(x)$	– 0,8	≈–0,38	0	≈0,27

x	3	3,5	4	4,5
$f_3(x)$	0	– 1,25	-	5,25

x	5	5,73	8
$f_3(x)$	4	≈3,74	≈4,35



4.4 Flächeninhalt:

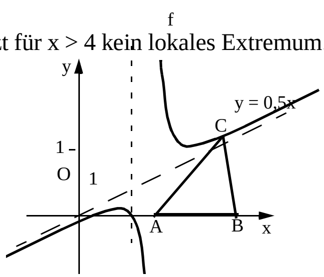
$$\int_1^3 f_3(x)dx = \int_1^3 \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 8}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 4}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(x + \frac{3}{x - 4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + 3\ln|x - 4|\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 3\ln 3\right) = 2 - \frac{3}{2}\ln 3 \approx 0{,}352$$

Der Flächeninhalt beträgt annähernd 0,352 FE.

4.5 Zu zeigen ist: Der Flächeninhalt h(x) besitzt für x > 4 kein lokales Extremum.
Skizze:

A(4| 0)
B(x| 0)
C(x| f_3(x))



$$h(x) = \frac{1}{2}(x - 4) \cdot f_3(x) = \frac{1}{2}(x - 4)\frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 8} = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3)$$

$$h'(x) = \frac{1}{4}(2x - 4); \qquad h'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Damit ist gezeigt, dass h(x) nur an der Stelle x = 2 ein lokales Extrema haben kann; für x > 4 kann h(x) demzufolge kein lokales Extremum besitzen.

Bewertungsvorschlag:

4.1	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	3 BE
	Verhalten im Unendlichen	1 BE
	Asymptoten	1 BE
4.2	Wert für a	2 BE
	Nachweis, dass keine Wendepunkte	3 BE
4.3	Skizze	3 BE
4.4	Flächeninhalt	3 BE
4.5	Nachweis, dass kein lokales Extremum	3 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A5: Analysis

5.1 Schnittpunkte mit der x-Achse: $0 = x^2(a - \ln x)$

Wegen x > 0 folgt: $0 = a - \ln x$

$\ln x = a \quad \Rightarrow x = e^a$ und $P_x(e^a | 0)$

Extrempunkte von G_a:

$f_a'(x) = 2x(a - \ln x) + x^2(-\frac{1}{x}) = x(2a - 2\ln x - 1)$

$f_a''(x) = (2a - 2\ln x - 1) + x(-\frac{2}{x}) = -2\ln x + 2a - 3$

$f_a'(x) = 0$: $x(2a - 2\ln x - 1) = 0$

Wegen x > 0 folgt $2a - 2\ln x - 1 = 0$

$\ln x = a - \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{a-0,5}$

$f_a''(e^{a-0,5}) = -2(a - \frac{1}{2}) + 2a - 3 = -2 < 0$

$f_a(e^{a-0,5}) \quad = e^{2a-1}(a - a + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} e^{2a-1} \qquad \Rightarrow P_{max}(e^{a-0,5} | \frac{1}{2} e^{2a-1})$

Wendepunkte:

$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\ln x + 2a + 3 = 0$

$\ln x = a - 1,5 \qquad \Rightarrow x = e^{a-1,5}$

$f_a'''(x) = \frac{-2}{x} \neq 0$ für alle x, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Damit ist gezeigt, dass jeder Graph G_a einen Wendepunkt besitzt:

$f_a(e^{a-1,5}) = e^{2a-3}(a - a + 1,5) = 1,5e^{2a-3} \qquad \Rightarrow P_W(e^{a-1,5} | 1,5e^{2a-3})$

5.2 Die Extrempunkte haben die Koordinaten $x_E = e^{a-0,5}$ und $y_E = \frac{1}{2} e^{2a-1}$.
Da $y_E = \frac{1}{2} e^{2a-1} = \frac{1}{2} (e^{a-0,5})^2 = \frac{1}{2} x_E^2$, liegen alle Extrempunkte der Kurvenschar auf der Parabel $y_E = \frac{1}{2} x_E^2$.

5.3 Skizzen von G_1 und G_2:

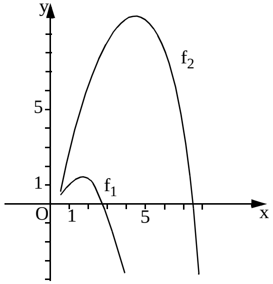
$f_1(x) = x^2(1 - \ln x)$

x	0,5	1	$\sqrt{e} \approx 1{,}65$	2	e	3	4
$f_1(x)$	≈0,4	1	1,36	≈1,2	0	≈– 0,9	≈– 6,2

$f_2(x) = x^2(2 - \ln x)$

x	0,5	1	$\sqrt{e} \approx 1{,}65$	2	3	4
$f_1(x)$	≈0,7	2	4,1	≈5,2	≈8,1	≈9,8

x	$e^{1,5} \approx 4{,}5$	5	6	$e^2 \approx 7{,}4$	8
$f_1(x)$	≈9,95	≈9,8	≈7,5	0	≈– 5,1



5.4 Flächenberechnung:

Die Funktion f ist angenähert durch $p(x) = ax^2 + bx + c$,

wobei O(0| 0), E(4,5| 10)und N(7,5| 0) Punkte des Graphen von p sind.

Bestimmen der Parameter a, b, und c:

Aus O ∈ p folgt: $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \qquad \Rightarrow c = 0$

Aus E, N ∈ p folgt: I. $10 = a \cdot 4{,}5^2 + b \cdot 4{,}5$

$\underline{0 = a \cdot 7{,}5^2 + b \cdot 7{,}5}$

$\Rightarrow b = -\dfrac{a \cdot 7{,}5^2}{7{,}5} = -7{,}5a$

$10 = 20{,}25a + (-7{,}5a)4{,}5 = -13{,}5a \qquad \Rightarrow a = -\dfrac{20}{27}$

$b = -\dfrac{75}{10}\left(-\dfrac{20}{27}\right) = \dfrac{50}{9} \qquad \Rightarrow p(x) = -\dfrac{20}{27}x^2 + \dfrac{50}{9}x$

Ermitteln der Integrationsgrenzen (Nullstellen von p):

$0 = -\dfrac{20}{27}x^2 + \dfrac{50}{9}x \Rightarrow -2x^2 + 15x = 0$

$x(-2x + 15) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \dfrac{15}{2}$

Flächeninhalt:

$$\int_0^{7,5}\left(-\frac{20}{27}x^2 + \frac{50}{9}x\right)dx = \left[-\frac{20}{81}x^3 + \frac{50}{18}x^2\right]_0^{7,5} \approx -104{,}17 + 156{,}25 = 52{,}08$$

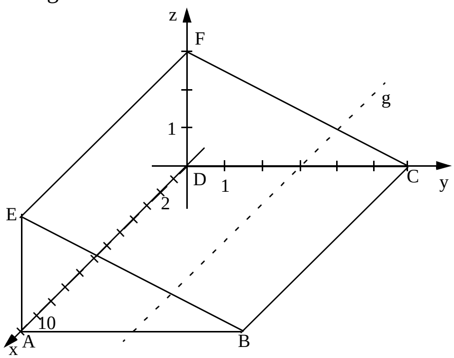
A ≈ 52,1 FE

Bewertungsvorschlag:

5.1	Schnittpunkte	1 BE
	Extrempunkte	4 BE
	Wendepunkte	4 BE
5.2	Nachweis	2 BE
5.3	Skizze	2 BE
5.4	Integrationsgrenzen	4 BE
	Flächeninhalt	2 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A6: Geometrie

6.1 Darstellung des Prismas ABCDEF



6.2 Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene BCFE:

ε_{BCE}: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BE}$; $r,s \in \mathbb{R}$ g_{GH}: $\vec{x} = \overrightarrow{OG} + t\overrightarrow{GH}$; $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}12\\6\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\8\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

Schneiden ε_{BCE} und g_{GH} einander in einem Punkt, so gilt:

(I) $12 - 12r = 6$ $\Rightarrow r = \frac{1}{2}$

(II) $6 - 6s = 8 - 2t$

(III) $3s = 5 - 2t$

(III) – (II): $-6 + 9s = -3$ $\Rightarrow s = \frac{1}{3}$

Aus (III) folgt $3\frac{1}{3} = 5 - 2t \qquad \Rightarrow t = 2$
Das LGS ist eindeutig lösbar, es existiert ein Schnittpunkt.

Koordinaten des Schnittpunktes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten S(6| 4| 1).

Schnittwinkel:
Es gilt $\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{c}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{c}|}$, wobei $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
Richtungsvektoren der Ebene bzw. der Gerade sind.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus $\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0{,}9486$ folgt $\varphi \approx 18{,}45\,°$.

Der Schnittwinkel zwischen ε_{BCE} und g_{GH} beträgt $90\,° - 18{,}45\,° = 71{,}55°$.

6.3 Abstand des Punktes G von der Geraden g_{EF}:

g_{EF}: $\vec{x} = \overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ G(6| 8| 5)

Hilfsebene H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow 0 = (x - 6)12 = 12x - 72$

$g_{EF} \cap H$: $\qquad 0 = 12(12 - 12t) - 72 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Durchstoßpunkt S_D: $\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S_D(6|\,0|\,3)$

Abstand: $\left|\overrightarrow{S_D G}\right| = \sqrt{(6-6)^2 + (8-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{68} \Rightarrow d \approx 8{,}25$ LE

Lösungsvariante:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG}\right|}{\left|\overrightarrow{EF}\right|} = \frac{\left|\begin{bmatrix} i & j & k \\ -12 & 0 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{144}} = \frac{\left|-24\vec{j} - 96\vec{k}\right|}{12} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ -96 \end{pmatrix}\right|}{12}$$

$$d = \frac{(\sqrt{576 + 9216})}{12} \approx 8{,}25\,LE$$

6.4 ε_k: $x + ky = 12$

Mit A(12| 0| 0): $12 + k \cdot 0 = 12$ w. A. $\Rightarrow A \in \varepsilon_k$

Mit E(12| 0| 3): $12 + k \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 12$ w. A. $\Rightarrow E \in \varepsilon_k$

Damit ist gezeigt, dass alle Ebenen ε_k durch die Punkte A und E verlaufen.

Bestimmen der Ebene, die durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ verläuft:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(0|\,3|\,0)$$

Aus ε_k: $x + ky = 12$ folgt mit M(0| 3| 0) $0 + k \cdot 3 = 12$, also $k = 4$,
d.h. die Ebene ε_4 verlauft durch M(0| 3| 0).

6.5 Für das Volumen gilt : $V_p = \frac{1}{3} A_G \cdot h = 9$ VE, $h = 3$ LE , $A_G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DP}\right|$

Mit $\left|\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DP}\right| = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 12 & 6 & 0 \\ x_p & 6 & 0 \end{bmatrix} = (12 \cdot 6 - 6x_p)\,\vec{k} = \sqrt{(72 - 6x_p)^2} = 72 - 6x_p$

folgt: $9 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(72 - 6x_p) \cdot 3 = 36 - 3x_p \qquad \Rightarrow x_p = 9$

Bewertungsvorschlag:

6.1	Darstellung	3 BE
6.2	Koordinaten des Schnittpunktes	3 BE
	Schnittwinkel	3 BE
6.3	Abstand	3 BE
6.4	Nachweis	2 BE
	Wert für k	2 BE
6.5	Volumen	3 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analysis

4.1 Berechnen der Koeffizienten a, b, c, d, e:

t mit $y = 4x + 5$ ist Tangente an der Stelle $x = 0$, d.h. im Punkt P(0| 5).

Daraus folgt für die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$:

(1) $f(0) = 5 \qquad\qquad \Rightarrow e = 5$

(2) $f'(0) = 4$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \qquad \Rightarrow d = 4$

Aus $E_1(-1|\,1)$ folgt:

I $\quad f'(-1) = -4a + 3b - 2c + 4 = 0$ und

II $\quad f(-1) = a - b + c - 4 + 5 = 1$, also $a - b + c = 0$

Aus $E_2(2|\,f(2))$ folgt:

III $\quad f'(2) = 32a + 12b + 4c + 4 = 0$, also $8a + 3b + c + 1 = 0$

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = -4a + 3b - 2c + 4 \\ \text{II} & 0 = a - b + c \\ \text{III} & \underline{0 = 8a + 3b + c + 1} \end{array}$$

$a = b - c$ (aus II) in I und III eingesetzt ergibt:

$$\begin{array}{ll} \text{I'} & 0 = -b + 2c + 4 \\ \text{III'} & \underline{0 = 11b - 7c + 1} \end{array}$$

$11 \cdot \text{I'} + \text{III'}$: $0 = 15c + 45 \qquad \Rightarrow c = -3$

Aus I' und $c = -3$ folgt: $0 = -b - 6 + 4 \qquad \Rightarrow b = -2$

Aus $a = b - c$ folgt: $a = -2 + 3 \qquad \Rightarrow a = 1$

Daraus ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$.

4.2 Koordinaten von E_3:

Der Graph der Funktion f hat die Extrempunkte $E_1(-1|\,1)$, $E_2(2|\,f(2))$ und $E_3(x_{E3}|\,f(x_{E3}))$, d.h., $f'(x)$ hat drei Nullstellen, zwei davon sind bekannt.

Es ist x_{E3} zu ermitteln:

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4; \qquad 0 = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 0 = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

Aus $x_{E1} = -1$ folgt: $(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2) : (x + 1) = 2x^2 - 5x + 2$

$$\begin{array}{l} -\underline{(2x^3 + 2x^2)} \\ \quad -5x^2 - 3x + 2 \\ \quad -\underline{(-5x^2 - 5x)} \\ \qquad\qquad 2x + 2 \\ \qquad\quad -\underline{(2x + 2)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Aus $x_{E2} = 2$ folgt: $(2x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 2x - 1$

$$\begin{array}{l} -\underline{(2x^2 - 4x)} \\ \quad -x + 2 \\ \quad -\underline{(-x + 2)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

x_{E3} ergibt sich aus $0 = 2x_{E3} - 1$: $x_{E3} = \frac{1}{2}$

$f''(x) = 12x^2 - 12x - 6$

$f''(\frac{1}{2}) = -9 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 2 + 5 = \frac{97}{16} \Rightarrow E_3(\frac{1}{2} | \frac{97}{16})$ oder $E_3(0{,}5| 6{,}0625)$

Wendepunkte:

x_w ist Wendestelle von f, wenn (1) $f''(x_w) = 0$ und

(2) $f'''(x_w) \neq 0$.

(1) $f''(x) = 12x^2 - 12x - 6$

$0 = 12x^2 - 12x - 6$

$0 = x^2 - x - \frac{1}{2}$

$x_{W_{1,2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \Rightarrow x_{W_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1{,}37;\quad x_{W_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx -0{,}37$

(2) $f'''(x_{W_1}) = 24(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}) - 12 = 12\sqrt{3} \neq 0$

$f'''(x_{W_2}) = 24(= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}) - 12 = -12\sqrt{3} \neq 0$

$f(x_{W_1}) = (1{,}37)^4 - 2(1{,}37)^3 - 3(1{,}37)^2 + 4(1{,}37) + 5 \approx 3{,}23$

$f(x_{W_2}) = (-0{,}37)^4 - 2(-0{,}37)^3 - 3(-0{,}37)^2 + 4(-0{,}37) + 5 \approx 3{,}23$

Wendepunkte: $W_1(1{,}37| 3{,}23)$; $W_2(-0{,}37| 3{,}23)$

Begründung, dass f keine Nullstellen hat:

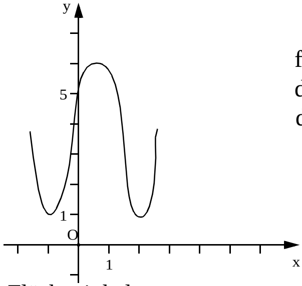
Die Funktion f hat keine Nullstelle, denn

- f ist eine ganzrationale, stetige Funktion,
- der Graph von f hat die Extrempunkte $E_1(-1| 1)$, $E_2(2| 1)$, $E_3(0{,}5| 6)$,
  E_1 ist lokaler Minimumpunkt, denn $f''(-1) = 12 + 12 - 6 = 18 > 0$
  E_2 ist lokaler Minimumpunkt, denn $f''(2) = 48 - 24 - 6 = 18 > 0$
  E_3 ist lokaler Maximumpunkt, denn $f''(0{,}5) = 3 - 6 - 6 = -9 < 0$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)) = \infty$

Der Graph von f befindet sich oberhalb der x-Achse. Es gibt also keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse, d.h. f besitzt keine Nullstellen.

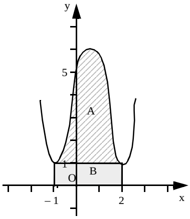
Skizze : $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

x	– 1,5	–1	– 0,37	0	0,5	1	1,37	2	2,5
f(x)	≈4,1	1	≈3,27	5	≈6,0	5	≈3,27	1	≈4,1



$f(0{,}5 + x) = f(0{,}5 - x)$
d.h. f ist eine symmetrische Funktion,
die Symmetrieachse hat die Gleichung $x = 0{,}5$.

4.3 Flächeninhalt:



$$A = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx - B$$

$B = 1 \cdot 3$ FE = 3 FE

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{32}{5} - 8 - 8 + 8 + 10 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + 1 + 2 - 5\right) = 6{,}4 + 2 + 0{,}7 + 2$$

$$= 11{,}1$$

$A = (11{,}1 - 3)$ FE $= 8{,}1$ FE

Lösungsvariante:

$$A = \int_{-1}^{2} (f(x) - 1)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = 6{,}4 - (-1{,}7) = 8{,}1\,(\text{FE})$$

4.4 Abszissen x_3 und x_4:
$y = f(x)$ und $y = 5$ schneiden einander in
$P_1(0|\,5)$, $P_2(1|\,5)$, $P_3(x_3|\,y_3)$ und $P_4(x_4|\,y_4)$

Aus P_2 folgt: $5 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

$$0 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$0 = x(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) \qquad \Rightarrow x_1 = 0$$

Wegen $x_2 = 1$ gilt:
$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 - 3x + 4) :(x - 1) = x^2 - x - 4 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ \quad -x^2 - 3x + 4 \\ \quad \underline{-(-x^2 + x)} \\ \qquad -4x + 4 \\ \qquad \underline{-(-4x + 4)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$x^2 - x - 4 = 0$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx 2{,}56;\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx -1{,}56$$

Bewertungsvorschlag:

4.1	Koeffizienten	5 BE
4.2	Koordinaten von E_3	3 BE
	Wendepunkte	2 BE
	Begründung	1 BE
	Skizze	2 BE
4.3	Flächeninhalt	3 BE
4.4	Abszissen	3 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B5: Analysis

5.1 Extrempunkte:

$f_a'(x) = 1 \cdot e^{-ax} + x(-a)e^{-ax} = e^{-ax}(1 - ax)$

$f_a'(x) = 0$: $\quad e^{-ax}(1 - ax) = 0 \Rightarrow 1 - ax = 0$ (denn $e^{-ax} \neq 0$), also $x = \frac{1}{a}$

$f_a''(x) = -a e^{-ax}(1 - ax) + e^{-ax}(-a) = -a e^{-ax}(2 - ax)$

$f_a''\left(\frac{1}{a}\right) = -a e^{-1}\left(2 - a\frac{1}{a}\right) = -\frac{a}{e} < 0$

$f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} e^{-1} = \frac{1}{ae} \qquad \Rightarrow E_{Max}\left(\frac{1}{a} \,\middle|\, \frac{1}{ae}\right)$

Wendepunkte:

$f_a''(x) = 0$: $\quad -a e^{-ax}(2 - ax) = 0 \Rightarrow 2 - ax = 0$ (denn $-a e^{-ax} \neq 0$), also $x = \frac{2}{a}$

$f_a'''(x) = a^2 e^{-ax}(2 - ax) + (-a e^{-ax}(-a)) = a^2 e^{-ax}(3 - ax)$

$$f_a'''(\frac{2}{a}) = a^2 e^{-a\frac{2}{a}}(3 - a\frac{2}{a}) = \frac{a^2}{e^2} \neq 0$$

$$f_a(\frac{2}{a}) = \frac{2}{a} e^{-2} = \frac{2}{ae^2} \qquad \Rightarrow W(\frac{2}{a} \mid \frac{2}{ae^2})$$

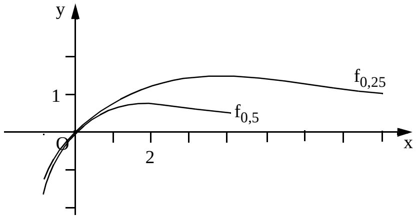
Skizze der Graphen $G_{0,5}$ und $G_{0,25}$:

$f_{0,5}(x) = x\,e^{-0,5x}$

x	– 1	0	1	2	3	4
$f_{0,5}$	– 1,65	0	0,61	0,74	0,67	0,54

$f_{0,25}(x) = x\,e^{-0,25x}$

x	– 1	0	1	2	4	6	8
$f_{0,25}$	– 1,28	0	0,78	1,2	1,47	1,34	1,08



5.2 Aus $f_a'(x) = e^{-ax}(1 - ax)$ folgt $m = f_a'(0) = e^0(1 - 0) = 1$.
Damit ist gezeigt, dass der Anstieg von f_a bei $x = 0$ von a unabhängig ist.

5.3 Behauptung: F_a ist Stammfunktion von f_a, d.h. $F_a' = f_a$

Voraussetzung: $f_a(x) = xe^{-ax}$; $F_a(x) = \frac{-1}{a}e^{-ax}(x + \frac{1}{a})$

Beweis: $[F_a(x)]' = \frac{a}{a}e^{-ax}(x + \frac{1}{a}) + \frac{-1}{a}e^{-ax}\cdot 1 = e^{-ax}(x + \frac{1}{a} - \frac{1}{a}) = e^{-ax}\cdot x = f_a(x)$

w.z.b.w.

Flächeninhalt A(z):

$$A(z) = [F_a(x)]_0^z = [\frac{-1}{a}e^{-ax}(x + \frac{1}{a})]_0^z = -\frac{1}{a}e^{-az}(z + \frac{1}{a}) - (-\frac{1}{a}e^0(0 + \frac{1}{a}))$$

$$= -\frac{z}{ae^{az}} - \frac{1}{a^2e^{az}} + \frac{1}{a^2}$$

$$\lim_{z \to \infty} A(z) = \lim_{z \to \infty}\left(-\frac{z}{ae^{az}} - \frac{1}{a^2e^{az}} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}$$

5.4 Für das Rechteck gilt: $A_R = u \cdot f_a(u)$ mit $f_a(u) = u \cdot e^{-au}$
Daraus ergibt sich die Zielfunktion: $A_R(u) = u \cdot u \cdot e^{-au} = u^2 \cdot e^{-au}$

Untersuchung auf lokales Maximum:
$A_R'(u) = 2ue^{-au} + u^2(-a)e^{-au} = e^{-au}(2u - au^2)$
$A_R'(u) = 0$: $e^{-au}(2u - au^2) = 0$, wenn $2u - au^2 = u(2 - au) = 0$ (denn $e^{-au} \neq 0$)
$\Rightarrow 2 - au = 0$ (denn $u \neq 0$), also $u = \frac{2}{a}$

$A_R''(u) = -a\,e^{-au}(2u - au^2) + e^{-au}(2u - au) = e^{-au}(a^2u^2 - 4au + 2)$

$A_R''(\frac{2}{a}) = e^{-a\frac{2}{a}}(a^2\frac{4}{a^2} - 4a\frac{2}{a} + 2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -\frac{2}{e^2} < 0$

$\Rightarrow u = \frac{2}{a}$ ist lokale Maximumstelle

$f_a(\frac{2}{a}) = \frac{2}{a}\ e^{-a\frac{2}{a}} = \frac{2}{a}e^{-2} = \frac{2}{ae^2}$ $\Rightarrow$ Für den Fall, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird, gilt: $Q(\frac{2}{a} \mid \frac{2}{ae^2})$

Bewertungsvorschlag:

5.1	Extrempunkte	3 BE
	Wendepunkte	3 BE
	Skizze	2 BE
5.2	Nachweis	1 BE
5.3	Beweis	3 BE
	Flächeninhalt, Grenzwert	2 BE
5.4	Koordinaten des Punktes Q	5 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B6: Geometrie

6.1 Koordinatengleichung für ε_1:

ε_1: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

(I) $x = 1 + 5r - s$
(II) $y = -2 + 5r + 8s$
(III) $z = 3 - 5r - 2s$

(I) + (III): $x + y = 4 - 3s$
(II) + (III): $y + z = 1 + 6s$

$2x + 2z + y + z = 9$ $\qquad \Rightarrow \varepsilon_1: 2x + y + 3z - 9 = 0$

Lösungsvariante:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 5 & -5 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} = (-10 + 40)i - (-10 - 5)j + (40 + 5)k = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\varepsilon_1: 2x + y + 3z = 9$

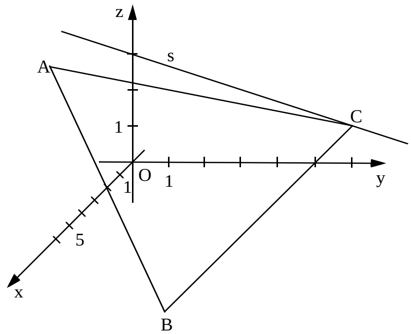
Schnittgerade s:

$\varepsilon_1: 2x + y + 3z - 9 = 0$ $\qquad$ y-z-Ebene: $x = 0$

Mit $x = 0$ folgt aus ε_1: $y + 3z - 9 = 0$ bzw. $z = -\frac{1}{3}y + 3$

oder vektoriell $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Darstellung von Dreieck ABC und Schnittgerade s:



6.2 Schnittpunkt $S = g \cap h$ ermitteln:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}; t \notin \mathbb{R} \quad h: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -18 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix}; r \notin \mathbb{R}$$

$g \cap h$: (I) $3 + 2t = 7 - 18r$

(II) $4 + 3t = 2 - 3r$

(III) $9 + 7t = 7 - 15r$

(I) – 6(II): $21 + 16t = 5$ $\Rightarrow t = -1$

(I) und $t = -1$: $3 - 2 = 7 - 18r$ $\Rightarrow r = \frac{1}{3}$

Den Wert für t bzw. r in die Gleichung für g bzw. h eingesetzt, ergibt die Koordinaten des Schnittpunktes S:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -18 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

also S(1| 1| 2)

Überprüfen, ob $S \in \varepsilon_1$:

S in ε_1 eingesetzt: $2x_s + y_s + 3z_s - 9 = 0$

$2 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 2 - 9 = 0$

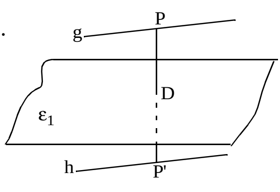
$9 - 9 = 0$ (wahre Aussage) $\Rightarrow$ S liegt in ε_1.

6.3 Aufstellen einer zu ε_1 senkrechten Geraden durch $P(3|\,4|\,9) \in g$:

$P(3|\,4|\,9) \in g$, denn für g gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Aus ε_1: $2x + y + 3z - 9 = 0$

folgt $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{e} \perp \varepsilon_1$.



Eine zu ε_1 senkrechte Gerade durch P: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt D dieser Geraden durch ε_1:

Aus ε_1: $2x + y + 3z = 9$ folgt mit $x = 3 + 2r$, $y = 4 + r$ und $z = 9 + 3r$:

$2(3 + 2r) + (4 + r) + 3(9 + 3r) = 9$

$37 + 14r = 9$ $\Rightarrow r = -2$

$$\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow D(-1|\,2|\,3)$$

Ermitteln eines zu P symmetrisch liegenden Punktes P':

Es gilt: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{PD}$

Mit $\overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, also P'(–5| 0| –3).

Prüfen, ob $P' \in h$:

P'(–5| 0| –3) in h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -18 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix}$ eingesetzt, ergibt:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -5 = 7 - 18r \\ \text{(II)} & 0 = 2 - 3r \\ \text{(III)} & -3 = 7 - 15r \end{array} \quad \Rightarrow r = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I')} & -5 = 7 - 18 \cdot \frac{2}{3} \text{ (wahre Aussage)} \\ \text{(II')} & -3 = 7 - 15 \cdot \frac{2}{3} \text{ (wahre Aussage)} \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass P' auf h liegt; somit liegen die Geraden g und h bezüglich der Ebene ε_1 symmetrisch.

6.4 Gleichung für ε_2:

Mithilfe des Punktes A(1| – 2| 3) und des zu ε_2 senkrecht stehenden Richtungsvektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ der Geraden g erhält man: $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$

Die skalare Multiplikation liefert schließlich eine Koordinatengleichung:

$$2(x-1) + 3(y+2) + 7(z-3) = 0$$
$$2x - 2 + 3y + 6 + 7z - 21 = 0$$
$$2x + 3y + 7z - 17 = 0$$

Abstand des Koordinatenursprungs von ε_2:

$$e = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+9+49}} \right| = \frac{17}{\sqrt{62}} \approx 2{,}16$$

Der Abstand beträgt 2,16 LE.

Bewertungsvorschlag:

6.1	Koordinatengleichung für ε_1	2 BE
	Gleichung für s	2 BE
	Darstellung	2 BE
6.2	Nachweis $S \in \varepsilon_1$	4 BE
6.3	Überprüfung	6 BE
6.4	Gleichung für ε_2; Abstand	3 BE
		19 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1999 / 2000

Gymnasium

Sachsen

Aufgaben

(Ersttermin und Nachtermin)

Aufgabe A1: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist eine Funktion f_a durch

$y = f_a(x) = (a^2 + 1)(\sin ax + \cos ax)$ $\left(x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le \frac{2\pi}{a}\right)$ gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion f_2 die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die Art der Extrema, die Koordinaten der Wendepunkte und den Wertebereich an.
Ermitteln Sie den maximalen Anstieg dieser Funktion.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 6

b) Geben Sie eine Gleichung der Normalen n an den Graph der Funktion $f_{0,5}$ im Schnittpunkt mit der y-Achse an.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f_{0,5}$, der x-Achse und der Geraden n im I. Quadranten eingeschlossen wird.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion f_a im Schnittpunkt mit der y-Achse.
Bestimmen Sie a so, dass der Anstieg der Tangente den Wert 2 hat.
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

Für jedes a wird durch die Koordinatenachsen und den Graph der Funktion f_a im I. Quadranten eine Fläche vollständig begrenzt.

d) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 4

e) Weisen Sie nach, dass es genau ein a gibt, für das der Inhalt dieser Fläche extremal ist.
Ermitteln Sie die Art des Extremums und geben Sie für diesen Fall den Flächeninhalt an.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

Aufgabe A 2: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 2$) ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x+a)(x+2)} \quad (x \in D_{f_a}).$$

a) Ermitteln Sie für die Funktionen f_a den größtmöglichen Definitionsbereich.
Untersuchen Sie die Funktionen f_a für die Fälle $a = 4$ und $a \neq 4$ auf Nullstellen und Polstellen.
Geben Sie diese an.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 6

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f_4 durch die Gleichung

$$y = f_4(x) = x - 4 + \frac{9}{x+2} \quad (x \in D_{f_4})$$ beschrieben werden kann.

Ermitteln Sie eine Gleichung einer Stammfunktion der Funktion f_4.
Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion $\tilde{F}_4$, für die $\tilde{F}_4(-1) = 9$ gilt.
Der Graph der Funktion f_4, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

c) Ermitteln Sie die Polstellen der Funktion f_3.
Begründen Sie ohne Verwendung von Ableitungen, dass die Funktion f_3 im Intervall $-3 < x < -2$ eine lokale Maximumstelle besitzen muss.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

d) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $y = g(x) = x - 3$ Asymptote des Graphen der Funktion f_3 ist.
Jede Gerade mit der Gleichung $x = u$ ($u \in \mathbb{R}$, $u > 0$) schneidet den Graphen der Funktion f_3 im Punkt P_u und den Graphen der Funktion g im Punkt Q_u. Für jedes u bilden die Punkte $R(0; -3)$, P_u und Q_u ein Dreieck.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von u.

Es existiert genau ein Wert u so, dass der Inhalt dieses Dreiecks maximal wird.
Geben Sie diesen Wert u an.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 6

e) Die Funktion p ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Sie hat an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ dieselben Funktionswerte wie die Funktion f_3 und an der Stelle x_1 den Anstieg –13.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p.
Der Graph der Funktion p schließt im I. Quadranten mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

Aufgabe A 3: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = \frac{1}{\ln(tx)}$ $(x \in D_{f_t})$ gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion f_t den größtmöglichen Definitionsbereich an.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 1

b) Für jeden Punkt $P_a(0; a)$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) existieren für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) genau zwei Tangenten an den Graph der Funktion f_t.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Ermittlung der Gleichungen eines solchen Tangentenpaares.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

c) Vom Punkt $P_2(0; 2)$ aus werden zwei Tangenten an den Graph der Funktion f_t gelegt.
Ermitteln Sie je eine Gleichung dieser Tangenten.
Es existiert genau ein Wert t, für den der Schnittwinkel dieser Tangenten extremal wird.
Ermitteln Sie diesen Wert t.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 6

Aufgabe A 4: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Für jedes k ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$) ist eine Funktion f_k gegeben durch
$y = f_k(x) = \frac{x}{k}\sqrt{k^2 - x}$ $(x \in \mathbb{R}, x \le k^2)$. Außerdem ist die zweite Ableitung der Funktion f_k gegeben durch $y'' = f_k''(x) = \frac{-4k^2 + 3x}{4k\sqrt{(k^2 - x)^3}}$ $(x \in \mathbb{R}, x < k^2)$.

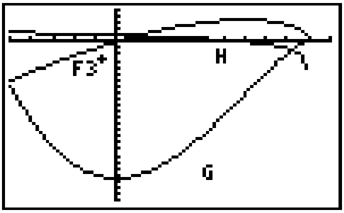
a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graph die lokalen Extrempunkte aller Funktionen f_k liegen und bestimmen Sie für diese Extrempunkte die Art der Extrema.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

b) Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f_3, g mit

$$y = g(x) = -\frac{2}{15}(x+6)\,(9-x)^{\frac{3}{2}} \text{ und h mit } y = h(x) = \frac{18-3x}{6\sqrt{9-x}} \text{ in einem}$$

ausgewählten Bereich. Genau eine der Funktionen g bzw. h ist Stammfunktion der Funktion f_3.

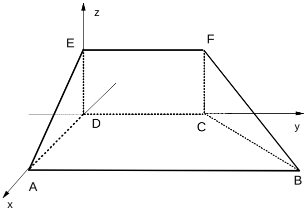


Begründen Sie anhand der Graphen, welche der Funktionen g oder h als Stammfunktion der Funktion f_3 nicht infrage kommt.
Der Graph der Funktion f_3 und die x-Achse begrenzen eine Fläche A vollständig.
Ermitteln Sie den Wert a ($a \in \mathbb{R}$), für den die Gerade x = a diese Fläche halbiert.
Die Fläche A erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.
Prüfen Sie, ob für den ermittelten Wert a das Volumen dieses Rotationskörpers durch die Ebene x = a ebenfalls halbiert wird.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

Aufgabe B 1: Analytische Geometrie / Lineare Algebra

Die Abbildung zeigt die Skizze eines in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellten Werkstückes ABCDEF mit ebenen Begrenzungsflächen. Die Eckpunkte dieses Werkstückes sind durch die Punkte A(4; 0; 0), B(4; 8; 0), C(0; 5; 0), D(0; 0; 0), E(0; 0; 3) und F(0; 5; 3) gegeben.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Weisen Sie nach, dass das Werkstück ABCDEF kein Prisma ist.
Ermitteln Sie den Winkel zwischen den Begrenzungsflächen BCF und ABCD.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 4

b) Zur Herstellung dieses Werkstückes ist unter anderem die Kenntnis des Abstandes d des Eckpunktes A von der Ebene, in der die rechte Begrenzungsfläche BCF liegt, notwendig.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung dieses Abstandes.
Ermitteln Sie den Abstand d.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 4

Von dem Werkstück wird ein Teil mit dem Volumen 10 so abgetrennt, dass das verbleibende Reststück ein Prisma mit der Grundfläche ADE ist.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Deckfläche dieses Prismas liegt.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

d) Dieses Prisma soll parallel zur y-Achse so mit einer Bohrung versehen werden, dass eine allseitige Wanddicke von mindestens 0,5 gewährleistet bleibt.
Berechnen Sie für das größtmögliche Bohrloch die Koordinaten des in der Fläche ADE liegenden Kreismittelpunkts und den Radius der Bohrung.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 4

Aufgabe B 2: Analytische Geometrie / Lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die

Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$ und für jedes t $(t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$ eine

Ebene E_t: $\frac{6}{t}x + 3y + 8tz = 12$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Ebene $E_{\frac{1}{4}}$ mit der Geraden g.
Ermitteln Sie alle Werte t, für die sich die Ebene E_t und die Gerade g im Punkt $S(-3; y_S; z_S)$ $(y_S, z_S \in \mathbb{R})$ schneiden.
Zeigen Sie, dass die Gerade g in keiner der Ebenen E_t liegt.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

b) Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$) schneidet die Ebene E_t die x-Achse im Punkt A_t, die y-Achse im Punkt B und die z-Achse im Punkt C_t.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass für jeden Wert t das Volumen der Pyramide OA_tBC_t gleich ist.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

c) Zeigen Sie, dass die Gerade g parallel zur Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ verläuft und berechnen Sie den Abstand d der Geraden g von dieser Ebene.
Es existiert genau eine Gerade, deren Abstand zur Geraden g und zur Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ jeweils $\frac{1}{2}$ d beträgt.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 4

d) Unter allen t ($t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$) existiert genau ein Wert $\tilde{t}$, sodass die Ebene $E_{\tilde{t}}$ den maximalen Abstand aller Ebenen E_t vom Koordinatenursprung O besitzt.
Ermitteln Sie diesen Wert $\tilde{t}$ und geben Sie den maximalen Abstand an.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

Aufgabe B 3: Analytische Geometrie / Lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1; 2; 1), B(– 1; 5; 2), C(– 3; 1; 3) und $S_t(1 + 2t; 4 + 3t; 2 - 5t)$ ($t \in \mathbb{R}$) gegeben.

a) Berechnen Sie alle Werte t, für die die Punkte A, B, C und S_t nicht Eckpunkte einer Pyramide mit dreiseitiger Grundfläche sind.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

b) Untersuchen Sie, ob es Werte für t gibt, für die die Punkte A, B, C und S_t Eckpunkte einer Pyramide mit den Eigenschaften (1) und (2) sind.
(1) Die Grundfläche der Pyramide ist das Dreieck ABC.
(2) Die von der Spitze S_t ausgehenden Kanten sind gleich lang.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 4

c) Der Punkt S_1 ist die Spitze einer dreiseitigen Pyramide $ABCS_1$.
Weisen Sie nach, dass der Höhenfußpunkt dieser Pyramide außerhalb der Grundfläche liegt.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

Aufgabe B 4: Analytische Geometrie / Lineare Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1;\ 0;\ \frac{15}{16})$, $B(5;\ 3;\ 1)$ und $C(-2;\ 1;\ 2)$ sowie die Ebenenschar
E_a durch $(a^2-1)\,x + 4y + 4a^2 z = 4\,(a^2-1)$ $(a \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Alle Ebenen E_a schneiden sich in einer Geraden g.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Schnittgeraden.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

b) Die Ebene $\tilde{E}$ enthält die Punkte B und C und steht senkrecht zur Ebene E_2.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene $\tilde{E}$ in parameterfreier Form.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 2

c) Veranschaulichen Sie die Ebene E_2 in einem kartesischen Koordinatensystem.

In der Ebene E_2 existieren Geraden, die durch den Punkt A verlaufen.
Die Gerade h ist diejenige dieser Geraden, die den größten Schnittwinkel mit der x-y-Ebene besitzt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 5

Aufgabe C 1: Stochastik

Ein Betrieb stellt Batterien für grafikfähige Taschenrechner her. Der Ausschussanteil beträgt 2 %. Ausschussstücke treten unabhängig voneinander auf.

a) Margret kauft 4 Batterien.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Batterien Ausschuss sind.
Margret behauptet, die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Batterien Ausschuss sind, sei kleiner als die Wahrscheinlichkeit, im Lotto „6 aus 49“ sechs richtige Zahlen zu tippen.
Überprüfen Sie Margret’s Behauptung.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

b) Batterien werden für den Versand an Einzelhändler in Kartons zu je 100 Stück verpackt.
Berechnen Sie, wieviel Ausschussstücke in einem Karton durchschnittlich zu

erwarten sind.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Karton höchstens 2 % der Batterien Ausschuss sind.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 2

c) Nach Angaben des Betriebes ist die Lebensdauer der Batterien normalverteilt mit einem Erwartungswert von 300 Betriebsstunden und einer Standardabweichung von 15 Betriebsstunden.
Ein Kontrolleur entnimmt der laufenden Produktion eine solche Batterie und prüft die Lebensdauer.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer dieser Batterie höchstens 280 Betriebsstunden beträgt.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 2

d) Die Herstellung einer Batterie kostet 1,00 DM. Der Betrieb möchte je Batterie einen Reingewinn von mindestens 0,10 DM erzielen. Um konkurrenzfähig zu bleiben, sollte der Abgabepreis einer Batterie maximal 1,32 DM betragen. Außerdem wurde mit den Händlern vereinbart, dass der Betrieb defekte Batterien zurücknimmt und durch funktionierende, geprüfte Batterien ersetzt. In diesem Fall entstehen dem Betrieb Kosten von 3,00 DM je defekter Batterie.
Ermitteln Sie den minimalen Abgabepreis einer Batterie an den Händler und den höchstmöglichen durchschnittlichen Gewinn, den der Hersteller für eine Batterie erzielen kann.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 3

Aufgabe C 2: Stochastik

a) Aus den Passagierlisten eines sächsischen Flughafens von 1999 geht hervor, dass 40 % der Passagiere Einwohner Sachsens, 40 % der Passagiere Einwohner der anderen Bundesländer Deutschlands und 20 % der Passagiere Einwohner anderer Staaten sind. Für die Durchführung einer Befragung werden Passagiere zufällig ausgelost, wobei aufgrund der großen Anzahl von Passagieren diese Auslosungen als voneinander unabhängig angenommen werden können.
Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
Ereignis A: Drei zufällig ausgeloste Passagiere sind Einwohner Sachsens.
Ereignis B: Unter fünf zufällig ausgelosten Passagieren befinden sich mehr Einwohner anderer Staaten als Deutschlands.

Erreichbare Bewertungseinheiten: 2

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück den Zielflughafen Frankfurt hat, sei p. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei zufällig herausgegriffenen Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen Frankfurt hat, ist 90 %.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit p.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 2

c) Handgepäck wird wie folgt kontrolliert:
Bei Kontrolle 1 wird das Gepäck mit einem Spezialgerät durchleuchtet. Nur wenn dieser Vorgang kein eindeutiges Ergebnis liefert, wird er ein zweites Mal durchgeführt (Kontrolle 2). Liegt dann immer noch kein eindeutiges Ergebnis vor, wird das Gepäckstück geöffnet und durch einen Beamten geprüft (Kontrolle 3). Kontrolle 1 und Kontrolle 2 dauern je 10 Sekunden, Kontrolle 3 dauert 5 Minuten. Zwischen zwei Kontrollvorgängen vergehen 30 Sekunden.
F_1 ist das Ereignis: Kontrolle 1 führt zu einem eindeutigen Ergebnis.
F_2 ist das Ereignis: Kontrolle 2 führt zu einem eindeutigen Ergebnis.

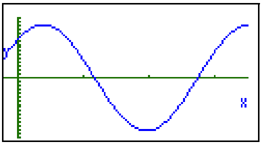
Gegeben sind die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu F_1
$P(\overline{F_1}) = 0{,}1$ und die Wahrscheinlichkeit $P(F_2) = 0{,}6$. Die Zufallsgröße Z beschreibt die für die Gepäckkontrolle benötigte Gesamtzeit.
Ermitteln Sie die durchschnittlich für die Gepäckkontrolle benötigte Zeit.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 4

d) Die Masse der Gepäckstücke sei normalverteilt. Sie beträgt durchschnittlich 15 kg bei einer Standardabweichung von 3 kg. Es wird angenommen, dass ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück eine Masse m von $14\text{ kg} \le m \le 16\text{ kg}$ hat.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Annahme zutrifft.
Erreichbare Bewertungseinheiten: 2

Erwartungsbild zu Aufgabe A 1 : Analysis

a) $y = f_2(x) = 5(\sin(2x) + \cos(2x))$ $(x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le \pi)$

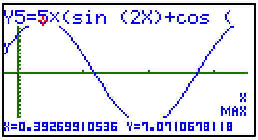
Einen anschaulichen Eindruck vom Verlauf des Graphen liefert der GTR:



Nullstellen:
Im Definitionsbereich der Funktion liegen die Nullstellen:
$x_{N_1} = \frac{3}{8}\pi \approx 1{,}18$; $x_{N_2} = \frac{7}{8}\pi \approx 2{,}75$

(Ablesen vom GTR)

Lokale Extrempunkte:
Ermittlung der Extrempunkte mit GTR liefert:



$P_{MAX}(0{,}39; 7{,}07)$ $P_{MIN}(1{,}96; -7{,}07)$

Lösungsvariante:

$$f_2'(x) = 10(\cos(2x) - \sin(2x)) \Rightarrow \quad 0 = \cos(2x) - \sin(2x)$$
$$\cos(2x) = \sin(2x)$$
$$1 = \tan(2x) \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} \text{ und } x_E = \frac{\pi}{8}$$

mit kleinster Periode: $x_E = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

im Definitionsbereich: $x_{E_1} = \frac{\pi}{8}$; $x_{E_2} = \frac{5\pi}{8}$

Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{MAX}(\frac{\pi}{8}; 5\sqrt{2})$; $P_{MIN}(\frac{5\pi}{8}; -5\sqrt{2})$

Wendepunkte:

Lösungsvariante 1:

Die Wendestellen liegen wegen der Periodizität des Graphen in der ”Mitte” zwischen zwei Extremstellen. Da die lokalen Maxima und Minima von der x-Achse denselben Abstand haben, müssen die Wendepunkte auf der x-Achse liegen.
$P_{W_1}(\frac{3\pi}{8}; 0)$ $P_{W_2}(\frac{7\pi}{8}; 0)$

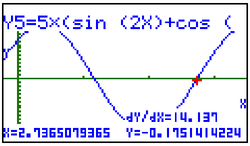
Lösungsvariante 2:
Ermittlung mit GTR liefert:

Lösungsvariante 3:
Prüfen mit zweiter Ableitung:
$f_2''(x) = -20\,(\sin(2x) + \cos(2x)) \Rightarrow 0 = (\sin(2x) + \cos(2x)$

Berechnung wie bei Nullstellen liefert: $P_{W_1}\left(\frac{3\pi}{8};0\right);\ P_{W_2}\left(\frac{7\pi}{8};0\right)$.

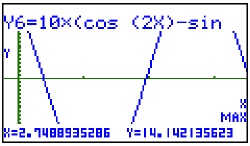
Der Wertebereich ergibt sich aus den lokalen Extrema:
WB: $\{y \in \mathbb{R} \mid -5\sqrt{2} \le y \le 5\sqrt{2}\}$

Der maximale Anstieg der Funktion kann nur der Anstieg im "rechten" Wendepunkt sein:
Lösungsvariante 1:
Ermittlung mit GTR:



maximaler Anstieg: 14,14

Lösungsvariante 2:
Untersuchung der ersten Ableitung auf Maxima:
$f_2'(x) = 10 \cdot (\cos(2x) - \sin(2x))$



maximaler Anstieg: 14,14

Lösungsvariante 3:
Rechnerische Ermittlung der 1. Ableitung und Einsetzen der entsprechenden Wendestelle liefert:
$$f_2'\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 10\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$$

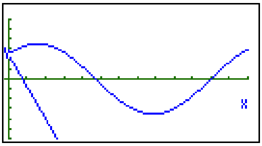
b) $f_{0,5}(x) = 1{,}25\,(\sin(0{,}5x) + \cos(0{,}5x))\ (x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le 4\pi)$
Anstieg an der Stelle x = 0: 0,625 (Ermittlung mit GTR oder Einsetzen in erste Ableitung):
$$f_{0,5}'(x) = \frac{5}{8}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\ ;\ f_{0,5}'(0) = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Der Anstieg der Normalen beträgt: $-\frac{1}{\frac{5}{8}} = -\frac{8}{5} = -1{,}6$

Der Funktionswert an der Stelle 0 entspricht dem Wert n in der Gleichung der Normalen:

$f_{0,5}(0) = \frac{5}{4} = 1{,}25$; Gleichung der Normalen: $y = -1{,}6\,x + 1{,}25$

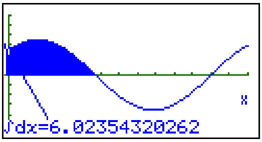
Der GTR veranschaulicht
Graph und Normale:



Flächeninhalt "unterhalb" des Graphen:
Die rechte Integrationsgrenze ist die Nullstelle $x_N = \frac{3}{2}\pi \approx 4{,}712$.

$$A_1 = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (1{,}25(\sin(0{,}5x) + \cos(0{,}5x)))dx$$

$\approx 6{,}02354$ (GTR - Routine)



Flächeninhalt "unterhalb" der Normalen:

Die rechte Integrationsgrenze ist die "Nullstelle" $x_N = \frac{25}{32} \approx 0{,}78125$

$$A_2 = \int_0^{0,78125} (-1{,}6x + 1{,}25)dx \approx 0{,}4882 \text{ (GTR - Routine)}$$

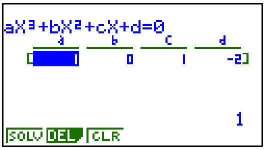
$A_{Gesamt} = A_1 - A_2 \approx 5{,}55$

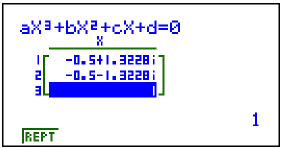
Hinweis: Der Inhalt der Fläche kann auch über die Berechnung des Flächeninhaltes des rechtwinkligen Dreiecks erfolgen.

c) Der Anstieg der Tangente entspricht der ersten Ableitung an der Stelle x = 0.
$f_a'(x) = (a^2 + 1)a(\cos(ax) - \sin(ax)) = (a^3 + a)(\cos(ax) - \sin(ax))$
$f_a'(0) = (a^3 + a)(1 - 0) = a^3 + a$

Gleichung der Tangente: $y = (a^3 + a)x + n$
n entspricht in diesem Fall dem Funktionswert der Funktion an der Stelle $x = 0$.
$f_a(0) = (a^2 + 1)(0 + 1) = a^2 + 1$
$\Rightarrow$ Tangente: $y = (a^3 + a)x + a^2 + 1$

Bestimmung des Wertes a:
Wenn der Anstieg 2 betragen soll, muss gelten:
$a^3 + a = 2 \Rightarrow a = 1$ (Systematisches Probieren oder GTR)





Gleichung der Tangente: $y = 2x + 2$

d) Ermitteln einer Stammfunktion der Funktion f_a.

$$F_a(x) = (a^2 + 1)\,\frac{1}{a}\,(-\cos(ax) + \sin(ax)) = \left(a + \frac{1}{a}\right)(\sin(ax) - \cos(ax))$$

Ermitteln der rechten Integrationsgrenze:
$0 = (a^2 + 1)(\sin(ax) + \cos(ax))$
Da $(a^2 + 1)$ stets > 0 ist, folgt $0 = (\sin(ax) + \cos(ax))$.
$\sin(ax) = -\cos(ax) \Rightarrow \tan(ax) = -1$ und $ax = -\frac{\pi}{4}$;
$x = -\frac{\pi}{4a}$ (liegt außerhalb des Definitionsbereichs)
kleinste Periode: $\frac{\pi}{a} \Rightarrow -\frac{\pi}{4a} + \frac{\pi}{a} = \frac{3\pi}{4a}$

$$A(a) = \int_0^{\frac{3\pi}{4a}} ((a^2+1)(\sin(ax) + \cos(ax)))dx = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left[\sin(ax) - \cos(ax)\right]_0^{\frac{3\pi}{4a}}$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 0 + 1\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\right)$$

$$\Rightarrow A(a) = \left(a + \frac{1}{a}\right)(\sqrt{2} + 1)$$

e) Wert a, für den der Inhalt dieser Fläche extremal wird:

$A'(a) = (\sqrt{2} + 1)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$; $A''(a) = (\sqrt{2} + 1)\left(\frac{2}{a^3}\right)$

$A'(a) = 0$: $\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = 0$; $1 = \frac{1}{a^2}$; $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$; ($a = -1$ entfällt, da $a > 0$)

$A''(1) = (\sqrt{2} + 1)2 > 0$ lokales Minimum

Für a = 1 existiert ein lokales Minimum. Dieses ist auch globales Minimum, da die Funktion A(a) für a > 0 stetig ist und

$$\lim_{a \to 0}\left(a + \frac{1}{a}\right)\ (\sqrt{2} + 1) = (0 + \infty)(\sqrt{2} + 1) = \infty \text{ und}$$

$$\lim_{a \to \infty}\left(a + \frac{1}{a}\right)\ (\sqrt{2} + 1) = (\infty + 0)(\sqrt{2} + 1) = \infty \text{ gilt.}$$

Es gibt also genau einen solchen Wert a.
w.z.b.w.

Flächeninhalt für a = 1: $A(1) = (1 + 1)\ (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} + 2$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstellen; Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte; Koordinaten der Wendepunkte; Wertebereich; 1. Ableitung; maximaler Anstieg	6 BE
b)	Gleichung der Senkrechten; Inhalt einer Teilfläche; Abszisse des Schnittpunktes der Senkrechten mit der x-Achse; Inhalt der zweiten Teilfläche; Flächeninhalt	5 BE
c)	Anstieg der Tangente; Gleichung der Tangente; Ansatz für Wert a; Wert a; Gleichung der speziellen Tangente	5 BE
d)	Stammfunktion; Ansatz für Integrationsgrenzen; Integrationsgrenzen; Flächeninhalt;	4 BE
e)	Erste Ableitung; Wert a; Ausschluss weiterer Lösungen; Nachweis und Art des Extremums; Flächeninhalt	5 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 2: Analysis

a) $y = f_a(x) = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x+a)(x+2)}$ $(a \in \mathbb{R}, a > 2; x \in D_{f_a})$

größtmöglicher Definitionsbereich: $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq -2, x \neq -a\}$

Nullstellen und Unstetigkeitsstellen:
Das Zählerpolynom wird 0 für $x_{N_1} = -4$ und $x_{N_2} = 1$.
Das Nennerpolynom wird 0 für $x_{p_1} = -2$ und $x_{p_2} = -a$.
Bedingung für Nullstellen: Zählerpolynom ist 0, Nennerpolynom ist ungleich 0
Bedingung für Polstellen: Zählerpolynom ist ungleich 0, Nennerpolynom ist 0

Im Fall a = 4 wird die Stelle x = – 4 als Polstelle und Nullstelle ausgeschlossen, da die Funktion dort eine Lücke besitzt.
(Bedingung für Lücken: Zählerpolynom ist 0, Nennerpolynom ist 0)
Damit treten folgende Nullstellen und Polstellen auf:

	Nullstellen	Polstellen
1. Fall: a = 4	$x_N = 1$	$x_p = -2$
2. Fall: a ≠ 4	$x_{N_1} = 1;\ x_{N_2} = -4$	$x_{p_1} = -2;\ x_{p_2} = -a$

b) Untersucht wird die Funktion

f_4 mit $y = f_4(x) = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x+4)(x+2)} = \frac{(x-1)^2}{x+2}$ (für $x \neq -4$)

$y = \frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$

Polynomdivision liefert: $(x^2 - 2x + 1) : (x + 2) = x - 4 + \frac{9}{x+2}$

$$\begin{array}{l} -\underline{(x^2 + 2x)} \\ \quad -4x + 1 \\ \quad -\underline{(-4x - 8)} \\ \qquad\qquad 9 \end{array}$$

w.z.b.w.

Stammfunktion:

$\int\left(x - 4 + \frac{9}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9\ln|x+2| + c$

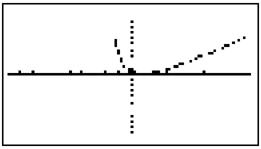
eine Stammfunktion: $F_4(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9\ln|x+2|$

Stammfunktion $\tilde{F}_4$:

$9 = \frac{1}{2}(-1)^2 - 4(-1) + 9\ln|(-1)+2| + c = \frac{1}{2} + 4 + 9 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 4{,}5$

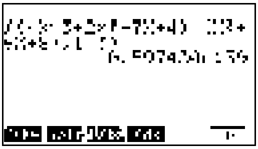
$\tilde{F}_4(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9\ln|x+2| + 4{,}5$

Eine Vorstellung vom Verlauf des Graphen liefert der GTR:



Die betreffende Nullstelle der Funktion f_4 liegt bei x = 1.
Berechnung des Flächeninhaltes mit GTR-Programm oder GTR-Routine liefert:

$$\int_1^3 f_4(x)dx = 0{,}5974$$

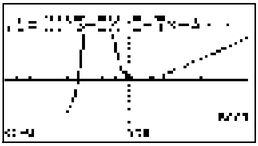


Lösungsvariante:

$$\int_1^3 f_4(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 9 - 12 + 9\ln|5| - \frac{1}{2} + 4 - 9\ln|3| = -4 + 9\ln 5 - 9\ln 3 \approx 0{,}5974$$

c) f_3: $y = f_3(x) = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x+3)(x+2)}$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq -3; x \neq -2)$

Eine Vorstellung vom Graphen der Funktion f_3 liefert der GTR:



Die Polstellen liegen bei $x_{p_1} = -3$ und $x_{p_2} = -2$

Begründung: Zwischen zwei Polstellen hat der Graph der Funktion genau dann einen lokalen Maximumpunkt, wenn die Funktion in diesem Intervall stetig ist und beide Grenzwerte der Funktionswerte bei Annäherung an die Polstelle $-\infty$ betragen. Die Funktion f_3 ist im Intervall $-3 < x < -2$ stetig. (siehe auch Teilaufgabe a).

Untersuchung der Grenzwerte:

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x+3)(x+2)} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{(x-1)^2 \cdot (x+4)}{(x+3) \cdot (x+2)} = -\infty$$

(Der Zähler ist in einer Umgebung von -3 stets positiv, der Nenner für $x > -3$ stets negativ. Da an $x = -3$ eine Polstelle vorliegt, muss der Grenzwert $-\infty$ sein. In einer Umgebung von -2 ist der Zähler stets positiv, der Nenner für $x < -2$ stets negativ. Da an $x = -2$ eine Polstelle vorliegt, muss der Grenzwert hier ebenfalls $-\infty$ sein.)

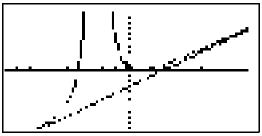
d) f_3: $y = f_3(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot (x+4)}{(x+3) \cdot (x+2)} = \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x^2 + 5x + 6}$

Polynomdivision liefert: $(x^3 + 2x^2 - 7x + 4) : (x^2 + 5x + 6) = x - 3 + \frac{2x + 18}{x^2 + 5x + 6}$

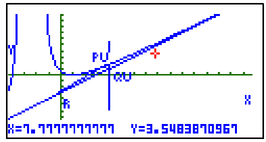
$\lim\limits_{x \to \infty}\left(x - 3 + \frac{2x + 18}{x^2 + 5x + 6}\right) = x - 3 \Rightarrow$ Gleichung der schrägen Asymptote: $y = x - 3$

w.z.b.w.

Die Kontrolle mit dem GTR liefert:



Einzeichnen des Sachverhaltes:



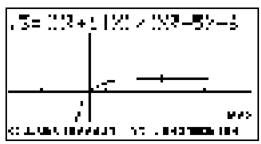
Die Höhe des Dreiecks ist u, die Grundseite ist die Strecke $\overline{P_uQ_u}$.

$$\overline{P_uQ_u} = f_3(u) - g(u) = \frac{u^3 + 2u^2 - 7u + 4}{u^2 + 5u + 6} - (u - 3)$$

$$= \frac{u^3 + 2u^2 - 7u + 4 - (u-3)(u^2 + 5u + 6)}{u^2 + 5u + 6} = \frac{2u + 22}{u^2 + 5u + 6}$$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A(u) = \frac{1}{2} g_u h_u = \frac{1}{2} \frac{2u + 22}{u^2 + 5u + 6} u = \frac{u^2 + 11u}{u^2 + 5u + 6}$

Zielfunktion: $A(u) = \frac{u^2 + 11u}{u^2 + 5u + 6}$



Die Untersuchung der Zielfunktion
mit dem GTR liefert: $u_E = 4{,}46$

e) Berechnen der Funktionswerte: $f_3(-1) = 6$, $f_3(0) = \frac{2}{3}$, $f_3(1) = 0$
$f_3'(-1) = -13$
Die Gleichung der Funktion p hat die Gestalt $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$p'(-1) = -13$; $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $p'(-1) = -13 = 3a - 2b + c$

Aufstellen eines Gleichungssystems:

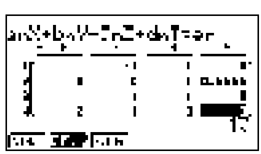
aus $x_1 = -1 \Rightarrow \quad 6 = -a + b - c + d$

aus $x_2 = 0 \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = d$

aus $x_3 = 1 \Rightarrow \quad 0 = a + b + c + d$

aus $p'(-1) = -13 \Rightarrow -13 = 3a - 2b + c$

Der GTR liefert als Lösung:
$a = 2,\overline{6}$; $b = 2,\overline{3}$; $c = -0,\overline{3}$; $d = 0,\overline{6}$



Hinweis: Einige GTR können nur lineare Gleichungssysteme mit maximal drei Gleichungen lösen. Da der Wert für d aber aus den Koordinaten des Punktes B sofort ablesbar ist, kann das Gleichungssystem in der Form

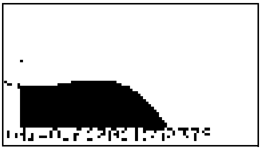
$$\begin{aligned} -a + b - c &= \tfrac{16}{3} \\ a + b + c &= \tfrac{2}{3} \\ 3a - 2b + c &= -13 \end{aligned}$$

aufgeschrieben und gelöst werden.

Gleichung der Funktion p: $y = p(x) = -2{,}\bar{6}\,x^3 + 2{,}\bar{3}\,x^2 - 0{,}\bar{3}\,x + 0{,}\bar{6}$
Zur Kontrolle sollte der Graph der Funktion p mit dem GTR gezeichnet werden.

Ermittlung des Flächeninhaltes A:

$$A = \int_0^1 p(x)\,dx \approx 0{,}61$$



Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht auch über Programm bzw. im GTR implementierte Routinen zur numerischen Integration.

Bewertungsvorschlag:

a) größtmöglicher Definitionsbereich; Nullstellen für $a \neq 4$; Polstellen für $a \neq 4$; Nullstellen für $a = 4$; Polstellen für $a = 4$; Lücke — 6 BE

b) Nachweis für Funktion f_4; Gleichung einer Stammfunktion der Funktion f_4; Gleichung der Funktion F_4; Ansatz für Flächeninhalt; Flächeninhalt — 5 BE

c) Polstellen; Aussage zur Stetigkeit, Aussage zu Grenzwerten — 3 BE

d) Ansatz für Nachweis der Asymptote; Nachweis der Asymptote; Grundseite des Dreiecks; Höhe des Dreiecks; Flächeninhalt in Abhängigkeit von u; Wert u — 6 BE

e) Absolutglied in der Gleichung der Funktion p; eine Gleichung des Gleichungssystems; vollständiges Gleichungssystem; Gleichung der Funktion p; Flächeninhalt — 5 BE

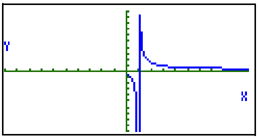
25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 3 : Analysis

a) größtmöglicher Definitionsbereich: Der Nenner darf nicht 0 werden und das Argument des Logarithmus muss stets positiv sein.

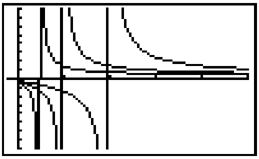
$\Rightarrow D_{f_t} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq \frac{1}{t}\}$

b) Eine Vorstellung vom Verlauf des Graphen gibt der GTR:


(Graph der Funktion f_1)

Beschreibung:
Der Punkt $P_a(0; a)$ liegt auf der y-Achse. Die durch den Punkt P_a verlaufenden Tangenten haben Gleichungen der Form $y = mx + a$. Im Berührungspunkt stimmt der Funktionswert von f_t mit der y-Koordinate der Tangente ($y = mx + a$) überein, wobei der Anstieg m der Tangente der ersten Ableitung der Funktion f_t an der Berührungsstelle entspricht. Es gilt: $f_t(x) = f_t'(x) \cdot x + a$. Über diese Beziehung können die Berührungsstellen der Tangenten an die Funktion f_t berechnet werden. Für diese Berührungsstellen wird jeweils der Anstieg der Funktion f_t berechnet und für m in die Gleichung der Tangente eingesetzt.

c) Die Abbildung liefert eine Vorstellung vom Verlauf der Graphen für t: (0,5; 1; 2)



Die Anstiege der Tangenten werden bestimmt:

$u = 1;\ u' = 0;\ v = \ln(t\,x);\ v' = \frac{1}{tx}\,t = \frac{1}{x} \Rightarrow f_t'(x) = -\frac{1}{x}\,\frac{1}{(\ln(t\cdot x))^2}$

Tangenten: $y = mx + n$

$\frac{1}{\ln(tx)} = -\frac{1}{x}\,\frac{1}{(\ln(tx))^2}\cdot x + 2 = -\frac{1}{(\ln(tx))^2} + 2\ (x \neq 0)$

$\ln(tx) = -1 + 2(\ln(t\,x))^2$
$0 = 2(\ln(t\cdot x))^2 - \ln(t\,x) - 1$
Substitution: $\ln(t\,x) = a \Rightarrow 2a^2 - a - 1 = 0$ und $a_1 = 1;\ a_2 = -0{,}5$ (GTR)

Aus $a_1 = 1$ folgt: $\ln(tx_1) = 1$; $e^1 = t\,x_1$; $x_1 = \frac{e}{t}$
Aus $a_2 = -0{,}5$ folgt: $\ln(tx_2) = -0{,}5$; $e^{-0{,}5} = t\,x_2$; $x_2 = \frac{1}{t\sqrt{e}}$

An diesen Berührungsstellen wird mithilfe der ersten Ableitung der Anstieg ermittelt:

$$f_t'(x_1) = -\frac{1}{\frac{e}{t}}\frac{1}{\left(\ln\left(t\frac{e}{t}\right)\right)^2} = -\frac{t}{e}$$

$$f_t'(x_2) = -\frac{1}{\frac{1}{t\sqrt{e}}}\frac{1}{\left(\ln\left(t\frac{1}{t\sqrt{e}}\right)\right)^2} = -t\sqrt{e}\,\frac{1}{\left(\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^2} = -t\sqrt{e}\cdot 4 = -4t\sqrt{e}$$

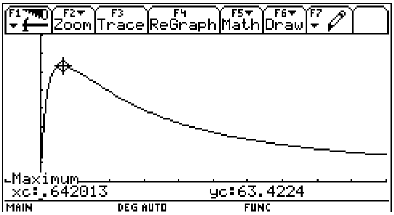
Gleichungen der Tangenten: t_1: $y = -\frac{t}{e}\,x + 2$; t_2: $y = -4t\sqrt{e}\,x + 2$

Schnittwinkel in Abhängigkeit von t:

$$\tan\phi_t = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right| = \left|\frac{-\frac{t}{e} + 4t\sqrt{e}}{1 + 4t^2\frac{\sqrt{e}}{e}}\right| \quad (t > 0) \Rightarrow \phi_t = \arctan\left(\frac{-\frac{t}{e} + 4t\sqrt{e}}{1 + 4t^2\frac{\sqrt{e}}{e}}\right)$$

Untersuchung mit GTR:

$t_{MAX} \approx 0{,}642$; $\phi_{MAX} \approx 63{,}4°$



Die Angabe der Winkelgröße war lt. Aufgabenstellung nicht gefordert.
Es ist auch möglich, anstelle der Zielfunktion mit arctan die Funktion $\tan\phi(t)$ zu untersuchen.

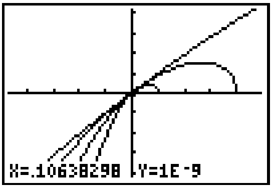
Bewertungsvorschlag:

a)	größtmöglicher Definitionsbereich	1 BE
b)	Aussage zur Ermittlung des Anstieges; Aussage zur Ermittlung der Berührungsstellen; Aussage zum Aufstellen der Gleichungen	3 BE
c)	1. Ableitung; Abszissen der Berührungspunkte; Gleichung einer Tangente; Gleichung der anderen Tangenten; Zielfunktion; Wert t	6 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 4 : Analysis

a) $y = f_k(x) = \frac{x}{k}\sqrt{k^2 - x}$ $(k \in \mathbb{R},\ k > 0;\ x \in \mathbb{R},\ x \le k^2)$

Einen ersten Eindruck vom Verlauf der Graphen vermittelt das Bild für $k = \{0{,}5;\ 1;\ 2;\ 5\}$.



Zunächst müssen die Koordinaten der lokalen Extrempunkte berechnet werden.

1. Ableitung:
Im Funktionsterm wurde zunächst der Faktor $\frac{1}{k}$ ausgeklammert.

$u = x;\ u' = 1;\ v = \sqrt{k^2 - x};\ v' = -\frac{1}{2\sqrt{k^2 - x}}$

$$f_k'(x) = \sqrt{k^2 - x} - \frac{x}{2\sqrt{k^2 - x}} = \frac{\sqrt{k^2 - x}\cdot 2\sqrt{k^2 - x} - x}{2\sqrt{k^2 - x}}$$

$$= \frac{2k^2 - 2x - x}{2\sqrt{k^2 - x}} = \frac{2k^2 - 3x}{2\sqrt{k^2 - x}}$$

Nach Multiplizieren mit $\frac{1}{k}$ erhält man:

$$f_k'(x) = \frac{2k^2 - 3x}{2k\sqrt{k^2 - x}}$$

Extremstellen:

$f_k'(x) = 0$: $2k^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_E = \frac{2}{3}k^2$

Ermitteln der Art der Extrema mit 2. Ableitung:

$$f_k''\left(\frac{2}{3}k^2\right) = \frac{-4k^2 + 2k^2}{4k\sqrt{\left(k^2 - \frac{2}{3}k^2\right)^3}} = \frac{-2k^2}{4k\sqrt{\left(\frac{1}{3}k^2\right)^3}}$$

Da der Zähler negativ ist und der Nenner positiv, gilt:

$f_k''\left(\frac{2}{3}k^2\right) < 0 \Rightarrow$ lokale Maxima für alle k (k > 0).

Koordinaten der lokalen Maxima:

$$f_k\left(\frac{2}{3}k^2\right) = \frac{\frac{2}{3}k^2}{k}\sqrt{k^2 - \frac{2}{3}k^2} = \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{1}{3}k^2} = \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{1}{3}}\,k = \frac{2}{3}k^2\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}}\,k^2 = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,k^2$$

$\Rightarrow P_{MAX}\left(\frac{2}{3}k^2; \frac{2}{9}\sqrt{3}k^2\right)$

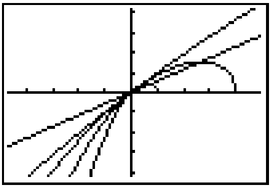
Gleichung der Funktion, auf deren Graph alle lokalen Maximumpunkte liegen:

$x = \frac{2}{3}k^2$; $k^2 = \frac{3}{2}x$

$y = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,k^2 = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,\frac{3}{2}x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x$

Gleichung der Funktion: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x$

Zur Kontrolle kann man den Graph dieser Funktion mit dem GTR einzeichnen:



b) Eine Stammfunktion der Funktion f_3 kann nur die Funktion g sein, da die Funktion f_3 an der lokalen Extremstelle der Funktion g eine Nullstelle hat. Die Funktion f_3 kann also die erste Ableitung der Funktion g sein. Da die Funktion h an der Nullstelle von f_3 kein lokales Extremum besitzt, kann sie nicht Stammfunktion von f_3 sein.

f_3: $y = \frac{x}{3}\sqrt{9 - x}$ $(x \in \mathbb{R}, x \leq 9)$

Die Funktion f_3 hat die Nullstellen $x_{N_1} = 0$ und $x_{N_2} = 9$. Damit stehen diese auch als Integrationsgrenzen fest.

$$A = \int_0^9 f_3(x)dx = \left[-\frac{2}{15}(x+6)(9-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$$

$$= \left[-\frac{2}{15} \cdot 15 \cdot 0\right] - \left[-\frac{2}{15} \cdot 6 \cdot 9^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{15} \cdot 6\sqrt{9^3} = \frac{108}{5} = 21{,}6$$

Der halbe Flächeninhalt beträgt also 10,8 FE.

Ermittlung von a:

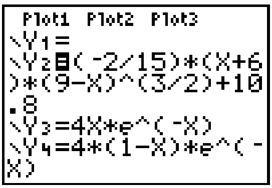
$$10{,}8 = \int_0^a f_3(x)\,dx = \left[\left(-\frac{2}{15}\right)(x+6)(9-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

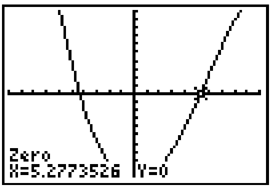
$$= \left[\left(-\frac{2}{15}\right)(a+6)(9-a)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[-\frac{2}{15}\cdot 6\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \left(-\frac{2}{15}\right)(a+6)(9-a)^{\frac{3}{2}} + 21{,}6 \qquad | -10{,}8$$

$$0 = \left(-\frac{2}{15}\right)(a+6)(9-a)^{\frac{3}{2}} + 10{,}8$$

Lösung der Gleichung mit GTR ergibt im entsprechenden Intervall:

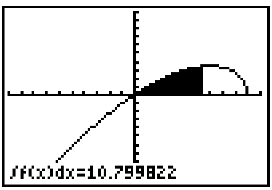


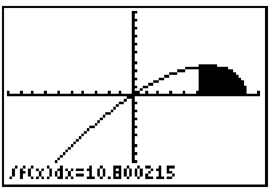


a=5,277

(Eine weitere Termumformung führt auf die Gleichung
$0 = -a^5 + 15a^4 + 45a^3 - 1215a^2 + 19683$, welche ebenfalls grafisch gelöst werden kann.)

Probe mit GTR:





Die Gerade x= 5,277 halbiert die Fläche.

Prüfen, ob Halbierung des Volumens des Rotationskörpers vorliegt:

$$V = \pi \int_a^b (f_3(x))^2\,dx$$

$$V_1 = \pi \int_0^{5,2773} \left(\frac{x}{3}\sqrt{9-x}\right)^2 dx \qquad V_2 = \pi \int_{5,2773}^{9} \left(\frac{x}{3}\sqrt{9-x}\right)^2 dx$$

$= 27{,}445\,\pi$ (GTR) $\qquad = 33{,}30\,\pi$

$= 86{,}22 \qquad = 104{,}62$

Das Volumen des Rotationskörpers wird durch die Ebene x = 5,2773 nicht halbiert.

Lösungsvariante:
Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi \int_0^9 (f_3(x))^2 dx = \pi \int_0^9 \left(\frac{x}{3}\sqrt{9-x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{9} \int_0^9 (9x^2 - x^3) dx = \frac{\pi}{9} \left[\frac{9x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^9$$

$$= \frac{\pi}{9} \left[3 \cdot 729 - \left(\frac{1}{4} \cdot 6561\right)\right]$$

$$= \frac{243\pi}{4}$$

$$= 190{,}8$$

Die Berechnung eines Teilvolumens liefert auch hier, dass das Volumen nicht halbiert wird.
Möglich ist auch die Berechnung der Zahl b, für welche die Ebene x = b das Volumen halbiert und der Nachweis, dass a und b verschieden sind.

$$\frac{V}{2} = \frac{243\pi}{8} = \frac{\pi}{9} \left[3x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^b$$

$$\frac{243 \cdot 9}{8} = 3b^3 - \frac{1}{4} b^4$$

$$\frac{2187}{8} = 3b^3 - \frac{1}{4} b^4$$

Lösung mit GTR ergibt: $b = 5{,}52 \neq a$.

Bewertungsvorschlag:

a) 1. Ableitung; Extremstelle; Nachweis und Art der Extrema;
Ansatz für Gleichung der Funktion; Gleichung der Funktion 5 BE

b) Begründung; Flächeninhalt; Ansatz für Wert a; Wert a;
Prüfung und Schlussfolgerung 5 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 1: Geometrie / Algebra

Nachweis, dass der Körper ABCDEF kein Prisma ist:
Lösungsvariante 1:
Aus den Koordinaten ist ablesbar, dass die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ und $\overline{EF}$ parallel zur y-Achse verlaufen. Falls der Körper ein Prisma ist, so müssten diese Kanten gleich lang sein. Das ist aber nicht der Fall, da $\overline{EF} = \overline{DC} = 5$ und $\overline{AB} = 8$ gilt.
Also ist das Werkstück kein Prisma.

Lösungsvariante 2:
Es wird gezeigt, dass die Ebenen ADE und BCF nicht parallel sind.
$\overrightarrow{FC}$ und $\overrightarrow{ED}$ sind Repräsentanten desselben Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Sie stehen senkrecht zur x-y-Ebene. Da die Punkte A, B, C und D in der x-y-Ebene liegen, müssten $\overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{CB}$ parallele Vektoren sein.

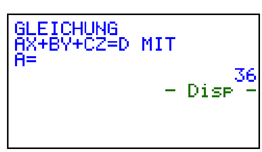
$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 4 = \lambda_1 \cdot 4 & \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ 0 = \lambda_2 \cdot 3 & \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \text{Widerspruch,}$$

d. h. $\overrightarrow{CB}$ ist nicht parallel zu $\overrightarrow{DA}$.
Damit ist gezeigt, dass die Ebenen ADE und BCF nicht parallel sind. Der Körper ist kein Prisma.

Lösungsvariante 3:
Man ermittelt die Gleichungen der Ebenen ADE und BCF.
ADE: $y = 0$ (x-z- Ebene)

BCF: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t, s \in \mathbb{R})$

Umformen in die allgemeine Form mit Programm “Ebene” liefert:
$36x - 48y = -240$



Vereinfachen: BCF: $3x - 4y = -20$

Normalenvektoren: $\overrightarrow{n_{ADE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{BCF}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Normalenvektoren der Ebenen sind nicht parallel, also sind auch die Ebenen nicht parallel. Deshalb ist der Körper kein Prisma.

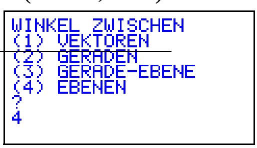
Lösungsvariante 4:
Bilden des Skalarproduktes der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CB}$. Da dieses nicht 0 ist, stehen diese Vektoren nicht senkrecht aufeinander. Da aber $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ gilt, liegen die Seitenflächen ADE und BCF nicht in parallelen Ebenen. Der Körper ist kein Prisma.

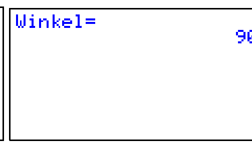
Berechnung des Winkels:
Wie in Lösungsvariante 2 gezeigt, lautet eine Gleichung der Ebene BCF
$3x - 4y = -20$.
Die Gleichung der x-y-Ebene mit den Punkten A, B, C und D lautet $z = 0$.

Die Normalenvektoren sind: $\overrightarrow{n_{ABCD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{BCF}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnung mithilfe des Programms „Winkel“ liefert sofort:

$\sphericalangle(ABCD, BCF) = 90°$





Die Berechnung des Schnittwinkels beider Ebenen kann auch traditionell erfolgen als:

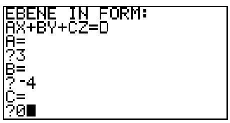
$$\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{n_{ABCD}} \cdot \overrightarrow{n_{BCF}}}{\left|\overrightarrow{n_{ABCD}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{BCF}}\right|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{25}}\right| = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = 90°$$

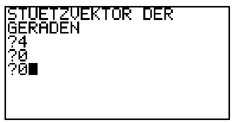
b) *Lösungsvariante 1:*
Beschreibung:
Die Gleichung der Ebene BCF kann aus den Koordinaten der drei Punkte berechnet werden. Dabei erhält man zunächst die Parameterform der Gleichung, welche in die parameterfreie Form umgeformt wird. Die Hilfsgerade l, die senkrecht zur Ebene BCF und durch den Punkt A verläuft, kann aufgestellt werden, indem man den Ortsvektor des Punktes A als Stützvektor und den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor verwendet. Die Gerade l schneidet die Ebene BCF im Punkt L. Die Koordinaten dieses Punktes kann man durch Gleichsetzen von Geraden- und Ebenengleichung ermitteln. Der gesuchte Abstand des Punktes A von der Ebene BCF ist der Abstand der Punkte A und L.

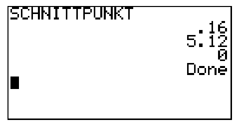
Lösung:
Gleichung der Ebene BCF: $3x - 4y = -20$ (siehe Teilaufgabe a)

Hilfsgerade l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

Schnitt Gerade l und Ebene BCF:
Mit dem GTR-Programm „SGE“ erhält man:



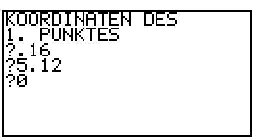




L(0,16; 5,12; 0)

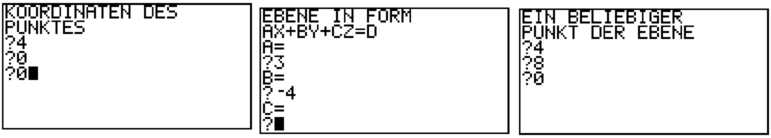
Traditionelle Lösung:
$3(4 + 3t) - 4(-4t) = -20 \Rightarrow 12 + 9t + 16t = -20$ und $t = -\frac{32}{25}$
Durch Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung der Geraden erhält man:
$L(\frac{4}{25};\ \frac{128}{25};\ 0)$

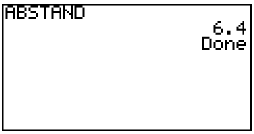
Abstand d(A, L) der Punkte A und L:
Mit GTR-Programm „Abstand“ erhält man d(A, L) = 6,4:



Traditioneller Lösungsweg: $d(A, L) = \sqrt{\left(\frac{96}{25}\right)^2 + \left(\frac{128}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{25600}{625}} = \frac{32}{5} = 6{,}4$

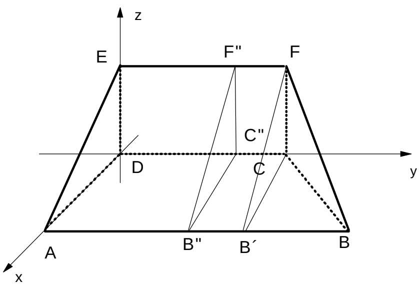
Lösungsvariante 2: Beschreibung (s. o.)
Lösung:
Mithilfe eines GTR-Programms, welches den Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnet, ist das Problem lösbar. Das Programm „APE“ (*Abiturprüfung 1998/99, GK/LK, Gymnasium Sachsen)* leistet das. Es verlangt die Eingabe der Koordinaten des Punktes und der Koeffizienten in der allgemeinen Form der Ebenengleichung. Ferner sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene einzugeben.
Als beliebiger Punkt der Ebene wurde der Punkt B gewählt.





Der gesuchte Abstand beträgt 6,4.

c)



Der „abgesägte“ Teilkörper setzt sich aus der Pyramide BCB'F und dem Prisma B'CFB"C"F" zusammen. Sein Volumen beträgt 10. Die Ebene B"C"F" ist die gesuchte Ebene der Deckfläche.

Das Volumen der Pyramide beträgt:

$$V_{Py} = \frac{1}{3} A_G h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{B'B} \cdot \overline{B'C} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

Das Volumen des Prismas beträgt:

$$V_{Pr} = \frac{1}{2} \cdot \overline{B''C''} \cdot \overline{C''F''} \cdot \overline{B''B'} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \overline{B''B'} = 6\overline{B''B'}$$

Gesamtvolumen:

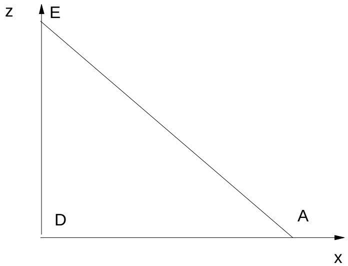
$$10 = V_{Py} + V_{Pr} = 6 + 6\,\overline{B''B'} \Rightarrow 4 = 6\,\overline{B''B'} \Rightarrow \overline{B''B'} = \frac{2}{3}$$

Der Punkt B" hat also die y-Koordinate: $8 - 3 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow B(4; \frac{13}{3}; 0)$

Da die Ebene B"C"F" parallel zur x-z-Ebene geht, lautet die Gleichung $y = \frac{13}{3}$.

(Erkennt man das nicht, müssen die Koordinaten von F" und C" bestimmt und daraus eine Gleichung der Ebene aufgestellt werden.)

d) Der Mittelpunkt der Bohrung ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ADE, also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden dieses Dreiecks.



Lösungsvariante 1:
Die Winkelhalbierende des Winkels ∢ADE verläuft durch den Koordinatenursprung und hat die Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$

Die Winkelhalbierende des Winkels ∢DEA verläuft durch den Punkt E. Den Richtungsvektor erhält man durch Addition des Einheitsvektors des Vektors $\overrightarrow{ED}$ und des Einheitsvektors des Vektors $\overrightarrow{EA}$ (geometrische Deutung der Vektoraddition).
Die Gleichung dieser Winkelhalbierenden lautet somit:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OE} + t\left(\frac{1}{|\overrightarrow{ED}|}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{|\overrightarrow{EA}|}\overrightarrow{EA}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\-\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden (GTR-Programm) oder:

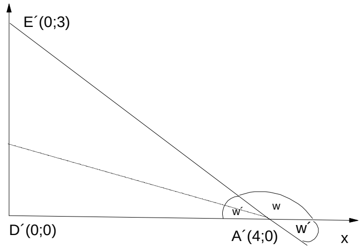
$$\left.\begin{aligned}1s &= \frac{4}{5}t\\ 0 &= 0\\ 1s &= 3-\frac{8}{5}t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{4}{5}t = 3 - \frac{8}{5}t \Rightarrow 4t = 15 - 8t \text{ und } t = \frac{5}{4}$$

Durch Einsetzen von t in die Gleichung der Winkelhalbierenden erhält man die Koordinaten des Mittelpunktes des Inkreises: M(1; 0; 1). Das ist der gesuchte Mittelpunkt des Bohrloches.
Dieser Punkt hat zu allen drei Seiten denselben Abstand. Zu den Seiten $\overline{EA}$ und $\overline{ED}$ kann der Abstand sofort aus den Koodinaten abgelesen werden, er beträgt 1.
Unter Berücksichtigung der Mindestwanddicke von 0,5 kann der Radius der Bohrung höchstens 0,5 betragen.

Lösungsvariante 2:
Man betrachtet ein zum Dreieck DAE kongruentes Dreieck in einem ebenen Koordinatensystem.

Die Kante durch die Punkte E' und A' ist Teil des Graphen einer linearen Funktion. Diese hat die Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

$-\frac{3}{4} = \tan w'$; $w' = 36{,}86°$



Die Hälfte dieses Winkels beträgt 18,43°. Der Anstieg der Winkelhalbierenden ist also tan(180° – 18,43°) = – 0,333. Die gesuchte Winkelhalbierende des Winkels ∢D'A'E hat die Gleichung y = – 0,333x + n. Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes A(4; 0) erhält man y = – 0,333x + 1,333. Die Winkelhalbierende des Winkels ∢A'D'E ist die Gerade y = x.
Durch Gleichsetzen beider Gleichungen erhält man x = – 0,333x + 1,333 bzw. 1,333x = 1,333. Daraus folgt x = 1 und auch y = 1.
Der gesuchte Mittelpunkt des Inkreises hat die Koordinaten (1; 1). Betrachtet man das Dreieck ADE in der x-z-Ebene, entspricht dem der Punkt M(1; 0; 1). Das ist der gesuchte Mittelpunkt des Bohrloches.
Dieser Punkt hat zu allen drei Seiten denselben Abstand. Zu den Seiten $\overline{EA}$ und $\overline{ED}$ kann der Abstand sofort aus den Koodinaten abgelesen werden,
er beträgt 1.
Unter Berücksichtigung der Mindestwanddicke von 0,5 kann der Radius der Bohrung höchstens 0,5 betragen.

Bewertungsvorschlag:

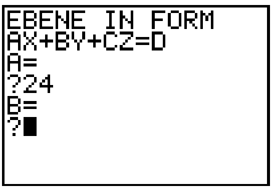
a)	Ansatz für Nachweis; Nachweis; Ansatz für Winkel; Winkel	4 BE
b)	Kenntnis eines Verfahrens; vollständige Beschreibung; Ansatz für Berechnung; Abstand	4 BE
c)	Berechnung eines Teilvolumens; Ansatz für Gleichung der Ebene; Gleichung der Ebene	3 BE
d)	Gleichung einer Winkelhalbierenden; Ansatz für Koordinaten des Mittelpunktes; Koordinaten des Mittelpunktes; Radius	4 BE
		15 BE

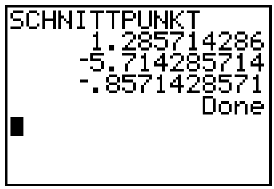
Erwartungsbild Aufgabe B 2 : Geometrie/Algebra

a) Die Ebene $E_{\frac{1}{4}}$ hat die Gleichung: $24x + 3y + 2z = 12$

Lösungsvariante 1:

Mithilfe eines Programmes zur Ermittlung der Koordinaten des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene erhält man sofort: S(1,28; – 5,71; – 0,86).





Lösungsvariante 2:

$$24(-3r) + 3(-4 + 4r) + 2(2r) = 12$$
$$-72r - 12 + 12r + 4r = 12$$
$$-56r = 24 \Rightarrow r = -\frac{3}{7} \approx -0{,}428 \text{ und } S\left(\frac{9}{7}; -\frac{40}{7}; -\frac{6}{7}\right)$$

Ermittlung der Werte t:

Wenn die x-Koordinate des Schnittpunktes – 3 sein soll, so gilt beim Einsetzen in die Gleichung der Geraden g: $x = -3 \Rightarrow -3r = -3$, also $r = 1$

Einsetzen in die Gleichung der Ebene liefert:

$$\frac{6}{t}(-3) + 3(-4 + 4) + 8t \cdot 2 = 12$$
$$-\frac{18}{t} + 16t = 12$$
$$-18 + 16t^2 = 12t$$
$$16t^2 - 12t - 18 = 0 \Rightarrow t_1 = 1{,}5;\ t_2 = -0{,}75 \text{ (Lösung mit GTR)}$$

Nachweis, dass die Gerade g in keiner der Ebenen E_t liegt:

Lösungsvariante 1:

$$\frac{6}{t}(-3r) + 3(-4 + 4r) + 16t\,r = 12$$
$$-\frac{18}{t}r - 12 + 12r + 16tr = 12$$
$$r\left(-\frac{18}{t} + 12 + 16t\right) = 24 \Rightarrow r = \frac{24}{-\frac{18}{t} + 12 + 16t}$$

r ist definiert für alle $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ und für $r \neq 0{,}75$ und $r \neq -1{,}5$. In den beiden letzten Fällen wäre der Nenner 0. Man erhält sie durch Lösen der Gleichung $16t^2 + 12t - 18 = 0$ mit dem GTR. In diesen Fällen hat die Gerade und die Ebene keinen gemeinsamen Punkt, in allen anderen Fällen genau einen gemeinsamen Punkt. Es gibt also keine Ebene E_t, in der die Gerade g (vollständig) liegt.

Lösungsvariante 2:
Wenn eine Ebene E_t existierte, in der die Gerade g liegen würde, so müsste jeder Punkt der Geraden g in der Ebene E_t liegen. Das ist aber bereits beim Punkt P(0; – 4; 0) nicht der Fall:

$$\begin{aligned} \tfrac{6}{t} \cdot 0 + 3 \cdot (-4) + 8t \cdot 0 &= 12 \\ -12 &= 12 \text{ falsche Aussage} \end{aligned}$$

Also liegt die Gerade g in keiner der Ebenen E_t.

b) Ermittlung der Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene E_t mit den Koordinatenachsen:

x-Achse: $y = 0$; $z = 0$; $\frac{6}{t}\, x = 12 \Rightarrow x_S = 2t$ und $A_t(2t;\, 0;\, 0)$

y-Achse: $x = 0$; $z = 0$; $3y = 12 \Rightarrow y_S = 4$ und $B(0;\, 4;\, 0)$

z-Achse: $x = 0$; $y = 0$; $8tz = 12 \Rightarrow z_S = \frac{3}{2t}$ und $C_t(0;\, 0;\, \frac{3}{2t})$

Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide:

$\triangle OA_tB$ (rechtwinkliges Dreieck): $A_G = \frac{2t \cdot 4}{2} = 4t$

Volumen der Pyramide:

$V = \frac{1}{3} A_G\, h = \frac{1}{3} \cdot 4t \cdot \frac{3}{2t} = 2$ Das Volumen ist also konstant und von t unabhängig.

c) Ebene $E_{\frac{3}{4}}: 8x + 3y + 6z = 12$

Lösungsvariante 1:
Wie bereits in Teilaufgabe a) gezeigt, existieren für t = 0,75 und t = – 1,5 keine gemeinsamen Punkte der Ebene E_t mit der Geraden g. Die Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ muss also parallel zur Geraden g verlaufen.

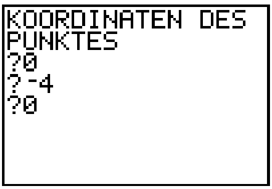
Lösungsvariante 2:
Schnitt der Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ mit der Geraden g:

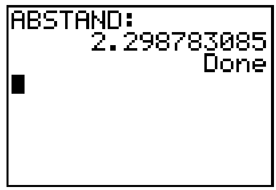
$$\begin{aligned} 8(-3r) + 3(-4 + 4r) + 6(2r) &= 12 \\ -24r - 12 + 12r + 12r &= 12 \\ 0 &= 24 \text{ falsche Aussage} \end{aligned}$$

Es existiert kein gemeinsamer Punkt der Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ mit der Geraden g.
Die Gerade g und die Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ sind parallel.

Abstand Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ zur Geraden g:

Lösungsvariante 1:
Ermittlung des Abstandes Punkt P(0; – 4; 0) zur Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ mit einem GTR-Programm, z.B. „APE“ liefert sofort: d ≈ 2,3.

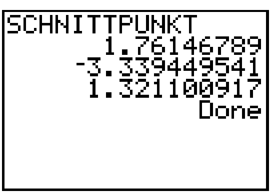


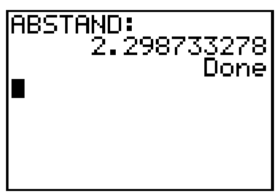


Lösungsvariante 2:
Ermittlung der Gleichung einer senkrechten Geraden zur Ebene $E_{\frac{3}{4}}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (q \in \mathbb{R})$$

Verwendung von GTR-Programmen zur Ermittlung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene und zur Berechnung des Abstandes von Schnittpunkt L zum Punkt P (z.B. die Programme „SGE“ und „Abstand“ *)*:





Lösungsvariante 3:
Wähle einen beliebigen Punkt der Ebene $E_{\frac{3}{4}}$, z. B. T(0; 0; 2). Bilde den normierten Normalenvektor $\vec{e}_n$ mit $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{8^2+3^2+6^2}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{109}}$.

$$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n|$$

$$d = \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{109}} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{109}} \right| = \left| \frac{-24}{\sqrt{109}} \right| = \frac{24}{\sqrt{109}} \approx 2{,}3$$

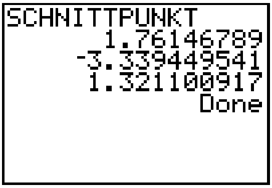
Die Menge aller gesuchten Punkte bildet eine Gerade, die parallel zur Geraden g und zur Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ verläuft und von beiden den Abstand $\frac{d}{2}$ besitzt.
Der Abstand $\frac{d}{2}$ ist $\frac{12}{\sqrt{109}} \approx 1{,}149$.

Die gesuchte Gerade hat also eine Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(w \in \mathbb{R})$.

Lösungsvariante 1:
Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes der senkrechten Gerade zur Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ mit dieser Ebene.
Ermittlung der Gleichung einer senkrechten Gerade zur Ebene $E_{\frac{3}{4}}$:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $(q \in \mathbb{R})$

Verwendung eines GTR-Programmes zur Ermittlung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene, z.B. „SGE“ *:*



Ermittlung des Mittelpunktes zwischen diesem Schnittpunkt und dem Punkt P z.B. mit einem GTR-Programm liefert: M(0,88; – 3,67; 0,66).

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,88 \\ -3,67 \\ 0,66 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(w \in \mathbb{R})$

Lösungsvariante 2:
Schnitt der Ebene $E_{\frac{3}{4}}$ mit der senkrechten Geraden:

$$\begin{aligned} 8(8q) + 3(-4 + 3q) + 6(6q) &= 12 \\ 64q - 12 + 9q + 36q &= 12 \\ 109q &= 24 \\ q &= \frac{24}{109} \end{aligned}$$

Lotfußpunkt L: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{192}{109} \\ \frac{72}{109} \\ \frac{144}{109} \end{pmatrix} \Rightarrow L\left(\frac{192}{109};\ -\frac{364}{109};\ \frac{144}{109}\right)$

Es sei P der auf g liegende Punkt P(0; – 4; 0)

Mittelpunkt M der Strecke $\overline{LP}$: M$\left(\frac{96}{109};\ \frac{-400}{109};\ \frac{72}{109}\right)$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{96}{109} \\ \frac{-400}{109} \\ \frac{72}{109} \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(w \in \mathbb{R})$

d) Ermittlung der Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene E_t, z.B.:
x = 0 und z = 0 ergibt: 3y = 12, also y = 4. B(0; 4; 0).
Ermittlung des normierten Normalenvektors der Ebene E_t ergibt:

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{t} \\ 3 \\ 8t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{36}{t^2} + 9 + 64t^2}}\ ;\ (t > 0)$$

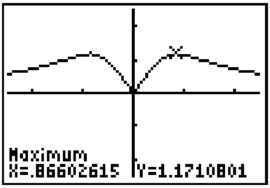
Abstand der Ebene E_t vom Koordinatenursprung:

$$d(t) = \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{t} \\ 3 \\ 8t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{36}{t^2} + 9 + 64t^2}} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{t} \\ 3 \\ 8t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{36}{t^2} + 9 + 64t^2}} \right|$$

$$d(t) = \left| \frac{12}{\sqrt{\frac{36}{t^2} + 9 + 64t^2}} \right|$$

Die Abstandsfunktion d wird nun in Abhängigkeit von t untersucht.

Lösungsvariante 1:
Darstellung der Funktion und Bestimmen des Maximums erfolgt mit dem GTR:



$\Rightarrow \tilde{t} \approx 0{,}866$;
Der maximale Abstand beträgt 1,17.

Lösungsvariante 2:
Die Funktion d(t) soll ein Maximum erreichen. Das ist der Fall, wenn der Nenner, d.h. der Radikant, minimal wird.

$d(t) = \frac{36}{t^2} + 9 + 64t^2$ $(t > 0)$; $\qquad d'(t) = -\frac{72}{t^3} + 128t$

$0 = -\frac{72}{t^3} + 128t$

$\frac{72}{t^3} = 128t$; $t^4 = \frac{9}{16} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow d_{MAX} = \frac{4 \cdot \sqrt{105}}{35}$; $t_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (entfällt)

Bewertungsvorschlag:

a) Gleichung der Ebene $E_{\frac{1}{4}}$; Koordinaten des Schnittpunktes;
Ansatz für Werte t; Werte t; Nachweis, dass die Gerade g in keiner der Ebenen E_t liegt — 5 BE

b) Koordinaten der Schnittpunkte der Ebenen E_t mit den Koordinatenachsen; Ansatz für Nachweis;
Nachweis, dass das Volumen vom Parameter t unabhängig ist — 3 BE

c) Nachweis der Parallelität; Abstand d; Ansatz für Gleichung; Gleichung der Geraden — 4 BE

d) Ansatz für Zielfunktion; Zielfunktion; Wert $\tilde{t}$ und maximaler Abstand — 3 BE

15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 3: Geometrie / Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) In dem beschriebenem Fall muss der Punkt S_t in der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E liegen.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(r, s \in \mathbb{R})$

Aus den Richtungsvektoren ist ersichtlich, dass die drei Punkte A, B und C nicht kollinear sind, die Ebene E also existiert.
Zur Vereinfachung wird die parameterfreie Ebenengleichung mit dem Programm „Ebene“ erzeugt:

```
B=
                0
C=
              -28
D=
              -42
             Done
```

E: $-14x - 28z = -42$
Vereinfachung: E: $x + 2z = 3$

Traditioneller Lösungsweg:

(I) $x = 1 - 2r - 4s$
(II) $y = 2 + 3r - s$
(III) $z = 1 + r + 2s$

-4(I) + (II) und 2(II) + (III) ergeben: (I') $x - 4y = -7 - 14r$
(II') $2y + z = 5 + 7r$

2(II') + (I') ergibt: Ebene E: $x + 2z = 3$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes S_t in E liefert:
$(1 + 2t) + 2(2 - 5t) = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$
Für $t = \frac{1}{4}$ sind die Punkte A, B, C und S_t nicht Eckpunkte einer Pyramide mit dreiseitiger Grundfläche.

b) *Lösungsvariante 1:*
Eine Pyramide mit den geforderten Eigenschaften liegt vor, falls gilt:
$\left|\overline{AS_t}\right| = \left|\overline{BS_t}\right| = \left|\overline{CS_t}\right|$

$\left|\overline{AS_t}\right| = \sqrt{(2t)^2 + (2 + 3t)^2 + (1 - 5t)^2}$;

$\left|\overline{BS_t}\right| = \sqrt{(2 + 2t)^2 + (-1 + 3t)^2 + (-5t)^2}$

$\left|\overline{CS_t}\right| = \sqrt{(4 + 2t)^2 + (3 + 3t)^2 + (-1 - 5t)^2}$

$\left|\overline{AS_t}\right| = \left|\overline{BS_t}\right| = \sqrt{38t^2 + 2t + 5}$; $\left|\overline{CS_t}\right| = \sqrt{38t^2 + 44t + 26}$

Gleichsetzen:
$$38t^2 + 2t + 5 = 38t^2 + 44t + 26$$
$$2t + 5 = 44t + 26 \qquad \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Für $t = -\frac{1}{2}$ sind die Punkte A, B, C und $S_{-\frac{1}{2}}$ Eckpunkte einer Pyramide mit den geforderten Eigenschaften.

Lösungsvariante 2:
Eine Pyramide mit den geforderten Eigenschaften liegt vor, wenn der Lotfußpunkt L von S_t bezüglich der Ebene E der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC (Grundfläche) ist, denn dieser Punkt liegt gleich weit von allen Eckpunkten entfernt. Damit liegen auch alle Punkte der Lotgeraden $g(LS_t)$ gleich weit von den Punkten A, B und C entfernt.
Man betrachte zu den Dreiecksseiten senkrechte Ebenen durch die Mittelpunkte der Seiten:

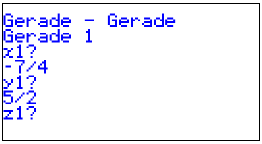
E_1: $E_1 \perp \overrightarrow{AB}$ und $M_{\overline{AB}} \in E_1$ ($\overrightarrow{AB}$ ist Normalenvektor von E_1)
$-2x + 3y + z = 12$
E_2: $E_2 \perp \overrightarrow{AC}$ und $M_{\overline{AC}} \in E_2$ ($\overrightarrow{AC}$ ist Normalenvektor von E_2)
$-4x - y + 2z = \frac{13}{2}$

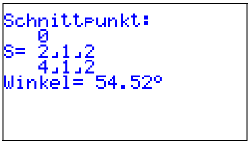
Die Lotgerade ist Schnittgerade von E_1 und E_2.

Schnittgerade l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$.

(Nutzung eines GTR-Programms zum Schnitt zweier Ebenen wird empfohlen)

Wenn es einen Wert t gibt, der die Bedingung erfüllt, so muss dieser auf der Geraden l und auf der durch S_t beschriebenen Gerade liegen.
Nutzung eines GTR-Programms zum Schnitt zweier Geraden liefert:





S(0; 2,5; 4,5)

Für t muss entsprechend der x-Koordinate der Geraden s_t gelten: $1 + 2t = 0$.

$\Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

Die Überprüfung anhand der y- und z-Koordinate liefert:

Für $t = -\frac{1}{2}$ sind die Punkte A, B, C und S_t Eckpunkte einer geraden Pyramide mit der Grundfläche ABC.

c) $S_1(3; 7; -3)$; E: $x + 2z = 3$
Die Lotgerade vom Punkt S_1 auf die Ebene E schneidet diese im Lotfußpunkt F.

Lotgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(r \in \mathbb{R})$

Schnitt mit der Ebene E: $(3 + r) + 2(-3 + 2r) = 3 \Rightarrow r = \frac{6}{5}$; $F(\frac{21}{5}; 7; -\frac{3}{5})$

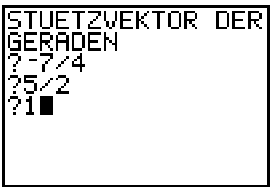
Es ist zu zeigen, dass dieser Punkt außerhalb der Grundfläche ABC liegt.

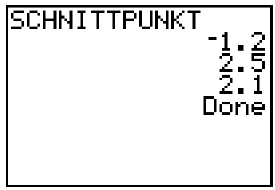
Lösungsvariante 1:
Wenn der Punkt im Dreieck ABC liegen würde, müsste die x-Koordinate im Intervall $-3 \le x \le 1$, die y-Koordinate im Intervall $1 \le y \le 5$ und die z-Koordinate im Intervall $1 \le z \le 3$ liegen. Das ist für keine der Koordinaten des Punktes F erfüllt. Der Punkt F liegt außerhalb der Grundfläche ABC. (Der Nachweis für bereits eine Koordinate hätte gereicht.)

Lösungsvariante 2:
In Teilaufgabe b) wurde bereits die Lotgerade durch den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC bestimmt. Schneidet man diese mit der Ebene E der Grundfläche, erhält man den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC.

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

Schnitt mit der Ebene E (Programm „SGE“) liefert:





M(– 1,2; 2,5; 2,1)

Der Radius r des Umkreises ist der Abstand der Punkte A und M (Programm „Abstand“*):*

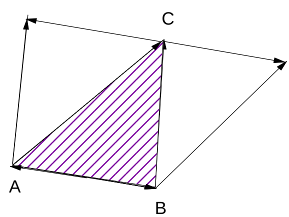
r = 2,5099

Der Abstand des Punktes F vom Punkt M beträgt 7,5299, ist also deutlich größer als der Radius des Umkreises. Da der Punkt F außerhalb des Umkreises des Dreiecks ABC liegt, liegt er erst recht außerhalb der Grundfläche der Pyramide. w.z.b.w.

Lösungsvariante 3:

Der Punkt F ist genau dann ein Punkt innerhalb der Grundfläche der Pyramide, wenn er sowohl in dem durch die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ als auch in dem durch die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BA}$ aufgespannten Parallelogramm liegt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Parallelogramm: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$0 \le r \le 1;\ 0 \le s \le 1$

Punktprobe für Punkt F:

$$\frac{21}{5} = 1 - 2r - 4s \Rightarrow -2r - 4s = \frac{21}{5} - 1$$

$$7 = 2 + 3r - s \ \Rightarrow 3r - s = 5$$

$$-\frac{3}{5} = 1 + r + 2s$$

Lösung des Gleichungssystems mit GTR liefert r = 1,2 und s = – 1,4.

Mithilfe der dritten Gleichung kann die Probe erfolgen (nicht zwingend notwendig, da Schnittpunkt F in der Ebene E liegen muss.)

Beide Parameter verweisen auf einen Punkt außerhalb des durch die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ aufgespannten Parallelogramms. Damit ist bereits gezeigt, dass der Punkt F außerhalb der Grundfläche ABC liegt.

Analog könnte der Nachweis mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BA}$ geführt werden.

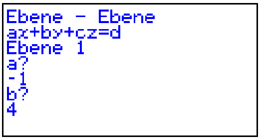
Bewertungsvorschlag:

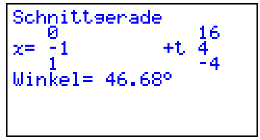
a)	Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene; Ansatz für Wert t; Wert t	3 BE
b)	Erfassen einer Lösungsidee; Abstände der Punkte S_t zu den Eckpunkten der Grundfläche oder Gleichung der Lotgeraden; Ansatz für t; Wert t	4 BE
c)	Koordinaten des Höhenfußpunktes; Ansatz für Nachweis; Nachweis	3 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B 4: Geometrie / Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) Zur Ermittlung einer Gleichung der Schnittgeraden g genügt es, zwei spezielle Ebenen E_a zum Schnitt zu bringen, da die Existenz der Schnittgerade in der Aufgabenstellung vorausgesetzt ist.
Wähle:
E_0: $-x + 4y = -4$
E_1: $4y + 4z = 0$
Das Gleichungssystem hat zwei Gleichungen und drei Variablen. Wähle als freien Parameter $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$)
E_1: $4y + 4t = 0 \Rightarrow y = -t$; E_0: $-x - 4t = -4 \Rightarrow x = 4 - 4t$
Gleichung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$)

Eine weitere Möglichkeit besteht im Ermitteln einer Gleichung der Schnittgeraden mit einem GTR-Programm:





(Die hier ermittelte Gleichung beschreibt dieselbe Gerade g, wie sich leicht nachweisen lässt.)

b) Richtungsvektoren der Ebene $\tilde{E}$ sind u.a. der Vektor $\overrightarrow{BC}$ und der Normalenvektor der Ebene E_2.

E_2: $3x + 4y + 16z = 12$; $\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{E} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

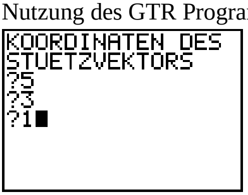
Umformen in parameterfreie Form: (*Lösungsvariante 1*):

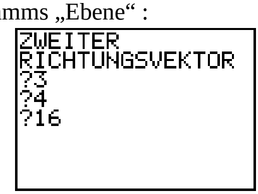
(I) $x = 5 - 7t + 3s$
(II) $y = 3 - 2t + 4s$
(III) $z = 1 + t + 16s$

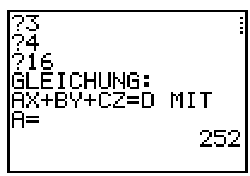
$7 \cdot$ (III) + (I) und $2 \cdot$ (III) + (II) liefert: (I') $x + 7z = 12 + 115s$
(II') $y + 2z = 5 + 36s$

(I') $\cdot$ 36 + (II') $\cdot$ 115 liefert: $36x - 115y + 22z = -143$

Lösungsvariante 2:
Nutzung des GTR Programms „Ebene“ :





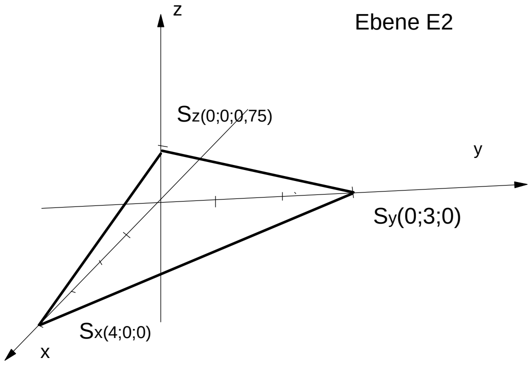


$\tilde{E}$: $252x - 805y + 154z = -1001$
Diese Gleichung ist gleichwertig der Gleichung $36x - 115y + 22z = -143$, wie sich leicht zeigen lässt.

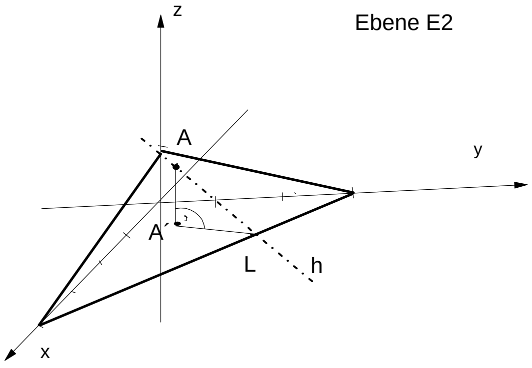
c) Zur Veranschaulichung der Ebene E_2 werden die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen genutzt:
x-Achse: $y = 0$; $z = 0$: $3x = 12 \Rightarrow x = 4$ $S_x(4; 0; 0)$

y-Achse: x = 0; z = 0: 4y = 12 ⇒ y = 3 $S_y(0; 3; 0)$

z-Achse: x = 0; y = 0: 16z = 12 ⇒ z = $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ $S_z(0; 0; \frac{3}{4})$



Der Punkt A liegt in der Ebene E_2.
Es gibt unendlich viele Geraden durch den Punkt A in der Ebene E_2, die die x-y-Ebene schneiden.
Alle diese Geraden schneiden die x-y-Ebene in Punkten der Spurgeraden k der Ebene E_2. Die Gerade h ist diejenige dieser Geraden, die den kürzesten Abstand zur Geraden k besitzt.



Gleichung der Geraden k (Schnitt der Ebene E_2 mit der x-y-Ebene):
E_2: 3x + 4y + 16z = 12; x-y-Ebene: z = 0

k: 3x + 4y = 12

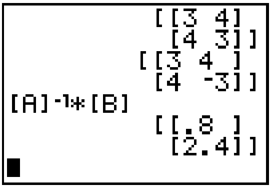
Lösungsvariante 1:
Der Punkt A'(– 1; 0) ist der Lotfußpunkt des Punktes A in der x-y-Ebene.
Vom Punkt A' wird in der x-y-Ebene das Lot auf die Gerade k gefällt, um den minimalen Abstand zu ermitteln.

Normalenvektor der Geraden k: $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \; (s \in \mathbb{R})$

(I) $x = -1 + 3s$
(II) $y = 4s$

4(I) – 3(II) liefert Gerade l: $4x - 3y = -4$
Schnitt der Geraden k mit der Geraden l: $3x + 4y = 12$
$4x - 3y = -4$

Lösung des Gleichungssystems mit GTR liefert:



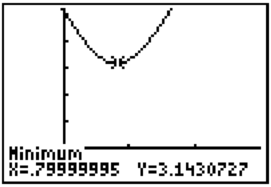
Der Lotfußpunkt L hat die Koordinaten L(0,8; 2,4; 0).

Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und L: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \\ -\frac{15}{16} \end{pmatrix} \; (r \in \mathbb{R})$

Lösungsvariante 2:
k: $3x + 4y = 12$ bzw.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(q \in \mathbb{R})$ (Verwendung der Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen)

Der Punkt P_t ist ein beliebiger Punkt der Geraden k. Er hat die Koordinaten $P_t(4 - 4q; 3q; 0)$.
Der Abstand des Punktes A vom Punkt P_t kann beschrieben werden als
$d(q) = \sqrt{(5 - 4q)^2 + 9q^2 + \left(\frac{15}{16}\right)^2} \; (q \in \mathbb{R})$.

Diese Funktion wird mit dem GTR auf Minima untersucht:



$q_{MIN} = 0{,}8 \Rightarrow P_{0,8}(0{,}8; 2{,}4; 0) = L$
(s. *Lösungsvariante 1*)

Die Gleichung der Geraden h wird nun wie in Lösungsvariante 1 durch die Punkte A und L aufgestellt.

Bewertungsvorschlag:

a) zwei Ebenengleichungen; Ansatz für Gleichung der Schnittgerade; Gleichung der Schnittgerade — 3 BE

b) Ansatz für Gleichung der Ebene F; Gleichung der Ebene F — 2 BE

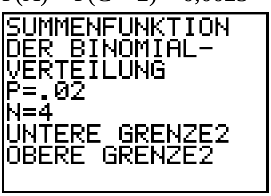
c) Veranschaulichung der Ebene E_2 Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E_2 mit der x-y-Ebene; Ansatz für weiteren Punkt dieser Geraden bzw. Lotfußpunkt vom Punkt A in die x-y-Ebene; Ansatz für Gleichung der Geraden h; Gleichung der Gerade h — 5 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C1 : Stochastik

a) C ... Anzahl der Ausschussstücke
C ist binomialverteilt mit n = 4 und p = 0,02

P(A) = P(C = 2) = 0,0023 (Ermittlung mit GTR-Programm, z.B. SUMBIN)



Lösung mit TI 83 (Eingabemaske)

Ansatz für klassischen Lösungsweg:

$$P(C = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^2$$

Prüfung Margret's Behauptung:
Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Batterien Ausschuss sind:
$P(C = 4) = 0{,}02^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$
Wahrscheinlichkeit p, im Lotto „6 aus 49“ sechs richtige Zahlen zu tippen:

$$p = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7{,}151 \cdot 10^{-8}$$

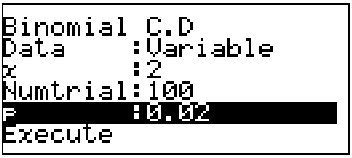
Margret's Behauptung ist falsch. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Batterien Ausschuss sind, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, im Lotto „6 aus 49" sechs richtige Zahlen zu tippen.

b) D ... Anzahl der in einem Karton zu erwartenden Ausschussstücke:
D ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}02$
Erwartungswert: $E(D) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}02 = 2$

In einem Karton sind durchschnittlich 2 Ausschussstücke zu erwarten.

Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton höchstens 2 % der Batterien Ausschuss sind: 2 % von 100 Batterien sind 2 Batterien.

Lösungsvariante 1:
Nutzung von GTR-Programmen zur Binomialverteilung, siehe Teilaufgabe a):
$P(D \leq 2) = 0{,}6767$
Lösungsvariante 2:
Nutzung von GTR-Routinen im Statistik-Menue:



Das Bild zeigt die Eingabemaske beim casio cfx 9850 G plus.

Lösungsvariante 3:
Ablesen der Wahrscheinlichkeit aus einer Tabelle der Binomialverteilung

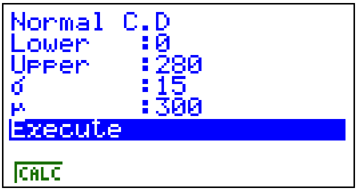
Lösungsvariante 4:
Klassischer Ansatz:

$$P(D \leq 2) = \binom{100}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98}$$

Hinweis: Die Näherungsformel für die Binomialverteilung nach MOIVRE - LAPLACE sollte hier nicht verwendet werden, da die Faustregel $np(1 - p) > 9$ nicht erfüllt ist.

c) Y ... Lebensdauer der Batterien in Stunden
Y ist normalverteilt mit $\mu = 300$ und $\sigma = 15$.
$P(Y \leq 280) = 0{,}0912$

Verwendung eines GTR-Programms zur Normalverteilung:



Rechnerische Lösung:

$P(Y \leq 280) = \Phi\left(\frac{280-300}{15}\right) = \Phi(-1{,}333) = 1 - \Phi(1{,}333) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 0,09.

d) Die Zufallsgröße E beschreibt den Preis einer Batterie in DM, den der Betrieb vom Händler gezahlt bekommt. Der Erwartungswert der Zufallsgröße E sollte mindestens 1,10 DM betragen, damit der minimal angestrebte Gewinn erwirtschaftet wird.

k ... Preis der Batterie für den Händler

e_i in DM	k	k – 3
$P(E = e_i)$	0,98	0,02

Berechnung des minimalen Abgabepreises (bei minimalem Erwartungswert):

$1{,}10 = k \cdot 0{,}98 + 0{,}02(k-3)$

$1{,}10 = k \cdot 0{,}98 + 0{,}02k - 0{,}06$

$1{,}16 = k$

Wenn der Gewinn mindestens 0,10 DM betragen soll, beträgt der minimale Abgabepreis 1,16 DM.

Bei einem Abgabepreis von 1,16 DM erzielt der Betrieb einen Gewinn von 0,10 DM. Beim höchstmöglichen Abgabepreis von 1,32 DM kommen die hier mehr eingenommenen 16 Pfennige pro Batterie zum Gewinn hinzu. Der höchstmögliche durchschnittliche Gewinn liegt also bei 26 Pfennigen pro Batterie.

Bewertungsvorschlag:

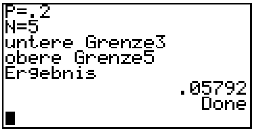
a) Wahrscheinlichkeit; Ansatz für Überprüfung; Überprüfung und Schlussfolgerung	3 BE
b) Erwartungswert; Wahrscheinlichkeit	2 BE
c) Ansatz; Wahrscheinlichkeit	2 BE
d) Ansatz; minimaler Abgabepreis; höchstmöglicher Gewinn	3 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 2: Stochastik

a) $P(A) = 0{,}4^3 = 0{,}064$
Das Ereignis tritt ein, falls 3, 4 oder 5 Einwohner anderer Staaten ausgelost werden.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Einwohner anderer Staaten unter den Ausgelosten. X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}2$.

$P(B) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

Die Lösung mithilfe eines GTR-Programms zur Binomialverteilung (vgl. *Abiturprüfung 1998/99, GK/LK, Gymnasium Sachsen*) liefert:
$P(B) = 0{,}05792$.

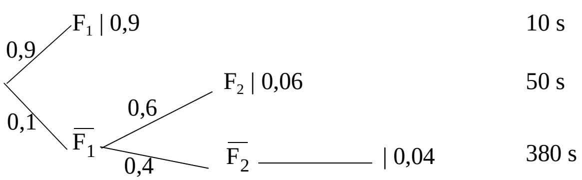


Lösungsvariante: $P(B) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}2^5 = 0{,}0579$

b) p ... Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück den Zielflughafen Frankfurt hat
p^2 ... Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gezogene Gepäckstücke den Zielflughafen Frankfurt haben
$1 - p^2$ ... Wahrscheinlichkeit, dass von zwei zufällig gezogenen Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen Frankfurt hat

$1 - p^2 = 0{,}90 \Rightarrow 0{,}10 = p^2$ und $p = 0{,}3162$

c) Kontrolle 1 Kontrolle 2 Kontrolle 3 benötigte Zeit



$P(F_1) = 0{,}9$; $P_{\overline{F_1}}(F_2) = 0{,}06$; $P_{\overline{F_1}}(\overline{F_2}) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$

Verteilung der Zufallsgröße Z:

Zeit Z_i	10s	50s	380s
$P(Z = Z_i)$	0,9	0,06	0,04

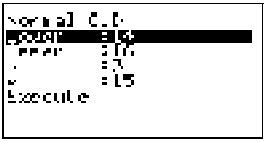
Erwartungswert E der Zufallsgröße Z:
$E(Z) = 10 \cdot 0{,}9 + 50 \cdot 0{,}06 + 380 \cdot 0{,}04 = 27{,}2$
Durchschnittlich werden 27,2 Sekunden für die Kontrolle benötigt.

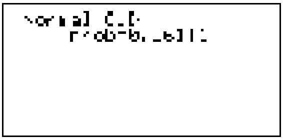
d) Y ... Masse der Gepäckstücke
Y ist normalverteilt mit $\mu = 15$ kg und $\sigma = 3$ kg.

$$
\begin{aligned}
P(14 \le Y \le 16) &= P(Y \le 16) - P(Y < 14) \\
&= \Phi\left(\frac{16-15}{3}\right) - \Phi\left(\frac{14-15}{3}\right) = \Phi(0{,}33) - \Phi(-0{,}33) \\
&= \Phi(0{,}33) - 1 + \Phi(0{,}33) \\
&= 0{,}6293 - 1 + 0{,}6293 \\
&= 0{,}2586
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,2586.

Lösungsvariante:
Ermitteln über Programm zur Normalverteilung oder über Routinen des GTR, z.B. mit casio cfx 9850 plus:





Bewertungsvorschlag:

a)	Wahrscheinlichkeit P(A); Wahrscheinlichkeit P(B)	2 BE
b)	Ansatz für Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit	2 BE
c)	Wahrscheinlichkeit Werte der Zufallsgröße; Verteilung der Zufallsgröße; Erwartungswert	4 BE
d)	Ansatz für Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit	2 BE
		10 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1999 / 2000

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis: Der Prüfling hatte nach Empfehlung durch die Lehrkraft je eine Aufgabe aus den Gebieten L1, L2 und L3 zur Bearbeitung auszuwählen.

Gebiet L1: Analysis / Aufgabe 1.1:

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $y = f_a(x) = \frac{5e^x}{e^x + a}$, $x, a \in \mathbb{R}, a > 0$.

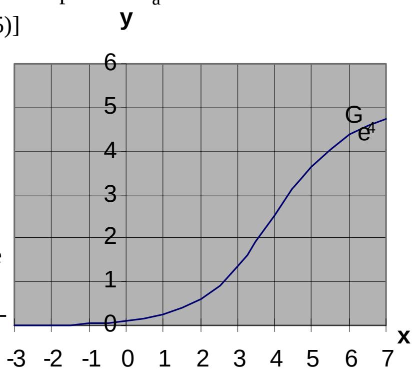
Ihre Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem seien mit G_a bezeichnet.

a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf Schnittpunkte mit der y-Achse und die Funktionen f_a auf Monotonie und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Wendepunkt W_a.
Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte W_a.
[Ergebnis zur Kontrolle: $W_a(\ln a| \, 2{,}5)$]

Der Graph G_a mit $a = e^4$ ist in einem Intervall dargestellt.
Zeichnen Sie den Graphen G_2 im Intervall $-2 \le x \le 6$.

Hinweis:
Der Graph darf in das nebenstehende Koordinatensystem gezeichnet werden. In diesem Fall ist das Aufgabenblatt mit dem Namen zu beschriften und der Prüfungsarbeit beizufügen.



b) Weisen Sie nach, dass alle Wendetangenten t_a der Graphen G_a zueinander parallel sind.

Unter allen Wendetangenten t_a existiert genau eine, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Ermitteln Sie für diesen Fall den Wert des Parameters a.

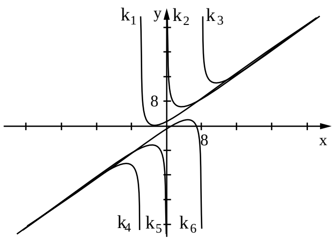
Die Wendetangente t_a, die zu ihnen in den Wendepunkten W_a senkrecht verlaufenden Geraden und die x-Achse bilden jeweils ein Dreieck.
Zeigen Sie, dass diese Dreiecke gleiche Flächeninhalte besitzen.

c) Die beiden Graphen G_a für $a = 2$ und $a = e^4$ und die Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 6$ begrenzen eine Fläche.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

Gebiet L1: Analysis / Aufgabe 1.2:

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $y = f_a(x) = x + \frac{9}{x-2a}$, $a, x \in \mathbb{R}, x \neq 2a$
sowie die Funktionenschar g_b durch $y = g_b(x) = x + b$, $b, x \in \mathbb{R}$.
In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Graphen der Funktionen der Schar f_a mit F_a und die Graphen der Schar g_b mit G_b bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen der Schar f_a und untersuchen Sie deren Anzahl durch eine vollständige Fallunterscheidung.
Geben Sie die Gleichung der Polasymptoten der Graphen F_a an und weisen Sie nach, dass genau ein Graph G_b auch eine Asymptote der Graphen F_a ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte der Graphen F_a und weisen Sie nach, dass die Graphen F_a keine Wendepunkte besitzen.
Zeigen Sie, dass die Ortskurve der Hochpunkte der Graphen F_a einer der Graphen G_b ist.
Nebenstehende Abbildung zeigt sechs Kurven k_i ($i = 1...6$). Je zwei Kurven gehören zu einem der Graphen F_a mit $a \in \mathbb{Z}$. Ordnen Sie die Kurven k_i den Graphen F_a zu und geben Sie den jeweiligen Wert des Parameters a an.



b) Der Graph F_5 und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.
Genau zwei Graphen G_b schneiden den Graphen F_5 rechtwinklig.
Berechnen Sie den Wert des Parameters b für einen dieser Graphen G_b.

Gebiet L2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
$A(6|-12|22)$, $B(38|4|22)$ und $M(19|2|19)$ sowie die Ebene
E_1: $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 65 = 0$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und M bestimmen eine Ebene E_2.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_2 und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, den diese Ebene mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
[Mögliches Ergebnis zur Kontrolle: E_2: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 80 = 0$]

b) Die Punkte A und B seien Eckpunkte, der Punkt M sei der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogrammes ABCD. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C und D und zeigen Sie, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.

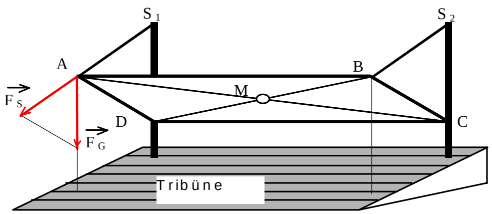
Das Dach über dem Teilbereich einer Tribüne sei durch das in Aufgabe b) genannte Rechteck ABCD beschrieben. Die x_1x_2-Ebene sei die Horizontalebene. In den Punkten C und D ist das Dach an zwei senkrecht (bezüglich der Horizontalebene) stehenden Masten befestigt. Von den Punkten $S_1(0|\ 0|\ 26)$ und $S_2(32|\ 16|\ 26)$ der Masten führt jeweils ein Befestigungsseil zum Punkt A bzw. zum Punkt B. Die Tribüne liege in der Ebene E_1. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

c) Im Punkt M soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Abstand zur Tribüne von mindestens 9 m vorgeschrieben.
Prüfen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

d) Die Punkte A'(6| – 12| 1), B', C' und D' seien die Projektion der Punkte A, B, C und D auf die Tribüne mittels zur Horizontalebene senkrechter Strahlen. Sie seien die Eckpunkte der überdachten Fläche der Tribüne.
Berechnen Sie den Inhalt dieser überdachten Fläche.

e) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, den die Seile mit dem Dach einschließen. Im Punkt A wirkt eine Gewichtskraft $\vec{F}_G$, mit $|\vec{F}_G| = 10000$ N, senkrecht zur Horizontalebene. Diese Kraft kann in eine Komponente $\vec{F}_S$, die in Richtung der Befestigungsseile wirkt, und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt, zerlegt werden.
Ermitteln Sie den Betrag der Kraft $\vec{F}_S$.

Skizze nicht maßstäblich



Gebiet L2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.2

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem

die Menge der Geraden g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix}$, $\quad a, t \in \mathbb{R}$, und

die Menge der Ebenen E_b: $-x_1 + 2x_2 + bx_3 - 1 - b = 0$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Geraden g_1 und g_{-1} eine Ebene E bestimmen.
Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an.
[Mögliches Ergebnis zur Kontrolle: E: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$]
Zeigen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene E liegen.

b) Die Ebene E (aus Aufgabe a)) wird von den Koordinatenachsen jeweils in den Punkten P_1, P_2, bzw. P_3 durchstoßen. Die Punkte P_1, P_2, P_3 und der Koordinatenursprung O bilden die Pyramide $P_1P_2P_3O$.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide $P_1P_2P_3O$, den Abstand des Koordinatenursprungs O von der Ebene E und die Maßzahl des Flächeninhaltes des Dreiecks $P_1P_2P_3$.

Durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und O geht eine Kugel K.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kugel K.

Weisen Sie nach, dass der Mittelpunkt der Kugel K außerhalb der Pyramide $P_1P_2P_3O$ liegt.

c) Unter den Ebenen E_b gibt es genau zwei Ebenen, die mit der Ebene E_0 einen Winkel von 60° einschließen.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Werte des Parameters b.

Gebiet L3: Wahrscheinlichkeitsrechnung / Aufgabe 3.1

Ein Versandhaus wird von einer Firma mit Artikeln für Haushaltselektronik beliefert. Eine Lieferung umfasst 200 Artikel, bei denen von einer Ausschussquote von p = 0,06 ausgegangen wird. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl defekter Artikel in der Lieferung.

a) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße.

Prüfen Sie, ob die Verteilung der Zufallsgröße X durch eine Normalverteilung approximiert werden kann.

b) Bei der Qualitätskontrolle einer Stichprobe wurden gehäuft defekte Artikel festgestellt. Daraufhin ist eine Gesamtüberprüfung einer Lieferung ($n = 200$, Zufallsgröße X sei normalverteilt) durchgeführt worden, bei der 16 defekte Artikel beobachtet wurden.
Prüfen Sie durch ein geeignetes Testverfahren, ob die beobachtete Anzahl der defekten Artikel in der Lieferung als zufällige Abweichung von dem in Teilaufgabe a) berechneten Erwartungswert angesehen werden kann.

c) Um zukünftig genauere Aussagen über den Ausschuss in einer Lieferung treffen zu können, soll die Anzahl der Artikel in der Stichprobe für die Qualitätskontrolle neu festgelegt werden. Die Ausschussquote betrage weiterhin $p = 0{,}06$.
Ermitteln Sie die Mindestanzahl der Artikel in einer Stichprobe, so dass die Stichprobe mit höchstens 10 % Wahrscheinlichkeit keinen defekten Artikel enthält.

Gebiet L3: Analysis / Aufgabe 3.2

Gegeben ist die Funktion g durch

$$y = g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Der Graph sei mit G bezeichnet.

a) Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $0 < x \leq 8$.

Im Punkt $P(x_0|\, g(x_0))$ wird an den Graphen G die Tangente t gelegt. Sie schneidet die x-Achse im Punkt $S(2|\, 0)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t und zeichnen Sie diese in dasselbe Koordinatensystem.

b) Der Graph, die Tangente t (aus Teilaufgabe a)), die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

c) Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$3x \cdot f'(x) = 4 \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}, x > 0, f(x) > 0,$$

und zeigen Sie, dass die Funktion g eine Lösung der Differenzialgleichung ist.

Gebiet L3: Analytische Geometrie / Aufgabe 3.3

Ein gerader Kreiszylinder mit einem Durchmesser von 6 cm stehe auf einer Ebene. Der Zylinder werde von einer Ebene geschnitten, welche unter einem Winkel von 30° zur Standebene des Zylinders verläuft. Die dabei entstehende Figur sei eine Ellipse.

a) Beschreiben Sie die Ellipse durch Angabe der Maßzahlen für die große Halbachse a, die kleine Halbachse b und die lineare Exzentrizität e.

Die Ellipse soll punktweise konstruiert werden. Konstruieren Sie mindestens zwölf Ellipsenpunkte und skizzieren Sie die Ellipse.

Die Ellipse liege in der Ebene eines kartesischen Koordinatensystems in Mittelpunktslage.

b) Geben Sie für diesen Fall eine Gleichung an, die die Ellipse in diesem System beschreibt.

[Teilergebnis zur Kontrolle: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{b^2} = 1$]

Für einen Kreis um den Koordinatenursprung sei die Maßzahl seines Radius $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Der Kreis schneidet die Ellipse. Berechnen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von Kreis und Ellipse.

c) Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen und die die gegebene Ellipse in dem Hauptscheitelpunkt $H(x > 0| \, 0)$ berühren, können die Ellipse in genau zwei Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte nähern sich bei kleiner werdenden Radien dem Punkt H, bis sie für einen bestimmten Radius r_S im Punkt H zusammenfallen.
(Der Kreis mit dem Radius r_S wird Scheitelkrümmungskreis genannt und ist eine sehr gute Näherung für die Krümmung einer Ellipse in der Umgebung des Punktes H.)

Zeigen Sie, dass die Koordinaten der Punkte des Kreises mit dem Radius r_S die Gleichung $y^2 = -x^2 + (4\sqrt{3} - 2r_S)x + 4(r_S\sqrt{3} - 3)$ erfüllen und dass der Radius r_S den Wert $\frac{b^2}{a}$ für die gegebene Ellipse annimmt.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Schnittpunkte von G_a mit der y-Achse:

Für x = 0 folgt $f_a(0) = \frac{5e^0}{e^0 + a} = \frac{5}{1+a} \Rightarrow S_y(0|\ \frac{5}{1+a})$.

Monotonieverhalten der Funktionen f_a:

Zu prüfen ist, ob $\left.\begin{matrix} f_a'(x) > 0 \\ f_a'(x) < 0 \end{matrix}\right\}$ für alle x $\Rightarrow$ Funktion $\left\{\begin{matrix} \text{monoton steigend} \\ \text{monoton fallend} \end{matrix}\right.$.

Es ist $f_a'(x) = \left[\frac{5e^x}{(e^x + a)}\right]' = \left[\frac{5e^x(e^x + a) - 5e^x e^x}{(e^x + a)^2}\right] = \left[\frac{5e^x a}{(e^x + a)^2}\right]$

$\Rightarrow$ wegen $e^x > 0$ mit $a > 0$ ist $f_a'(x) > 0$ für alle x
$\Rightarrow$ Die Funktionen sind monoton steigend.

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

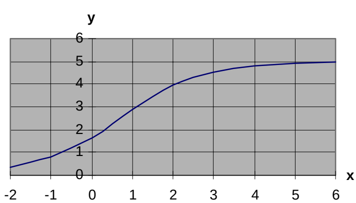
$$\lim_{x \to \infty} \frac{5e^x}{e^x + a} = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{1 + \frac{a}{e^x}} = 5;\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{5e^x}{e^x + a} = \frac{0}{a} = 0$$

Koordinaten der Wendepunkte W_a der Graphen G_a:
Aus $f_a''(x) = 0$ folgt mit $f_a'(x)$

$$0 = \left[\frac{5e^x a}{(e^x + a)^2}\right]' = \frac{5e^x a(e^x + a)^2 - 5e^x a \cdot 2(e^x + a)e^x}{(e^x + a)^4} = \frac{-5ae^x(e^x - a)}{(e^x + a)^3}, \text{ also}$$

$0 = a - e^x$, d.h. $a = e^x \Rightarrow x_W = \ln a$, $y_W = f_a(\ln a) = \frac{5e^{\ln a}}{e^{\ln a} + a} = 2{,}5 \Rightarrow W(\ln a|\ 2{,}5)$

Graph G_2:



b) Parallelität der Wendetangenten t_a der Graphen G_a:

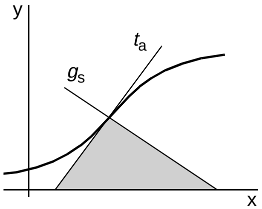
Für W(ln a| 2,5) folgt $f_a'(\ln a) = \frac{5e^{\ln a}a}{(e^{\ln a} + a)^2} = \frac{5a^2}{(a+a)^2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$\Rightarrow m_W = 1{,}25$; die Steigung ist unabhängig von a, also für alle Wendepunkte konstant. Demzufolge sind alle Wendetangenten zueinander parallel.

Parameter a der Wendetangente durch Koordinatenursprung:
Wendetangente allgemein: $(y - y_W) = m_W(x - x_w)$;
hier t_a: $y - 2{,}5 = 1{,}25(x - \ln a)$ oder $y = 1{,}25x - 1{,}25\ln a + 2{,}5$;
aus $O(0; 0)$ auf t_a folgt $0 = -1{,}25\ln a + 2{,}5$, $2 = \ln a \Rightarrow a = e^2$

Flächeninhalt spezieller Dreiecke:

Es gilt $W(\ln a|\ 2{,}5)$, t_a: $y = 1{,}25x - 1{,}25\ln a + 2{,}5$
$\Rightarrow$ Schnittpunkt von t_a mit der x-Achse:
$S_t(\ln a - 2|\ 0)$
Für die zur Wendetangente senkrechte Gerade gilt:
g_S: $y - 2{,}5 = -\frac{1}{1{,}25}(x - \ln a)$
$\Rightarrow$ Schnittpunkt von g_S mit der x-Achse:
$0 = -\frac{1}{1{,}25}(x - \ln a) + 2{,}5 \Rightarrow S_g(\ln a + 3{,}125|\ 0)$.



Flächeninhalt des so erzeugten Dreiecks: $A_\Delta = \frac{1}{2} y_W \cdot (\Delta x)$,

$A_\Delta = \frac{1}{2} 2{,}5((\ln a + 3{,}125) - (\ln a - 2)) = \frac{1}{2} 2{,}5(3{,}125 + 2) = \frac{205}{32} \approx 6{,}406$.

Damit ist der Flächeninhalt derartiger Dreiecke konstant und unabhängig von a.

c) Flächeninhalt einer Fläche zwischen zwei Kurven:

Die zwei ausgewählten Funktionen sind $f_2(x) = \frac{5e^x}{e^x + 2}$ und $f_{e^4}(x) = \frac{5e^x}{e^x + e^4}$.
Aus a) ist bekannt: $f_2(x) > f_{e^4}(x)$ für endliches x.

$$\Rightarrow A = \int_{-2}^{6} (f_2(x) - f_{e^4}(x))dx = \int_{-2}^{6} \left(\frac{5e^x}{e^x + 2} - \frac{5e^x}{e^x + e^4} \right) dx$$

Nach Substitutionsregel $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$, falls $f(x) \neq 0$ für alle x, gilt:

$$A = \left[5\ln\left|\frac{e^x + 2}{e^x + e^4}\right| \right]_{-2}^{6} = 5\ln\left|\frac{(e^6 + 2)(e^{-2} + e^4)}{(e^{-2} + 2)(e^6 + e^4)}\right| \approx 15{,}609$$

Die eingeschlossene Fläche hat einen Inhalt von etwa 15,6 FE.

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse	1 BE
	Untersuchung des Monotonieverhaltens	4 BE
	Untersuchung der Grenzwerte	6 BE
	Berechnen der Koordinaten der Wendepunkte	5 BE
	Zeichnen des Graphen	4 BE
b)	Nachweisen der Parallelität der Wendetangenten	4 BE
	Ermitteln des Wertes des Parameters a	5 BE
	Nachweisen der Flächengleichheit	8 BE
c)	Ermitteln des Flächeninhaltes	8 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Nullstellen von f_a:

Aus y = 0 folgt $0 = x + \frac{9}{x-2a} = \frac{x^2-2ax+9}{x-2a}$, also $0 = x^2 - 2ax + 9$

$\Rightarrow x_{0_{1,2}} = a \pm \sqrt{a^2-9}$

Fallunterscheidung für die Lösungsanzahl in Abhängigkeit von a:

$a^2 = 9$	$a^2 < 9$	$a^2 > 9$
$a = +3$ oder $a = -3$	$-3 < a < 3$	$a < -3$ oder $a > 3$
eine Nullstelle	keine Nullstelle	zwei Nullstellen

Asymptoten von f_a:
Polasymptote ist die Senkrechte $x = 2a$.
Die Asymptote für $x \to \pm\infty$ ergibt sich aus $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{9}{x-2a}\right) = x$.
Sie ist identisch mit dem Graphen der Funktion $g_b(x)$ für b = 0, also $g_0(x) = x$.

Lokale Extrempunkte von f_a:

$$f_a'(x) = \left[\frac{x^2-2ax+9}{x-2a}\right]' = \frac{(2x-2a)(x-2a)-(x^2-2ax+9)}{(x-2a)^2} = \frac{x^2-4ax+4a^2-9}{(x-2a)^2}$$

Aus der notwendigen Bedingung $f_a'(x) = 0$ folgt $0 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 9$.

$\Rightarrow$ „extremwertverdächtig“: $x_{E_{1,2}} = 2a \pm \sqrt{4a^2-(4a^2-9)} = 2a \pm 3$

$\Rightarrow y_{E_{1,2}} = f_a(x_{E_{1,2}}) = 2a \pm 3 + \frac{9}{(2a \pm 3) - 2a} = 2a \pm 6.$

Art der Extrema:

$f_a''(x) = \frac{(2x - 4a)(x - 2a)^2 - (x^2 - 4ax + 4a^2 - 9)2(x - 2a)}{(x - 2a)^4} = \frac{18}{(x - 2a)^3}$;

$f_a''(x_{E_1}) = f_a''(2a + 3) = \frac{18}{27} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt T(2a + 3| 2a + 6)

$f_a''(x_{E_2}) = f_a''(2a - 3) = -\frac{18}{27} < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt H(2a – 3| 2a – 6)

Nichtexistenz von Wendepunkten:

Wegen $f_a''(x) = \frac{18}{(x - 2a)^3} \neq 0$ für alle x existiert keine Stelle mit notwendiger Bedingung.

Ortskurve der Hochpunkte:

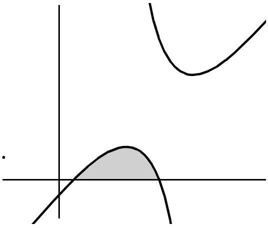
Es gilt: $x_{Max} = 2a - 3$ und $y_{Max} = 2a - 6 = (2a - 3) - 3 = x_{Max} - 3$.
Die Ortskurve der Hochpunkte $y_{Max} = x_{Max} - 3$ ist identisch mit dem Graphen G_{-3} der Funktion $y = g_{-3}(x) = x - 3$.

Zuordnung der Kurven k_i zu den Graphen F_a:

k_1, k_4	k_2, k_5	k_3, k_6
a = – 3	a = 0	a = 4
wegen Polstelle x = – 6	wegen Polstelle x = 0	wegen Polstelle x = 8

b) Eingeschlossener Flächeninhalt:

Es gilt $f_5(x) = x + \frac{9}{x - 10}$. Diese Funktion hat ihre Extrempunkte bei H(7| 4) und T(13| 16), ihre senkrechte Polasymptote bei x = 10, ihre Nullstellen bei $N_1(1|\,0)$ und $N_2(9|\,0)$.



Für den Flächeninhalt gilt:

$A = \int_1^9 \left(x + \frac{9}{x - 10}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 9\ln|x - 10|\right]_1^9$

$= \frac{81}{2} + 9\ln|-1| - \frac{1}{2} - 9\ln|-9| = 40 - 9\ln 9 \approx 20{,}2.$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt etwa 20 FE.

Parameterwert b für die F_5 senkrecht schneidenden Graphen G_b:
Es gilt $f_5(x) = x + \frac{9}{x-10}$, $f_5'(x) = 1 - \frac{9}{(x-10)^2}$, $g_b(x) = x + b$, $g_b'(x) = 1$.

Für den Schnittpunkt zwischen F_5 und G_b gilt:
$g_b(x) = f_5(x)$, d.h., $x + b = \frac{9}{x-10}$, $x_S = 10 + \frac{9}{b}$.

Die Steigung von F_5 im Schnittpunkt beträgt
$$f_5'\left(10 + \frac{9}{b}\right) = 1 - \frac{9}{\left[\left(10 + \frac{9}{b}\right) - 10\right]^2} = 1 - \frac{b^2}{9}.$$

Für orthogonale Anstiege zwischen F_5 und G_b gilt:
$$1 = -\frac{1}{1 - \frac{b^2}{9}}, \text{ d.h., } -9 = 9 - b^2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnen der Nullstellen	3 BE
	Fallunterscheidung für die Nullstellen	5 BE
	Angeben der Asymptote	1 BE
	Nachweisen der Übereinstimmung eines Graphen G_b mit der Asymptote	2 BE
	Ermitteln der Koordinaten und der Art der Extrempunkte	10 BE
	Nachweisen der Nichtexistenz eines Wendepunktes	1 BE
	Zeigen der Übereinstimmung eines Graphen G_b mit der Ortskurve der Hochpunkte	3 BE
	Zuordnen der Kurven k_i zu den Graphen F_a	6 BE
b)	Berechnen der Maßzahl der Fläche unter der Kurve	5 BE
	Berechnen eines Parameterwertes mit besonderen Bedingungen	9 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Koordinatengleichung der Ebene E_2:
Für E_2 gilt: $\overrightarrow{n_{E_2}} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$, wobei $\overrightarrow{n_{E_2}} = k\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = k\begin{pmatrix} -48 \\ 96 \\ 240 \end{pmatrix}$

Mit $k = \frac{1}{48}$ folgt $\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; für die Ebene E_2 gilt dann $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 22 \end{pmatrix}\right] = 0.$

$\Rightarrow -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$

Winkel zwischen Ebene E_2 und x_1x_2-Ebene:

Die Normalenvektoren der beiden Ebenen sind: $\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für den Winkel α zwischen beiden Ebenen gilt: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{n_{E_2}} \cdot \overrightarrow{n_{x_1x_2}}}{\left|\overrightarrow{n_{E_2}}\right|\left|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|} = \dfrac{5}{\sqrt{30} \cdot 1}$

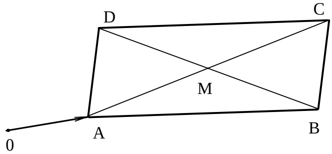
$\Rightarrow$ Der Winkel zwischen beiden Ebenen beträgt $\alpha \approx 24{,}09°$.

b) Koordinaten der Punkte C und D für ein Parallelogramm ABCD:

Wegen M als Mittelpunkt der Diagonalen AC ergibt sich:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

Die gesuchten Punkte sind C(32| 16| 16) und D(0| 0| 16).



Nachweis der Rechteckeigenschaften:

Wenn einer der vier Winkel im Parallelogramm ABCD ein rechter Winkel ist,

z.B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ gilt, dann ist das Parallelogramm ein Rechteck.

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow$ ABCD ist ein Rechteck.

Variante: In einem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang, d.h. $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Aus $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 26 \\ 28 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -38 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ folgt $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| \ \sqrt{1496}$.

c) Abstand des Punktes M zur Ebene E_1:

Eine senkrechte Hilfsgerade h: $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + r\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ durch den Punkt M schneidet die Ebene E_1 in einem Punkt S.

Dieser Punkt S ergibt sich durch Einsetzen der Komponenten von $\vec{x}$ in die Gleichung der Ebene E_1: $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 65 = 0$

$\Rightarrow 2(19 + 2r) - 4(2 - 4r) + 5(19 + 5r) - 65 = 0 \Rightarrow r = -\frac{4}{3}$

Damit wird $|\overrightarrow{SM}| = \left|-\frac{4}{3}\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}\right| \approx 8{,}944$. Der Abstand ist mit ca. 8,94 m um etwa 6 cm zu gering.

d) Flächeninhalt der überdachten Fläche:

Für die überdachte Fläche gilt: $A_{A'B'C'D'} = \left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'D'}\right|$
A'(6| – 12| 1) ist gegeben. Wegen der senkrechten Projektion von B bzw. D auf die Tribünenebene E_1 ist B'(38| 4| $x_{3,TB}$) und (mit D aus Aufgabe b)) D'(0| 0| $x_{3,TD}$), wobei sich die Höhen $x_{3,TB}$ bzw. $x_{3,TD}$ aus den Bedingungen $B' \in E_1$ und $D' \in E_1$ zu $x_{3,TB} = 1$ und $x_{3,TD} = 13$ ergeben.

Damit wird $A_{A'B'C'D'} = \left|\begin{pmatrix}38-6\\4+12\\1-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0-6\\0+12\\13-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}192\\-384\\480\end{pmatrix}\right| = 288\sqrt{5} \approx 644$;

der Flächeninhalt der überdachten Fläche beträgt also etwa 644 m².

Lösungsvariante: Weil die Fläche ABCD ein Rechteck, ist die senkrecht projizierte Fläche A´B´C´D´ ebenfalls ein Rechteck.

e) Winkel zwischen Seilen und Dach:
Der gesuchte Winkel entspricht dem Winkel $\sphericalangle(\overrightarrow{AS_1}, \overrightarrow{AD}) = \alpha$:

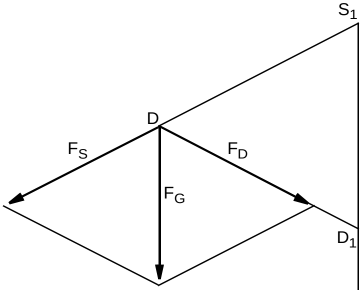
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AS_1} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AS_1}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}-6\\12\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}}{14 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{42} \approx 0{,}7582, \text{ d.h. } \alpha \approx 40{,}7°$$

Betrag der Kraftkomponente $\overrightarrow{F_S}$:

Es gilt $\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_S} + \overrightarrow{F_D}$,

wobei $\overrightarrow{F_S} = r\,\overrightarrow{S_1A}$ und $\overrightarrow{F_D} = t\,\overrightarrow{AD}$,

also $\begin{pmatrix}0\\0\\-10000\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}6\\-12\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}$.



Folglich ist $r = t = 1000$.

$\Rightarrow \overrightarrow{F_S} = 1000\begin{pmatrix}6\\-12\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_S}\right| = 14000$ N. $\overrightarrow{F_S}$ hat einen Betrag von 14000 N.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ermitteln der Koordinatengleichung von Ebene E_2	5 BE
	Berechnen des Winkels zwischen E_2 und x_1x_2-Ebene	3 BE
b)	Ermitteln der Koordinaten der Punkte C und D	3 BE
	Nachweisen, dass Parallelogramm ein Rechteck	2 BE
c)	Prüfen, ob die Abstandsvorschrift erfüllt ist	4 BE
d)	Berechnen des Inhalts der überdachten Fläche	5 BE
e)	Berechnen des Winkels zwischen Dach und Seil	4 BE
	Ermitteln der Kraftkomponente $\overrightarrow{F_S}$	4 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Nachweis, dass g_1, g_{-1} eine Ebene bestimmen:

$$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix};\ g_{-1}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Da beide Geraden den gemeinsamen Anfangspunkt A(1| 1| 1) und voneinander linear unabhängige Richtungsvektoren $\overrightarrow{a_{g_1}}$ und $\overrightarrow{a_{g_{-1}}}$ besitzen, bestimmen beide Geraden eindeutig eine Ebene.

Diese Ebene ergibt sich aus $\vec{n}_E \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$ mit $\vec{n}_E = \overrightarrow{a_{g_1}} \times \overrightarrow{a_{g_{-1}}}$,

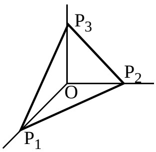
d.h. $\left[\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$, also E: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$.

Nachweis, dass $g_a \in E$ für alle Geraden g_a:

Eine Gerade g_a liegt genau dann in der Ebene E, wenn der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Normalenvektor der Ebene, d.h. $\vec{n}_E \cdot \overrightarrow{a_{g_a}} = 0$ gilt.

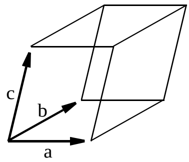
Wegen $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1-a\\a\end{pmatrix} = -2 + 2(1-a) + 2a = 0$ ist diese Bedingung unabhängig von a erfüllt. Damit sind die Geraden g_a ein in der Ebene E liegendes Geradenbüschel.

b) Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3:
Weil P_1, P_2, P_3 die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind, gilt:



$P_1 \in x_1$-Achse, d.h. $P_1(x_{1,E}| 0| 0)$, $x_{1,E} = -3$
$P_2 \in x_2$-Achse, d.h. $P_2(0| x_{2,E}| 0)$, $x_{2,E} = 1{,}5$
$P_3 \in x_3$-Achse, d.h. $P_3(0| 0| x_{3,E})$, $x_{3,E} = 1{,}5$

Volumen der Pyramide $P_1P_2P_3O$:
Für das Volumen eines von drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (Parallelepipeds) gilt: $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$



Volumen der Pyramide $P_1P_2P_3O$:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2}) \cdot \overrightarrow{OP_3}\right|$$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{6}\left|\left[\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1{,}5\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\4{,}5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-6{,}75| = \frac{9}{8}$$

Das Pyramidenvolumen beträgt 1,125 VE.

Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E:
Senkrecht zur Ebene E und durch den Koordinatenursprung verläuft eine Hilfsgerade h mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\vec{n}_E = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$. (1)

Die Hilfsgerade h schneidet E in einem Punkt S. Einsetzen der Komponenten von (1) in E: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ ergibt $-(-r) + 2(2r) + 2(2r) - 3 = 0$, d.h. $r = \frac{1}{3}$.

Für S ergibt sich somit $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, $S(-\frac{1}{3} | \frac{2}{3} | \frac{2}{3})$; der Abstand der Ebene zum Ursprung ist daher $|\overrightarrow{OS}| = 1$.

Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$:
Für das Volumen der Pyramide $P_1P_2P_3O$ gilt

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2}) \cdot \overrightarrow{OP_3}\right| = \frac{1}{3} A_\triangle h, \text{ wobei } h = |\overrightarrow{OS}| = 1$$

$$\Rightarrow A_\triangle = \frac{3V_{Pyr}}{h} = \frac{3 \cdot 1{,}125}{1} = 3{,}375$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ beträgt 3,375 FE.

Gleichung der Kugel durch die Punkte P_1, P_2, P_3, O:
Mit dem Kugelmittelpunkt $M(x_{1,M}| x_{2,M}| x_{3,M})$ und dem Radius r gilt für die Punkte

(1) P_1: $(-3 - x_{1,M})^2 + (0 - x_{2,M})^2 + (0 - x_{3,M})^2 = r^2$,

(2)P_2 : $(0 - x_{1,M})^2 + (1{,}5 - x_{2,M})^2 + (0 - x_{3,M})^2 = r^2$,

(3)P_3 : $(0 - x_{1,M})^2 + (0 - x_{2,M})^2 + (1{,}5 - x_{3,M})^2 = r^2$,

(4) O: $(0 - x_{1,M})^2 + (0 - x_{2,M})^2 + (0 - x_{3,M})^2 = r^2$.

Durch Einsetzen von (4) in (1), (2), (3) ergeben sich folgende Gleichungen:

(5) $6x_{1,M} + 9 = 0$

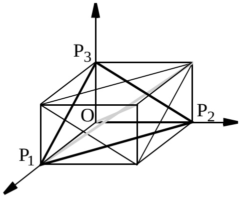
(6) $-3x_{2,M} + 2{,}25 = 0$

(7) $-3x_{3,M} + 2{,}25 = 0$

$\Rightarrow M(-1{,}5; 0{,}75; 0{,}75) \Rightarrow r = \sqrt{3,375} \approx 1{,}84$

Die Kugelgleichung lautet also $(x_1 + 1{,}5)^2 + (x_2 - 0{,}75)^2 + (x_3 - 0{,}75)^2 = 3{,}375$.

Nachweis, dass der Kugelmittelpunkt außerhalb der Pyramide $P_1P_2P_3O$:



Der Kugelmittelpunkt befindet sich im Schnittpunkt der Raumdiagonalen. Aber die Ebene durch die Punkte P_1, P_2, P_3 verläuft nicht durch den Schnittpunkt der Raumdiagonalen! Wegen der Pyramidenhöhe $h = |\overrightarrow{OS}| = 1$, die den Abstand vom Ursprung zur Ebene darstellt und dem Kugelradius $r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{3,375} \approx 1{,}84$, der den Abstand vom Ursprung zum Kugelmittelpunkt angibt, gilt $h < r$; also liegen der Kugelmittelpunkt M und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene E, d.h., M liegt außerhalb der Pyramide $P_1P_2P_3O$.

c) Ebenen E_b, die mit der Ebene E_0 einen Winkel von 60° einschließen:

E_0: $-x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

E_b: $-x_1 + 2x_2 + bx_3 - 1 - b = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

Für einen eingeschlossenen Winkel von 60° gilt: $\cos 60° = \dfrac{\overrightarrow{n_{E_0}} \cdot \overrightarrow{n_{E_b}}}{\left|\overrightarrow{n_{E_0}}\right|\left|\overrightarrow{n_{E_b}}\right|}$,

d.h. $0{,}5 = \dfrac{1 + 4 + 0}{\sqrt{5}\sqrt{1 + 4 + b^2}} \Rightarrow b = \pm\sqrt{15}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweisen, dass g_1, g_{-1} eine Ebene E eindeutig bestimmen	4 BE
	Aufstellen einer Ebenengleichung für E	3 BE
b)	Berechnen des Volumens der Pyramide $P_1P_2P_3O$	7 BE
	Ermitteln der Gleichung der Kugel K	6 BE
	Nachweisen, dass Mittelpunkt der Kugel ausserhalb der Pyramide $P_1P_2P_3O$	3 BE
c)	Ermitteln der Werte für Parameter der gesuchten Ebenen	4 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1

a) Begründung für die Binomialverteilung der Zufallsvariablen X:
Bei diesem Zufallsexperiment gilt:
- n = 200 unabhängige Versuche (Artikel)
- jeder Artikel ist entweder defekt mit p = 0,06 oder intakt mit q = 1 – p = 0,94
- bei jedem einzelnen Test gelten die Wahrscheinlichkeiten q bzw. p
- X ist Anzahl der defekten Artikel bei n Versuchen

Erwartungswert und Standardabweichung der Zufallsgröße X:
Erwartungswert: $E(X) = \mu = np = 200 \cdot 0{,}06 = 12$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{D^2X} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94} \approx 3{,}36$

Prüfen, ob Verteilung von X durch Normalverteilung angenähert werden kann:
Globale Näherung ist dann geeignet, wenn $D^2X = npq > 9$.
Wegen $npq = 11{,}28 > 9$ ist diese Bedingung erfüllt.

b) Test, ob festgestellte Anzahl defekter Artikel im Rahmen einer zufälligen Abweichung liegt:
Erwartete Anzahl defekter Artikel bei n = 200 Stück sind 12; tatsächlich sind 16 defekte Artikel festgestellt.
Ein mögliches Testverfahren ist der einseitige, rechtsseitige Signifikanztest.
Ausgangshypothese (Nullhypothese): H_0: $p \le p_0 = 0{,}06$.
Festlegung des Signifikanzniveaus (Irrtumswahrscheinlichkeit) auf $\alpha = 0{,}05$.
Der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k + 1; ...; 200\}$ wird so bestimmt,
dass $B_{n;p_0}(\{k + 1; ...; n\}) \le \alpha$, d.h. $1 - B_{n;p_0}(\{0; 1; ...; k\}) \le \alpha$,
$B_{n;p_0}(\{0; 1; ...; k\}) \le 1 - \alpha$.

Mit der Annäherung durch eine Normalverteilung wird dies zu

$B_{n;p_0}(\{0; 1; ...; k\}) = P(X \le k) \approx \Phi(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sigma}) \ge 1 - \alpha$,

d.h., $\Phi(\frac{k + 0,5 - 12}{3,36}) \ge 0,95$

$\Rightarrow \frac{k + 0,5 - 12}{3,36} \ge 1,65$ (siehe Statistik-Tabellen) $\Rightarrow k \ge 17,04$

Da im Annahmebereich $A = \{0 \le X \le 17\}$ auch $X = 16$ liegt,
kann die Ausgangshypothese nicht verworfen werden. Die festgestellte Anzahl defekter Teile kann also noch als zufällig im Rahmen der Ausgangshypothese angesehen werden.

c) Mindestgröße der Stichprobe, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % kein defekter Artikel enthalten ist:
Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl defekter Artikel in einer veränderten Stichprobe,
Zufallsgröße Y ist binomialverteilt, Ausschußquote $p = 0,06$.
Forderung an den Stichprobenumfang n: $P(Y = 0) \le 0,1$ (1).

Wegen der Binomialverteilung ist $P(Y = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0,06^0(1 - 0,06)^n$ (2).

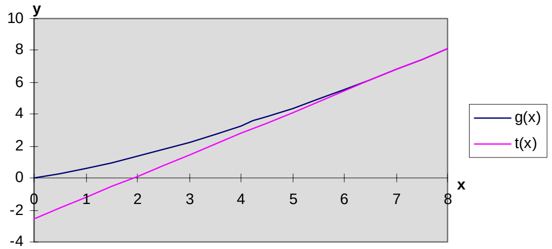
Aus (1) und (2) folgt $0,1 \ge 0,94^n \Rightarrow n > 37$;
ab einer Mindestanzahl von $n = 38$ Artikeln beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von mindestens einem defekten Artikel mindestens 90 %.

Bewertungsvorschlag:

a)	Begründen des Vorliegens einer Binomialverteilung	3 BE
	Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung	3 BE
	Prüfen auf Annäherung durch Normalverteilung	2 BE
b)	Prüfen und Entscheiden mit geeignetem Testverfahren	9 BE
c)	Ermitteln der mindestens notwendigen Anzahl Artikel in der Stichprobe	8 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2

a) Graph G im Intervall $0 < x \leq 8$



Gleichung für Tangente t im Punkt $P(x_0 | g(x_0))$ an den Graphen G:

Mit $g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}$ wird $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

Für t gilt damit $(y - y_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x_0}\,(x - x_0)$.

Damit t durch den Punkt S(2; 0) geht, setzt man x = 2 und y = 0. Mit $y_0 = g(x_0)$

wird dann $0 - \frac{1}{2}x_0\sqrt[3]{x_0} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x_0} \cdot 2 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{x_0} \cdot x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 8$ und $y_0 = 8$

(die zweite Lösung $x_0 = 0$ entfällt wegen des Definitionsbereiches).

Für die Tangente t gilt somit t: $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{8}\,(x - 8) + 8 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

b) Flächeninhalt der gegebenen Fläche:

Wegen der besonderen Bedingungen gilt $A = \int_1^2 g(x)dx + \int_2^8 [g(x) - t(x)]dx$,

d.h., $A = \int_1^2 \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}\,dx + \int_2^8 \left[\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}\right)\right] dx = A_1 + A_2$

mit $A_1 = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_1^2 \approx 0{,}866$ und $A_2 = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x\right]_2^8 \approx 2{,}349$.

Damit beträgt der gesuchte Flächeninhalt etwa 3,2 FE.

c) Lösung der Differenzialgleichung:

Aus $3xf'(x) = 4f(x)$ folgt auch $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{f(x)}{x}$.

Der Ansatz $y = cx^n \Rightarrow y' = ncx^{n-1} = n\frac{cx^n}{x}$ erfüllt mit $n = \frac{4}{3}$ und $x^n = x^{\frac{4}{3}} = x \cdot x^{\frac{1}{3}}$

die obige Beziehung; $y = cx\sqrt[3]{x}$ ist also Lösung der Differenzialgleichung.

Anderer Weg: aus $3xf'(x) = 4f(x)$ folgt mit $y = f(x)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}\frac{y}{x}$.

Nach Trennung der Variablen wird $\frac{dy}{y} = \frac{4}{3}\frac{dx}{x}$;

Integration ergibt (für $x > 0$, $y > 0$): $\ln y = \frac{4}{3}\ln x + k \Rightarrow y = e^k x^{\frac{4}{3}} = cx^{\frac{4}{3}}$.

Nachweis, dass g(x) eine Lösung der Differenzialgleichung ist:

Es ist $g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}$ und $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

Durch Einsetzen von g(x) und g'(x) in die Differentialgleichung ergibt sich

$3x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \frac{1}{2}\,x\sqrt[3]{x}$, also $0 = 0$.

$\Rightarrow$ g(x) ist eine Lösung der Differenzialgleichung.

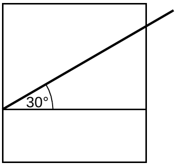
Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnen des Graphen G	4 BE
	Ermitteln einer Tangentengleichung	6 BE
	Zeichnen der Tangentengleichung	2 BE
b)	Berechnen des Flächeninhaltes	7 BE
c)	Lösen der Differenzialgleichung und Nachweisen einer Lösung für selbe	6 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3

a) Charakteristische Ellipsenmaße:
Die Länge der kleinen Halbachse ist gleich dem Zylinderradius, die Länge der großen Halbachse ergibt bei ihrer Projektion in die Waagerechte den Zylinderradius:

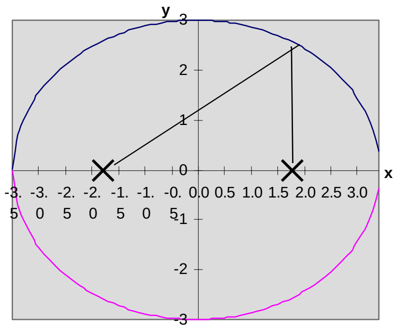
Kleine Halbachse: b = 3



Große Halbachse: $a = \dfrac{3}{\cos 30°} = 2\sqrt{3}$

Lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{3}$

Konstruktion der Ellipse:
Strecke der Länge 2a wird beliebig in zwei Teile unterteilt. Von den zwei Brennpunkten werden dann die zwei Teillängen mit dem Zirkel abgetragen. Beide Schnittpunkte dieser Kreise sind Punkte der Ellipse. Dies wird mehrfach wiederholt.



b) Ellipsengleichung
Im kartesischen Koordinatensystem gilt für eine Ellipse mit M(0| 0):

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, hier also $\dfrac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$, d.h. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Koordinaten aller Schnittpunkte zwischen einem Kreis und der Ellipse:

Für die Ellipse gilt $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; für den Kreis mit $r = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$ gilt $x^2 + y^2 = \dfrac{45}{4}$.

Für die gemeinsamen Punkten von Kreis und Ellipse gilt $y^2 = \dfrac{45}{4} - x^2 = 9 - \dfrac{3}{4}x^2$;

Lösungen sind x = 3 und x = – 3; zu jedem der beiden x-Werte gibt es zwei y-Werte y = 1,5 und y = – 1,5. Dies ergibt insgesamt vier Schnittpunkte zwischen Kreis und Ellipse, nämlich $S_1(-3|-1{,}5)$, $S_2(-3|\,1{,}5)$, $S_3(3|-1{,}5)$, $S_4(3|\,1{,}5)$.

c) Nachweis der Gleichung für den Scheitelkrümmungskreis:
Da der Kreismittelpunkt auf der x-Achse liegt, ist $y_M = 0$; da der Kreis im rechten Hauptscheitel die Ellipse berühren soll, ist $x_M = a - r_S = 2\sqrt{3} - r_S$.
Aus der gegebenen Gleichung $y^2 = -x^2 + (4\sqrt{3} - 2r_S)x + 4(r_S\sqrt{3} - 3)$ ergeben sich durch Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Kreisgleichung $(y - y_M)^2 = -x^2 + 2xx_M - x_M^2 + r^2$ für $r = r_S$ folgende Werte für y_M, x_M:
$y_M = 0$, $x_M = 2\sqrt{3} - r_S$, so dass der Kreis die behaupteten Eigenschaften hat.

Nachweis, dass der Radius r_S den Wert $\frac{b^2}{a}$ annimmt:

Es gilt für den betrachteten Kreis $(x - (a - r))^2 + y^2 = r^2$

und für die Ellipse in Mittelpunktlage $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Für gemeinsame Punkte von Kreis und Ellipse gilt dann:

$$y^2 = r^2 - (x - (a - r))^2 = r^2 - (a^2 - 2ar + r^2) + 2(a - r)x - x^2 \qquad (1)$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$-a^2 + 2ar + 2(a - r)x - x^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)x^2 + 2(a - r)x - a^2 - b^2 + 2ar = 0.$$

Für $a \neq b$ gilt dann $x^2 - \frac{2(a - r)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}x - \frac{a^2 + b^2 - 2ar}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} = 0$ (4)

Lösungen von (4) sind i.a. zwei verschiedene x-Werte. Da hier für den speziellen Radius r_S alle Lösungen für x zusammenfallen, müssen beide Lösungen $x = a$ sein, d.h. für den Radius $r = r_S$ muss die Gleichung (4) die Form $(x - a)^2 = 0$, d.h. $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ haben. (5)

Koeffizientenvergleich von (4) und (5) ergibt mit $r = r_S$

I: $-2a = \frac{2(a - r_S)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \Rightarrow -a\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) = (a - r_S)$, $r_S = a - a + a\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}$,

II: $a^2 = -\frac{a^2 + b^2 - 2ar_S}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \Rightarrow b^2 - a^2 = -a^2 - b^2 + 2ar_S \Rightarrow 2b^2 = 2ar_S \Rightarrow r_S = \frac{b^2}{a}$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Beschreiben der Kurve durch charakteristische Ellipsenparameter	5 BE
	Konstruieren der Ellipse	5 BE
b)	Angeben der Gleichung	1 BE
	Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte	6 BE
c)	Nachweisen der Gültigkeit der Gleichung	2 BE
	Nachweisen des Wertes für r_S	6 BE
		25 BE

Abiturprüfung Leistungskurs

1999 / 2000

Gymnasium

Thüringen

Aufgabe 1.1:

Für jede reelle Zahl a ($a > 0$) ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = a\ln(x^2 + a) - a \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Symmetrie!
Ermitteln Sie die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen von f_a mit der x-Achse in Abhängikeit von a und geben Sie deren Koordinaten an!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

b) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf lokale Extrem- und Wendepunkte und geben Sie gegebenfalls deren Koordinaten an! (Kontrollergebnis:
$W_1(\sqrt{a}\,;\ f_a(\sqrt{a})\,)$) (Auf den Nachweis der Wendepunkte wird verzichtet.)
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 7)

c) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen von f_2 und f_3 im Intervall $-5 \le x \le 5$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

d) Begründen Sie, dass sich die Wendetangenten eines Graphen von f_a auf der y-Achse schneiden!
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes S!
Für welches a fällt S mit dem Koordinatenursprung O zusammen?
Geben Sie a für den Fall an, dass die Wendetangenten aufeinander senkrecht stehen!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

e) Der Graph der Funktion f_a', die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ schließen eine Fläche vollständig ein. Ermitteln Sie deren Inhalt in Abhängigkeit von a! Vereinfachen Sie den Term!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

f) Der Graph einer Funktion g mit der Gleichung $y = g(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ verläuft durch den Koordinatenursprung und hat dort den Anstieg $m = 2$; des weiteren besitzt er an der Stelle $x_E = 2$ ein lokales Extremum. Bestimmen Sie a, b und c!
Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich dieser Funktion g(x)!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

Aufgabe 1.2:

Für jede reelle Zahl a ist eine Funktion f_a gegeben durch
$y = f_a(x) = \sin x + a \cdot \cos x \ (x \in \mathbb{R})$.

a) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f_1!
Für welche Parameter a besitzt f_a im Intervall $\frac{2}{3}\pi \le x_0 \le \frac{3}{4}\pi$ eine Nullstelle x_0?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

b) Ergänzen Sie folgende Wertetabellen

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f_1(x)$							

x	$-\pi$	– 2,035	– 0,464	0	1,107	2,693	π
$f_{-2}(x)$							

und skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_1 und f_{-2} im Intervall $-\pi \le x \le \pi$!
Die Stellen $-\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ der Funktion f_1 sowie die Stellen – 0,464 und 2,693 der Funktion f_{-2} sind Extremstellen dieser Funktionen.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

c) Der Teil des Graphen der Funktion f_1, der zwischen den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ liegt, rotiere um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

d) Berechnen Sie den Parameter a für den Fall, dass die Tangenten an den Graphen von f_a in den Punkten $P(0; f_a(0))$ und $Q\left(\frac{\pi}{3}; f_a\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ orthogonal zueinander stehen!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

e) Für zwei Parameter a_1 und a_2 mit $0 < a_1 < a_2$ gibt es genau zwei Werte für x im Intervall $-\pi \le x \le \pi$, für die $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$ gilt.
Berechnen Sie diese beiden x-Werte und die zugehörigen Schnittpunkte der Graphen von f_{a_1} und f_{a_2} !
Geben Sie die Fläche, die die Graphen von f_{a_1} und f_{a_2} zwischen den von Ihnen berechneten Schnittpunkten einschließen, in Abhängikeit von a_1 und a_2 an!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

f) Zeigen Sie, dass gilt:
Ist der Funktionswert $f_a(x)$ an einer Stelle x positiv, so ist der Graph der Funktion f_a' an dieser Stelle x monoton fallend.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe 2.1:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(7; –3; 2), B(0; 2; –1) sowie $P_r(r; 2; r + 3)$ mit $r \in \mathbb{R}$ und ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Eine Gerade g enthält die Punkte A und B. Die Geraden h_r haben $\overrightarrow{OP_r}$ als Stützvektor sowie $\vec{v}$ als Richtungsvektor.

a) Es gibt genau eine Gerade h_{r*}, die die Gerade g schneidet.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel α dieser beiden Geraden!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Beweisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage:
Durch die Punkte A, B und P_r ist für jedes r ($r \in \mathbb{R}$) eine Ebene ε_r bestimmt!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Die windschiefen Geraden g und h_{-2} liegen in zwei verschiedenen zueinander parallelen Ebenen η_1 und η_2.
Geben Sie je eine parameterfreie Gleichung für diese Ebenen an, und berechnen Sie deren Abstand a!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Für jedes Paar reeller Zahlen c und d ist durch $3x + y + dz = 6 + c - d$ eine Ebene $\varepsilon_{c;d}$ gegeben.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte T auf der Geraden g, die zur Ebene $\varepsilon_{\frac{1}{2};-\frac{3}{4}}$ einen Abstand von 2 Längeneinheiten haben!

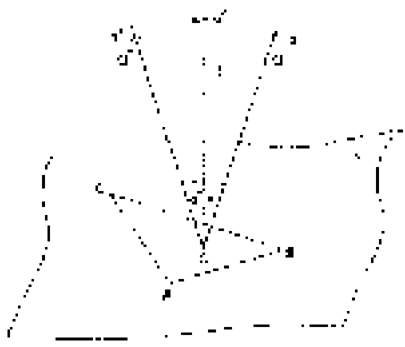
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

e) Untersuchen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Geraden g mit der Ebene $\varepsilon_{c;d}$ in Abhängikeit von c und d!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe 2.2:

Gegeben ist eine dreieckige, spiegelnde Glasscheibe ABC mit A(9; 0; 0), B(0; 6; 0) und C(0; 0; 4). Von der Lichtquelle Q(7,5; –2; 8) aus verläuft in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein Lichtstrahl s.



(Skizze nicht maßstäblich!)

a) Weisen Sie nach, dass die Glasscheibe in der Ebene ε: $4x + 6y + 9z = 36$ liegt!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

b) In welchem Punkt S und unter welchem Winkel φ trifft der Lichtstrahl s die Ebene ε?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Senkrecht zur Ebene ε durch den Punkt S(3; 1; 2) verläuft die Gerade l, das sogenannte Einfallslot zum Lichtstrahl s.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte R_1 und R_2 auf l so, dass die Pyramiden $ABCR_1$ und $ABCR_2$ jeweils ein Volumen von 532 VE haben!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

d) η ist die Ebene, in der der einfallende Strahl s und das Einfallslot l liegen. Geben Sie eine Gleichung der Ebene η an!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

e) Auf dem reflektierten Strahl s', der ebenfalls in der Ebene η liegt, gibt es einen Punkt Q', der vom Punkt S den gleichen Abstand wie der Punkt Q hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q'!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

f) Begründen Sie, dass der Lichtstrahl die dreieckige Glasscheibe trifft!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe 2.3:

Für die bevorstehende Einführung des Euro wird bereits jetzt eine große Anzahl von 1-Euro-Münzen geprägt. Durchschnittlich sind 6% fehlerhaft, d.h. die Prägetiefe ist bei diesen Münzen nicht ganz zufriedenstellend. Ihre Gültigkeit als Zahlungsmittel wird davon nicht berührt.
Nach der Herstellung werden die Euro in Kartons zu je 100 Stück gefüllt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
A:= „In einem Karton ist höchstens ein Euro fehlerhaft."

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

b) Ein Arbeiter hat gerade 10 Kartons mit Euro gefüllt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
B:= „Unter diesen 10 Kartons ist mindestens ein Karton mit nur fehlerfreien Euro."
C:= „Unter diesen 10 Kartons ist genau ein Karton mit genau 4 fehlerhaften Euro."

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) In einem noch nicht gefüllten Karton befinden sich 20 Euro. Genau zwei davon sind fehlerhaft. Ein Arbeiter entnimmt diesem Karton nacheinander und ohne Zurücklegen 4 Euro.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

D:= „Der dritte entnommene Euro ist der zweite fehlerhafte.“
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Eine Tagesproduktion umfasst 10 000 Euro.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
E:= „Von der Tagesproduktion sind höchstens 590 Euro fehlerhaft.“
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

e) Der fehlerhafte Anteil Euro von 6 % wird auf jeder der beiden Seiten durch ein Prägefehler verursacht, der mit derselben Wahrscheinlichkeit p eintritt. Dabei treten die Prägefehler unabhängig voneinander ein.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p des Prägefehlers?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

f) Durch eine Kontrolle soll die Ausgabe von fehlerhaften Euro reduziert werden. Dabei werden alle fehlerhaften Euro nur zu 98 % als solche erkannt. Auch alle fehlerfreien Euro werden nicht vollständig als solche erkannt. 99 % der kontrollierten Münzen werden richtig beurteilt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit q dafür, dass ein als fehlerfrei eingestufter Euro tatsächlich fehlerfrei ist?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

g) Mit einer Wahrscheinlichkeit von r = 0,5 befindet sich ein Euro im Schreibtisch des Geschäftsführers. Dieser Schreibtisch hat drei Schubfächer, in denen sich der Euro mit je gleicher Wahrscheinlichkeit befinden kann.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit s dafür, dass sich der Euro im dritten Schubfach befindet, wenn im ersten und im zweiten bereits vergeblich nach ihm gesucht wurde?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

(Tabelle Normalverteilung als Anlage)

Anlage: Normalverteilung

Normalverteilung

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,39894	0,50000	0,60	0,33322	0,72575	1,20	0,19419	0,88493	1,80	0,07895	0,96407
0,01	0,39892	0,50399	0,61	0,33121	0,72907	1,21	0,19186	0,88686	1,81	0,07754	0,96485
0,02	0,39886	0,50798	0,62	0,32918	0,73237	1,22	0,18954	0,88877	1,82	0,07614	0,96562
0,03	0,39876	0,51197	0,63	0,32713	0,73565	1,23	0,18724	0,89065	1,83	0,07477	0,96638
0,04	0,39862	0,51595	0,64	0,32506	0,73891	1,24	0,18494	0,89251	1,84	0,07341	0,96712
0,05	0,39844	0,51994	0,65	0,32297	0,74215	1,25	0,18265	0,89435	1,85	0,07206	0,96784
0,06	0,39822	0,52392	0,66	0,32086	0,74537	1,26	0,18037	0,89617	1,86	0,07074	0,96856
0,07	0,39797	0,52790	0,67	0,31874	0,74857	1,27	0,17810	0,89796	1,87	0,06943	0,96926
0,08	0,39767	0,53188	0,68	0,31659	0,75175	1,28	0,17585	0,89973	1,88	0,06814	0,96995
0,09	0,39733	0,53586	0,69	0,31443	0,75490	1,29	0,17360	0,90147	1,89	0,06687	0,97062
0,10	0,39695	0,53983	0,70	0,31225	0,75804	1,30	0,17137	0,90320	1,90	0,06562	0,97128
0,11	0,39654	0,54380	0,71	0,31006	0,76115	1,31	0,16915	0,90490	1,91	0,06438	0,97193
0,12	0,39608	0,54776	0,72	0,30785	0,76424	1,32	0,16694	0,90658	1,92	0,06316	0,97257
0,13	0,39559	0,55172	0,73	0,30563	0,76730	1,33	0,16474	0,90824	1,93	0,06195	0,97320
0,14	0,39505	0,55567	0,74	0,30339	0,77035	1,34	0,16256	0,90988	1,94	0,06077	0,97381
0,15	0,39448	0,55962	0,75	0,30114	0,77337	1,35	0,16038	0,91149	1,95	0,05959	0,97441
0,16	0,39387	0,56356	0,76	0,29887	0,77637	1,36	0,15822	0,91309	1,96	0,05844	0,97500
0,17	0,39322	0,56749	0,77	0,29659	0,77935	1,37	0,15608	0,91466	1,97	0,05730	0,97558
0,18	0,39253	0,57142	0,78	0,29431	0,78230	1,38	0,15395	0,91621	1,98	0,05618	0,97615
0,19	0,39181	0,57535	0,79	0,29200	0,78524	1,39	0,15183	0,91774	1,99	0,05508	0,97670
0,20	0,39104	0,57926	0,80	0,28969	0,78814	1,40	0,14973	0,91924	2,00	0,05399	0,97725
0,21	0,39024	0,58317	0,81	0,28737	0,79103	1,41	0,14764	0,92073	2,01	0,05292	0,97778
0,22	0,38940	0,58706	0,82	0,28504	0,79389	1,42	0,14556	0,92220	2,02	0,05186	0,97831
0,23	0,38853	0,59095	0,83	0,28269	0,79673	1,43	0,14350	0,92364	2,03	0,05082	0,97882
0,24	0,38762	0,59483	0,84	0,28034	0,79955	1,44	0,14146	0,92507	2,04	0,04980	0,97932
0,25	0,38667	0,59871	0,85	0,27798	0,80234	1,45	0,13943	0,92647	2,05	0,04879	0,97982
0,26	0,38568	0,60257	0,86	0,27562	0,80511	1,46	0,13742	0,92785	2,06	0,04780	0,98030
0,27	0,38466	0,60642	0,87	0,27324	0,80785	1,47	0,13542	0,92922	2,07	0,04682	0,98077
0,28	0,38361	0,61026	0,88	0,27086	0,81057	1,48	0,13344	0,93056	2,08	0,04586	0,98124
0,29	0,38251	0,61409	0,89	0,26848	0,81327	1,49	0,13147	0,93189	2,09	0,04491	0,98169
0,30	0,38139	0,61791	0,90	0,26609	0,81594	1,50	0,12952	0,93319	2,10	0,04398	0,98214
0,31	0,38023	0,62172	0,91	0,26369	0,81859	1,51	0,12758	0,93448	2,11	0,04307	0,98257
0,32	0,37903	0,62552	0,92	0,26129	0,82121	1,52	0,12566	0,93574	2,12	0,04217	0,98300
0,33	0,37780	0,62930	0,93	0,25888	0,82381	1,53	0,12376	0,93699	2,13	0,04128	0,98341
0,34	0,37654	0,63307	0,94	0,25647	0,82639	1,54	0,12188	0,93822	2,14	0,04041	0,98382
0,35	0,37524	0,63683	0,95	0,25406	0,82894	1,55	0,12001	0,93943	2,15	0,03955	0,98422
0,36	0,37391	0,64058	0,96	0,25164	0,83147	1,56	0,11816	0,94062	2,16	0,03871	0,98461
0,37	0,37255	0,64431	0,97	0,24923	0,83398	1,57	0,11632	0,94179	2,17	0,03788	0,98500
0,38	0,37115	0,64803	0,98	0,24681	0,83646	1,58	0,11450	0,94295	2,18	0,03706	0,98537
0,39	0,36973	0,65173	0,99	0,24439	0,83891	1,59	0,11270	0,94408	2,19	0,03626	0,98574
0,40	0,36827	0,65542	1,00	0,24197	0,84134	1,60	0,11092	0,94520	2,20	0,03547	0,98610
0,41	0,36678	0,65910	1,01	0,23955	0,84375	1,61	0,10915	0,94630	2,21	0,03470	0,98645
0,42	0,36526	0,66276	1,02	0,23713	0,84614	1,62	0,10741	0,94738	2,22	0,03394	0,98679
0,43	0,36371	0,66640	1,03	0,23471	0,84849	1,63	0,10567	0,94845	2,23	0,03319	0,98713
0,44	0,36213	0,67003	1,04	0,23230	0,85083	1,64	0,10396	0,94950	2,24	0,03246	0,98745
0,45	0,36053	0,67364	1,05	0,22988	0,85314	1,65	0,10226	0,95053	2,25	0,03174	0,98778
0,46	0,35889	0,67724	1,06	0,22747	0,85543	1,66	0,10059	0,95154	2,26	0,03103	0,98809
0,47	0,35723	0,68082	1,07	0,22506	0,85769	1,67	0,09893	0,95254	2,27	0,03034	0,98840
0,48	0,35553	0,68439	1,08	0,22265	0,85993	1,68	0,09728	0,95352	2,28	0,02965	0,98870
0,49	0,35381	0,68793	1,09	0,22025	0,86214	1,69	0,09566	0,95449	2,29	0,02898	0,98899
0,50	0,35207	0,69146	1,10	0,21785	0,86433	1,70	0,09405	0,95543	2,30	0,02833	0,98928
0,51	0,35029	0,69497	1,11	0,21546	0,86650	1,71	0,09246	0,95637	2,31	0,02768	0,98956
0,52	0,34849	0,69847	1,12	0,21307	0,86864	1,72	0,09089	0,95728	2,32	0,02705	0,98983
0,53	0,34667	0,70194	1,13	0,21069	0,87076	1,73	0,08933	0,95818	2,33	0,02643	0,99010
0,54	0,34482	0,70540	1,14	0,20831	0,87286	1,74	0,08780	0,95907	2,34	0,02582	0,99036
0,55	0,34294	0,70884	1,15	0,20594	0,87493	1,75	0,08628	0,95994	2,35	0,02522	0,99061
0,56	0,34105	0,71226	1,16	0,20357	0,87698	1,76	0,08478	0,96080	2,36	0,02463	0,99086
0,57	0,33912	0,71566	1,17	0,20121	0,87900	1,77	0,08329	0,96164	2,37	0,02406	0,99111
0,58	0,33718	0,71904	1,18	0,19886	0,88100	1,78	0,08183	0,96246	2,38	0,02349	0,99134
0,59	0,33521	0,72240	1,19	0,19652	0,88298	1,79	0,08038	0,96327	2,39	0,02294	0,99158

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1:

$y = f_a(x) = a \ln(x^2 + a) - a \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$

a) $f_a(-x) = a \ln((-x)^2 + a) - a = a \ln(x^2 + a) - a = f_a(x)$,
d.h., der Graph ist axialsymmetrisch.

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$y = 0 \Rightarrow \quad a \ln(x^2 + a) = a$

$\ln(x^2 + a) = 1 \qquad \Rightarrow \quad x^2 + a = e$

$x^2 = e - a$

$a < e$: 2 Schnittpunkte: $S_1(\sqrt{e-a}\,;\ 0)$, $S_2(-\sqrt{e-a}\,;\ 0)$
$a = e$: 1 Schnittpunkt: $S(0;\ 0)$
$a > e$: 0 Schnittpunkte

b) $f_a'(x) = a\dfrac{2x}{x^2 + a}$;

$$f_a''(x) = a\frac{2(x^2 + a) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + a)^2} = a\frac{2x^2 + 2a - 4x^2}{(x^2 + a)^2} = 2a\frac{(a - x^2)}{(x^2 + a)^2}$$

Extrempunkte:
$f_a'(x_E) = 0$, d.h. $x_E = 0$

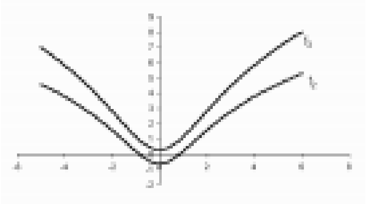
$f_a''(0) = \dfrac{2a^2}{a^2} = 2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum: $f_a(0) = a \ln a - a \Rightarrow \mathrm{Min}(0;\ a \ln a - a)$

Wendepunkte:
$f_a''(x_W) = 0$: $a - x_W^2 = 0$; $(x^2 + a)^2 \neq 0$

$x_W = \sqrt{a}$; $f_a(\pm\sqrt{a}) = a \cdot \ln(2a) - a$

$\Rightarrow \quad W_1(\sqrt{a}\,;\ a \ln 2a - a)$;
$\quad W_2(-\sqrt{a}\,;\ a \ln 2a - a)$

c) $f_2(x) = 2 \ln(x^2 + 2) - 2$
$f_3(x) = 3 \ln(x^2 + 3) - 3$



d) Jeder Graph der Funktion $f_a(x)$ ist axialsymmetrisch und besitzt 2 Wendepunkte, die auch symmetrisch zur y-Achse liegen. Ebenso verhält es sich mit den Wendetangenten, sie können sich nur auf der y-Achse schneiden.

$$m_{t_1} = f_a'(\sqrt{a}) = a\frac{2\sqrt{a}}{a+a} = \sqrt{a} \qquad m_{t_2} = f_a'(-\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$$

t_1: $y - (a\ln 2a - a) = \sqrt{a}(x - \sqrt{a})$

$$y = \sqrt{a}\,x - 2a + a\ln 2a \qquad \Rightarrow S(0;\ a\ln 2a - 2a)$$

S fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen, wenn gilt:

$$a\ln 2a - 2a = 0$$

$$\ln 2a = 2 \qquad \Rightarrow 2a = e^2;\ a = \frac{e^2}{2}$$

$$t_1 \perp t_2 \Leftrightarrow m_{t_2} = -\frac{1}{m_{t_1}} \text{ d.h. } -\sqrt{a} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \qquad \Rightarrow a = 1$$

e) $f_a'(x) = \dfrac{2ax}{x^2 + a}$

$$A(a) = \int_0^a f_a'(x)dx = [f_a(x)]_0^a = [a\ln(x^2 + a)]_0^a = a\ln(a^2 + a) - a\ln a$$

$$= a\ln\frac{a^2 + a}{a} = a\ln(a + 1)$$

f) $g(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$

Da der Graph von g durch O(0; 0) verläuft, folgt: $g(0) = \ln c = 0 \Rightarrow c = 1$

$$g'(x) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

$$g'(0) = 2 = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} \qquad \Rightarrow b = 2$$

$g'(2) = 0$: $\quad 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$, also folgt $g(x) = \ln(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1)$

Die Funktion ist definiert für $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 > 0$ bzw. $x^2 - 4x - 2 < 0$.

Da $x^2 - 4x - 2 = 0$ die Lösungen $2 \pm \sqrt{6}$ besitzt, ergibt sich für den Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$: $2 - \sqrt{6} < x < 2 + \sqrt{6}$.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2:

$y = f_a(x) = \sin x + a\cos x \ (x \in \mathbb{R})$

a) $f_1(x) = \sin x + \cos x$

Nullstellen:

$$\sin x_0 + \cos x_0 = 0$$
$$\sin x_0 = -\cos x_0 \quad |: (\cos x_0 \neq 0)$$
$$\tan x_0 = -1$$

$\Rightarrow \quad x_0 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ bzw. $\frac{3}{4}\pi + k\pi$

$f_a(x)$: $\quad \sin x_0 = -a\cos x_0 \quad |: \cos x_0$

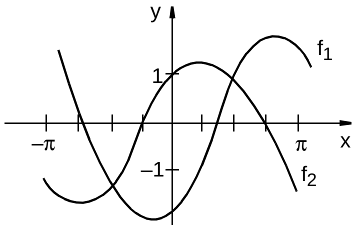
$\tan x_0 = -a$

Mit $\frac{2}{3}\pi \le x_0 \le \frac{3}{4}\pi$ folgt $\tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$ und $\tan\frac{3}{4}\pi = -1$, also $1 \le a \le \sqrt{3}$.

b)

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f_1(x) = \sin x + \cos x$	-1	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	0	-1

x	$-\pi$	$-2{,}035$	$-0{,}464$	0	1,107	2,693	π
$f_{-2}(x) = \sin x - 2\cos x$	2	0,001	$-2{,}236$	-2	0,0003	2,236	2



c) $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x)dx$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x)dx = \pi\left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0\right) = \pi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} + \pi \text{ (VE)}$$

d) $f_a'(x) = \cos x - a\sin x$

$f_a'(0) = 1 = m_1$; $\quad f_a'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - a\frac{1}{2}\sqrt{3} = m_2$

Wegen $t_1 \perp t_2 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$ folgt $\frac{1}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = -1$

$$\frac{3}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

e) $f_{a_1}(x) = \sin x + a_1\cos x$

$f_{a_2}(x) = \sin x + a_2\cos x$

Aus $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$ folgt $a_1\cos x = a_2\cos x$

$(a_1 - a_2)\cos x = 0$ gilt nur für $\cos x = 0$, da $a \neq 0$ im Intervall $-\pi \le x \le \pi$, also für $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow S_1(-\frac{\pi}{2}; -1)$, $S_2(\frac{\pi}{2}; 1)$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f_{a_2}(x) - f_{a_1}(x)]dx; \quad (a_1 < a_2)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a_2\cos x - a_1\cos x)dx = (a_2 - a_1)[\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (a_2 - a_1)(1 + 1) = 2(a_2 - a_1) \text{ FE}$$

f) Eine Funktion ist in einem Intervall monoton fallend , wenn ihre Ableitung in diesem Intervall kleiner als 0 ist: $f_a'(x)$ m. f. $\Leftrightarrow f_a''(x) < 0$

$f_a(x) = \sin x + a\cos x$

$f_a'(x) = \cos x - a\sin x$

$f_a''(x) = -\sin x - a\cos x = -f_a(x)$

$\Rightarrow f_a(x) > 0 \Leftrightarrow f_a''(x) < 0$, d.h., wenn $f_a(x) > 0$, ist $f_a'(x)$ monoton fallend.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1:

a) g_{AB} : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$

h_r : $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ 2 \\ r+3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

$h_r^* \cap g = S$ (I) $r + 3t = 7 - 7s$

(II) $2 - 2{,}5t = -3 + 5s$

(III) $r + 3 - t = 2 - 3s$

aus (II) folgt: $t = 2 - 2s$ (II*)

(II*) in (I) $r + 3(2 - 2s) = 7 - 7s \Rightarrow r + s = 1$

(II*) in (III) $r + 3 - 2 + 2s = 2 - 3s \Rightarrow r + 5s = 1$

$\Rightarrow s = 0$, $r = 1$, $t = 2$ und $S(7; -3; 2)$

$$\cos\sphericalangle(h_r^*; g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-21 - 12{,}5 + 3|}{\sqrt{9 + 6{,}25 + 1} \cdot \sqrt{49 + 25 + 9}} \approx 0{,}8305$$

$\sphericalangle(h_r^*; g) \approx 33{,}85°$

b) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist eindeutig eine Ebene bestimmt, wenn gilt:

$P_r \notin g$

(I) $\quad r = 7 - 7s$

(II) $\quad 2 = -3 + 5s$

(III) $\quad r + 3 = 2 - 3s$

$5 \cdot (I) + 7 \cdot (II): 5r + 14 = 14 \Rightarrow r = 0$

$3 \cdot (II) + 5 \cdot (III): 6 + 5r + 15 = 1,\ r = -4 \Rightarrow$ Widerspruch, $P_r \notin g$

c) $h_{-2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor der parallelen Ebenen steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der beiden windschiefen Geraden.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12{,}5 \\ -16 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

oder $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$A \in g$ bzw. $A \in \eta_1 \quad \Rightarrow \eta_1: 25x + 32y - 5z = 69$

$P_{-2} \in h_{-2}$ bzw. $P_{-2} \in \eta_2 \quad \Rightarrow \eta_2: 25x + 32y - 5z = 9$

d) $\varepsilon_{c;d}: 3x + y + dz = 6 + c - d$

$\varepsilon_{\frac{1}{2};-\frac{3}{4}}: 3x + y - \frac{3}{4}z = 6 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ bzw. $12x + 4y - 3z = 29$

$$d(g; \varepsilon) = 2 = \left| \frac{12(7 - 7s) + 4(-3 + 5s) - 3(2 - 3s) - 29}{\sqrt{12^2 + 16 + 9}} \right|$$

$$2 = \frac{|84 - 84s - 12 + 20s - 6 + 9s - 29|}{13}$$

$$26 = -55s_1 + 37 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{5}$$

$$-26 = -55s_2 + 37 \Rightarrow s_2 = \frac{63}{55}$$

$$T_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad T_1\left(\frac{28}{5}; -2; \frac{7}{5}\right)$$

$$T_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{63}{55}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad T_2\left(-\frac{56}{55}; \frac{30}{11}; -\frac{79}{55}\right)$$

e) g in $\varepsilon_{c;d}$: $3(7 - 7s) - 3 + 5s + d(2 - 3s) = 6 + c - d$

$$21 - 21s - 3 + 5s + 2d - 3ds = 6 + c - d$$

$$12 + 3d - c = (16 + 3d)s$$

$\Rightarrow$ Für $16 + 3d \neq 0$, d.h. $d \neq -\frac{16}{3}$, existiert 1 gemeinsamer Punkt,

für $d = -\frac{16}{3}$ und $12 + 3d - c = 0$, also $c = -4$, existieren unendlich viele

Punkte und für $d = -\frac{16}{3}$ und $c \neq 4$ existiert ein gemeinsamer Punkt.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2:

a) ε: $4x + 6y + 9z = 36$; A: $4 \cdot 9 = 36$ $\quad A \in \varepsilon$

B: $6 \cdot 6 = 36$ $\quad B \in \varepsilon$

C: $9 \cdot 4 = 36$ $\quad C \in \varepsilon$

b) $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$s \cap \varepsilon = S$: $\quad 4(7{,}5 - 3t) + 6(-2 + 2t) + 9(8 - 4t) = 36$

$$-36t + 90 = 36$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow S(3; 1; 2)$$

$$\sin \sphericalangle (g;\varepsilon) = \sin \sphericalangle (\vec{a};\vec{n}) = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{16+36+81}\cdot\sqrt{9+4+16}} \approx 0{,}5796$$

$\sphericalangle (g;\varepsilon) \approx 35{,}43°$

c) $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix}$; $R \in l$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-9\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-9\\0\\4\end{pmatrix}$

Lösungsvariante 1: über Spatprodukt

Mit $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix}$ und $R\in l$ folgt

$$\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-9\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6+4s\\1+6s\\2+9s\end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}-9 & 6 & 0\\-9 & 0 & 4\\-6+4s & 1+6s & 2+9s\end{vmatrix} = 532$$

$|798s| = 6 \cdot 532$

$s_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow \quad x_R = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \pm 4\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix}$ und $R_1(19;25;38)$; $R_2(-13;-23;-34)$

Lösungsvariante 2:
Berechnung der Grundfläche ABC

$$A_G = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{81}{\sqrt{117}\sqrt{97}}$$

$\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos \dfrac{81}{\sqrt{117}\sqrt{97}}$ $(\approx 40{,}51°)$

$A_G = \frac{1}{2}\sqrt{117}\sqrt{97} \cdot \sin\left(\arccos \dfrac{81}{\sqrt{117}\sqrt{97}}\right)$

$A_G \approx 34{,}598$

$d(R; \varepsilon) = \left|\dfrac{4(3+4s)+6(1+6s)+9(2+9s)-36}{\sqrt{16+36+81}}\right| = \dfrac{|133s|}{\sqrt{133}}$

$V = \frac{1}{3} A_G d(R; \varepsilon)$

$V = \frac{1}{3} \cdot 34{,}598 \cdot \dfrac{|133s|}{\sqrt{133}} = 532$

$|133s| = 532$

$s_{1,2} = \pm 4$ In Gleichung für l eingesetzt, ergibt R_1 und R_2 wie bei Variante 1.

d) Da l, s $\in \eta$, folgt $\vec{n}_\eta \perp \vec{a}_l$ und $\vec{n}_\eta \perp \vec{a}_s$, also $\vec{n}_\eta \cdot \vec{a}_l = 0$ und $\vec{n}_\eta \cdot \vec{a}_s = 0$:

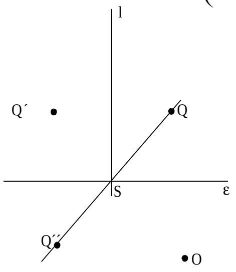
$\vec{n}_\eta = \vec{a}_l \times \vec{a}_s = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 11 \\ -26 \end{pmatrix}$

bzw. $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{n}_\eta = \begin{pmatrix} 42 \\ 11 \\ -26 \end{pmatrix}$

η: $42x + 11y - 26z = 85$

oder in Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

e)



$\overrightarrow{OQ''} = \overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{QS}$

$= \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$d(Q, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot 7,5 + 6 \cdot (-2) + 9 \cdot 8 - 36|}{\sqrt{16 + 36 + 8}} = \frac{54}{\sqrt{133}} = d(Q''; \varepsilon)$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ''} + 2d(Q''; \varepsilon) \cdot \vec{n}_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \frac{54}{\sqrt{133}} \frac{1}{\sqrt{133}} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{108}{133} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{465}{266} \\ \frac{1180}{133} \\ \frac{440}{133} \end{pmatrix} \Rightarrow Q'\left(\frac{465}{266}; \frac{1180}{133}; \frac{440}{133}\right)$$

f) Die Punkte A, B, C der Glasscheibe liegen auf den 3 Koordinatenachsen.
S befindet sich auf der Glasscheibe, wenn seine Koordinaten zwischen den jeweiligen Koordinaten der Punkte A, B, C liegen. S ist der Schnittpunkt von s mit ε.
Mit A(9; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 4) und S(3; 1; 2)
folgt $0 < x_S < 9$
$0 < y_S < 6$
$0 < z_S < 4$
Also trifft der Strahl die Glasplatte.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3:

Euro fehlerhaft 0,06; Euro nicht fehlerhaft 0,94

a) n = 100; p = 0,06; k = 0,1 Binominalverteilung liegt vor, d. h., es gilt

$$P(A) = \binom{100}{0} \cdot 0,94^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0,06 \cdot 0,94^{99} \approx 0,01517$$

b) P(„Karton fehlerfrei“) = $0,94^{100}$
P(„Karton fehlerhaft“) = $1 - 0,94^{100}$
$P(B) = 1 - (1 - 0,94^{100})^{10} \approx 0,0204$

$$P(\text{„4 fehlerhafte Euro im Karton“}) = \binom{100}{4} \cdot 0,06^4 \cdot 0,94^{96} \approx 0{,}1338 = p$$

$$P(C) = \binom{10}{1} \cdot p \cdot (1-p)^9 \approx 0{,}3673$$

c) f fehlerhaft

2 Möglichkeiten: $f\,\bar{f}\,f$; $\bar{f}\,f\,f \Rightarrow P(D) = \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} + \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{190} = \frac{1}{95}$

d) $n = 10000 \quad \mu = n \cdot p = 10000 \cdot 0,06 = 600$

Da die LAPLACE-Bedingung $n \cdot p(1-p) > 9$ erfüllt ist, kann eine Näherung durch die Normalverteilung vorgenommen werden.

$$P(E) = P(x \le 590) \approx \Phi\left(\frac{590 - 600 + 0,5}{\sqrt{564}}\right) = \Phi(-0,4)$$

$$= 1 - \Phi(0{,}40) \approx 0{,}34458$$

e) S_i: Fehler auf Seite i , i = 1, 2

$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = p + p - p \cdot p = 0{,}06$

$p^2 - 2p + 0{,}06 = 0$

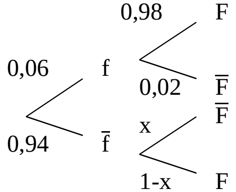
$p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0,06} \approx 1 \pm 0{,}9695$

$p_1 \approx 0{,}0305$; $p_2 > 1$ entfällt

f) f: Euro fehlerhaft

F: Euro als fehlerhaft eingestuft

Baumdiadramm:



P(„richtig beurteilt“)

$= 0,06 \cdot 0,98 + 0,94 \cdot x = 0,99$

$x \approx 0{,}9906$

$$q = \frac{P(\bar{f} \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0,94 \cdot 0,9906}{0,94 \cdot 0,9906 + 0,06 \cdot 0,02} \approx 0{,}9987$$

g) Euro befindet sich im Schubfach 1 ... 3

$$P_{\overline{1}\cap\overline{2}}(3) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

($\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$: Wahrscheinlichkeit, dass sich der Euro im Schubfach 3 oder gar nicht im Schreibtisch befindet)