Mathematik

Abiturprüfung Leistungskurs 1994/95 und 1995/96

Gymnasium · Sachsen
Sachsen - Anhalt
Thüringen
Mecklenburg - Vorpommern
Berlin

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer:
R. Heinrich (Sachsen)
B. Göpfert (Sachsen-Anhalt)
E. M. Westerhoff (Thüringen)
E. Pietsch / Ch. Sikora (Mecklenburg-Vorpommern)
M. Marrek (Berlin)

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

1. Auflage

1 5 4 3 2 1 2000 99 98 97 96

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Satz und Layout: M. Holzinger, Dr. U. Schwippl, C. Stein, Berlin
Druck: Druckerei zu Altenburg

ISBN 3-89517-005-4

Inhalt

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält Abituraufgaben, welche im Schuljahr 1995/96 in den Bundesländern Sachsen, Sachsen - Anhalt, Thüringen und Mecklenburg - Vorpommern in der zentralen Abiturprüfung gestellt wurden. Weiterhin wurden in diese Sammlung die Abituraufgaben des Landes Thüringen im Jahr 1994/95 aufgenommen sowie (da es im Land Berlin kein zentrales Abitur im Fach Mathematik gibt) ein Beispiel für Abituraufgaben von der Einstein-Oberschule (3. OG) in Berlin-Marzahn.

Die Aufgabensammlung soll Schülern und Lehrern Hilfe bei der Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung bieten.
Die Bewertungsrichtlinien haben empfehlenden Charakter und geben die Möglichkeit zur Selbstkontrolle durch den Abiturienten. Lehrer können dem Material mit Sicherheit Anregungen für die Entwicklung eigener Abitur- bzw. Klausuraufgaben entnehmen.

Wir werden auch in den kommenden Jahren Abituraufgaben des zentralen Abiturs bzw. ausgewählter Schulen veröffentlichen. Hinweise, Vorschläge oder Kritiken, die der Verbesserung dieser Aufgabensammlungen dienen können, nimmt der Verlage gern entgegen.

Berlin, Juli 1996 Die Redaktion

Verzeichnis der verwendeten Symbole

Die folgende Übersicht soll und kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Allgemein bekannte Fachtermini und mathematische Zeichen (z. B.: $\in$, $\int$, $|a|$) wurden darin bewußt ausgespart.
Vielmehr konzentrieren wir uns auf solche Symbole, die in den einschlägigen Schulbüchern nicht einheitlich gebraucht werden.
Die Übersicht orientiert sich streng an den in Sachsen für Abituraufgaben und Lehrermaterial verwendeten Symbolen.

1. Mengen und Zahlen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
i	Bezeichnung der imaginären Einheit ($\sqrt{-1}$) in den Aufgaben zum Thema „Komplexe Zahlen“
$\{a_1; a_2; a_3\}$	Menge mit den Elementen a_1; a_2; a_3
{x: ...}	Menge aller x, für die gilt: ...
Ø	leere Menge
$g_u \leq x \leq g_o$	abgeschlossenes Intervall
[a; b]	abgeschlossenes Intervall
$g_u < x < g_o$	offenes Intervall
w. A.	wahre Aussage
f. A.	falsche Aussage

2. Funktionen

f	Funktion
x	vorzugsweise Bezeichnung für Argumente
f(x)	vorzugsweise Bezeichnung für Funktionswerte
D_f	Definitionsbereich
W_f	Wertebereich
f: y = f(x) = ...	Angabe einer Funktionsgleichung der Funktion f
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$	linksseitiger Grenzwert von x_0
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$	rechtsseitiger Grenzwert von x_0
x_N	vorzugsweise Bezeichnung für Nullstellen
x_E	vorzugsweise Bezeichnung für Extremstellen

$(x;\ y)$	Koordinaten eines Punktes des Funktionsgraphen
$(x_E;\ y_E)$	Koordinaten eines Extrempunktes
P_E	lokaler Extrempunkt
P_{MIN}	lokaler Minimumpunkt
P_{MAX}	lokaler Maximumpunkt
x_W	Wendestelle
$(x_W;\ y_W)$	Koordinaten eines Wendepunktes
P_W	Wendepunkt
(a_n)	Zahlenfolge

3. Geometrische Objekte

$\overline{AB}$	Strecke
$\Delta\ ABC$	Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C
$\vec{x};\ \overrightarrow{AB}$	Vektor
$(x;y;z)$	Koordinaten eines Punktes
$g(SA)$	Gerade g, verläuft durch S und A
$M_{\overline{AB}}$	Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$
$m_{\overline{AB}}$	Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$
$\vec{n}$	vorzugsweise Bezeichnung für Normalenvektor (Stellungsvektor)
$\perp$	orthogonal
k	vorzugsweise Bezeichnung für Kreis
K	vorzugsweise Bezeichnung für Kugel
$F_1;\ F_2$	Brennpunkte in Aufgaben zum Thema Kegelschnitte
$S_1;\ S_2$	Scheitelpunkte in Aufgaben zum Thema Kegelschnitte

4. Stochastik

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
$P(I\|\ B)$	Wahrscheinlichkeit von I unter der Bedingung B bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(I)$
$P(X = 1)$	Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße X den Wert 1 annimmt
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsgröße X
$V(X)$	Varianz der Zufallsgröße X
$B(n;\ p)$	Binomialverteilung mit den Parametern n und p
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient

In den Lösungen werden die berechneten Wahrscheinlichkeiten meist gerundet auf vier Dezimalstellen angegeben.

Mathematik

Abiturprüfung Leistungskurs

1995/96

Gymnasium · Sachsen

Aufgabe A1: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_t durch $y = f_t(x) = \frac{t^2+2}{2}\cos(tx)$ $(t \in \mathbb{R}, t > 0; x \in \mathbb{R})$.

a) Führen Sie für die Funktion f_2 eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Symmetrie, kleinste Periode, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema).
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_2 im Intervall $0 \leq x \leq \pi$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion f_2 im Punkt $P(\frac{\pi}{4}; f_2(\frac{\pi}{4}))$.

b) Für jedes t begrenzen die Koordinatenachsen und der Graph der Funktion f_t im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2t}$ eine Fläche A_t vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von t.
Ermitteln Sie den Wert für t, für welchen diese Fläche minimal wird.
Die Fläche A_t erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.
Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers.

c) Gegeben ist die Funktion g durch $y = g(x) = 2\sin(4x)$ $(x \in \mathbb{R})$.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion g im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a) ein.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f_2 und g.

d) Die Funktion s ist gegeben durch $y = s(x) = f_2(x) + g(x)$.
Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktion s im Intervall $0 \leq x \leq \pi$, und untersuchen Sie die Art der Extrema.

Aufgabe A 2: Analysis

Gegeben sind die Funktionen
f_a durch $y = f_a(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in D_{f_a})$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen f_a in Abhängigkeit von a an, und führen Sie für die Funktionen f_a eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Symmetrie, Monotonie, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Koordinaten der Wendepunkte).
Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_4 im größtmöglichen Definitionsbereich.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Wendetangenten an die Graphen der Funktionen f_a in Abhängigkeit von a.

c) Gegeben sind die Funktionen F_a durch
$F_a(x) = (a + x) \cdot \ln(a + x) + (a - x) \cdot \ln(a - x)$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in D_{F_a})$.
Weisen Sie nach, daß für jedes a die Funktion F_a Stammfunktion der Funktion f_a ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f_1 und f_4, sowie der Geraden mit der Gleichung $x = 0{,}5$ vollständig begrenzt wird.

d) Gegeben ist die Funktion h durch $y = h(x) = \frac{2}{1 - x^2}$ $(x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1)$.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion h im Intervall $-1 < x < 1$.
Jede der Geraden mit der Gleichung $x = u$ $(u \in \mathbb{R}, 0 < u < 1)$ schneidet den Graph der Funktion h im Punkt P_u und den Graph der Funktion f_1 im Punkt Q_u.
Für welchen Wert u ist der Abstand $\overline{P_u Q_u}$ minimal?
Berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

Aufgabe A 3: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten der lokalen Extrempunkte, Art der Extrema, Koordinaten der Wendepunkte, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen).
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-4 \le x \le 4$.

b) Es gibt Rechtecke, von denen zwei Eckpunkte auf der x-Achse und die anderen Eckpunkte auf dem Graph der Funktion f liegen.
Weisen Sie nach, daß unter diesen Rechtecken ein flächengrößtes Rechteck existiert, und berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.

c) Durch die Koordinatenachsen, den Graph der Funktion f und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ wird eine Fläche vollständig begrenzt. Diese Fläche rotiere um die y-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers.

d) Ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(0; 0)$ berührt den Graph der Funktion f in genau zwei Punkten.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Berührungspunkte.

e) Gegeben sind die Funktionen f_a durch $y = f_a(x) = \frac{a}{x^2 + 1}$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in \mathbb{R})$.
Für jede dieser Funktionen existieren genau zwei Geraden, die den Punkt $S(0; f_a(0))$ enthalten und den Graph von f_a in genau einem weiteren Punkt berühren.

Ermitteln Sie für beide Geraden jeweils eine Gleichung in Abhängigkeit von a. Diese Geraden und die x-Achse begrenzen ein Dreieck. Für welchen Wert von a hat dieses Dreieck den Flächeninhalt 10?

Aufgabe A 4: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = 2 \cdot e^{2-x} - 2$ ($x \in D_f$).

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an, und führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen, Monotonie, Verhalten im Unendlichen).
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f im Intervall $0 \le x \le 5$.

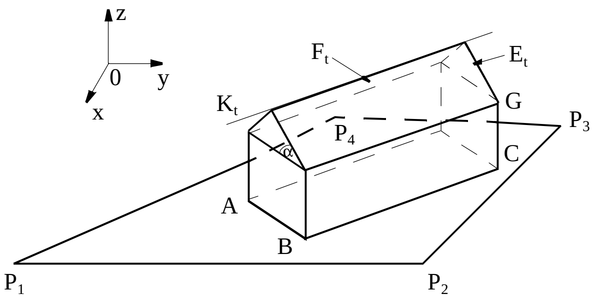
b) In jedem Punkt $P(u; f(u))$ ($u \in \mathbb{R}$) existiert genau eine Tangente t_u an den Graph der Funktion f.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangenten t_u.
Berechnen Sie den Wert für u, für den die zugehörige Tangente t_u durch den Punkt $B(1; -2)$ verläuft.
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.
Zeichnen Sie die durch B verlaufende Tangente in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a) ein.

c) Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die y-Achse begrenzen eine Fläche A vollständig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A.
Der Fläche A seien Rechtecke so einbeschrieben, daß eine Rechteckseite auf der x-Achse, eine Rechteckseite auf der y-Achse und ein Eckpunkt auf dem Graph der Funktion f liegen. Durch Rotation dieser Rechtecke um die y-Achse werden Zylinder erzeugt.
Zeigen Sie, daß unter diesen Zylindern ein Zylinder mit maximalem Oberflächeninhalt existiert.
Ermitteln Sie den Oberflächeninhalt dieses Zylinders.

d) Gegeben ist das Dreieck ABC durch die Punkte $A(0; -2)$, $B(1; -2)$ und $C(0; f(0))$. Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$; $a > 0$) begrenzen die Gerade mit der Gleichung $x = a$, der Graph der Funktion f, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $y = -2$ eine Fläche A_a vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_a in Abhängigkeit von a.
Ermitteln Sie $\lim\limits_{a \to \infty} A_a$.
Bestimmen Sie den Wert für a so, daß sich der Flächeninhalt der Fläche A_a zum Flächeninhalt des Dreiecks ABC wie 3 : 2 verhält.

Aufgabe B 1: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

Familie Baumann hat sich ein Grundstück gekauft und möchte darauf ein Eigenheim errichten. Das ebene, viereckige Grundstück wird durch die Grenzsteine $P_1\,(25;\,0;\,0)$, $P_2\,(x_2;\,y_2;\,0)$, $P_3\,(-2;\,36;\,0)$ und $P_4\,(-5;\,15;\,0)$ markiert ($\underline{1\text{ LE}} \triangleq 1\text{ m}$).
Die Grenzsteine P_2 und P_4 liegen achsensymmetrisch zur Diagonale $\overline{P_1P_3}$.
(Skizze nicht maßstäblich)



a) Berechnen Sie die Standortkoordinaten des Grenzsteines P_2.
Welchen Grundstückspreis mußte Familie Baumann bezahlen, wenn der Quadratmeterpreis des erschlossenen Grundstücks 73 DM beträgt.

Das Eigenheim kann als Quader mit einem aufgesetzten, dreiseitigen, geraden Prisma angenommen werden.
Der Punkt $C(4;\,33;\,0)$ ist ein Eckpunkt der Fundamentplatte.
Jedes Haus des gewählten Typs hat eine Breite $\overline{AB} = 10$ m und eine Länge $\overline{BC} = 15$ m.
Der Dachneigungswinkel α wird durch den Parameter t beeinflußt.
Die beiden Rechtecke des Daches liegen in den Ebenen

E_t: $3tx + 4ty + 25z = 144t + 200$ bzw.

F_t: $3tx + 4ty - 25z = 94t - 200$ $(t \in \mathbb{R},\ t > 0)$

(siehe Skizze).

b) Zeigen Sie, daß die Seitenwandhöhe $\overline{CG}$ jedes solchen Hauses von der Wahl des Parameters t unabhängig ist, und berechnen Sie diese.

c) In einer speziellen Ausführung des Projektes liegen die Dachflächen in den Ebenen E_5 bzw. F_5.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Dachfirstgeraden k_5.
Weisen Sie nach, daß die Dachebenen E_5 und F_5 orthogonal zueinander sind.
Für die Finanzierung des Hauses wird der umbaute Raum (Gesamtvolumen des Hauses ohne Berücksichtigung der Wandstärken) benötigt.
Berechnen Sie für dieses spezielle Projekt den umbauten Raum.

d) Um den umbauten Raum zu verkleinern, soll der Dachneigungswinkel α verringert werden. Als Auflage vom Bauamt muß dieser Winkel zwischen 30° und 45° liegen.
Berechnen Sie für diese Bedingungen das Intervall der möglichen Parameterwerte von t.

e) Zum Bau des Hauses wird ein Turmdrehkran mit horizontalem Ausleger verwendet. Der Kran soll so aufgestellt werden, daß die Grenzsteine P_1, P_3 und P_4 gleichweit vom Standort des Kranes entfernt sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Kranstandortes und die erforderliche Auslegerlänge.
Überprüfen Sie, ob durch solch einen Kran bei dieser Aufstellung das gesamte Grundstück erreicht werden kann.

Aufgabe B 2: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1;2;1)$, $B(3;1;3)$, $C(5,3,2)$ und $D(3;4;0)$ und $S(\frac{3}{2};\frac{11}{2};\frac{9}{2})$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene E_1.
Stellen Sie für die Ebene E_1 eine Parametergleichung und eine Gleichung in parameterfreier Form auf.
Weisen Sie nach, daß die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrates sind.

b) Der Punkt S ist die Spitze der Pyramide ABCDS. Von der Spitze S wird das Lot auf die Ebene, welche die Grundfläche der Pyramide enthält, gefällt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F.
Zeigen Sie, daß die Pyramide ABCDS eine gerade Pyramide ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS und die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche ABCD und einer der Seitenflächen der Pyramide.

c) Gegeben ist die Kugel K durch die Gleichung $(x-\frac{8}{3})^2+(y-\frac{19}{6})^2+(z-\frac{13}{6})^2=1$, deren Mittelpunkt auf der Höhe $\overline{FS}$ der Pyramide ABCDS liegt.
Zeigen Sie, daß die Ebene E_1 Tangentialebene an die Kugel K ist.
Überprüfen Sie, ob es Punkte der Kugel K gibt, die außerhalb der Pyramide ABCDS liegen.

d) Die Pyramide ABCDS wird von einer zur Ebene E_1 parallelen Ebene E_2 geschnitten, so daß das Volumen des dadurch entstehenden Pyramidenstumpfes $\frac{19}{2}$ beträgt.
Stellen Sie für die Ebene E_2 eine Gleichung in parameterfreier Form auf.

Aufgabe B 3: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(4; 0; 0), B(7; 8; 0), C(0; 6; 0), D(0; 0; 0) und F(3; 10; 8) gegeben.

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDF.

b) Durch die Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 der Kanten $\overline{AF}$ bzw. $\overline{BF}$ und durch den Punkt G(1,5; 5; 7) ist eine Ebene E_1 bestimmt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in parameterfreier Form.
Die Ebene E_1 und die durch die Punkte D und F verlaufende Gerade g schneiden sich im Punkt S_1.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S_1 sowie die Größe des Schnittwinkels zwischen der Ebene E_1 und der Geraden g.

c) Der Mittelpunkt M_3 der Kante $\overline{CF}$ und die Punkte M_1 und M_2 bestimmen eine Ebene E_2.
Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen den Ebenen E_1 und E_2.

d) Die Punkte L_1, L_2 bzw. L_3 sind die Fußpunkte der Lote vom Punkt F auf die x-y-Koordinatenebene, x-z-Koordinatenebene bzw. y-z-Koordinatenebene.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks $L_1L_2L_3$.

e) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung des in der x-y-Koordinatenebene liegenden Kreises, der durch die Punkte A, B und C verläuft.
Zeigen Sie, daß das Viereck ABCD kein Sehnenviereck ist.

f) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes H so, daß das Viereck DABH ein Drachenviereck ist.

Aufgabe B 4: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2; 2; 0), B(8; 2; 8) und $C_t(-3 + 4t; -22 + 25t; 10 - 3t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß alle Punkte C_t auf einer Geraden g liegen, und geben Sie eine Gleichung dieser Geraden g an.

b) Die Punkte A, B und C_2 bestimmen die Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in parameterfreier Form.
Untersuchen Sie die Lage der Ebene E zu den Koordinatenachsen, und berechnen Sie die Koordinaten der gegebenfalls existierenden Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen.
Die Ebene E, die Koordinatenebenen und die Ebene mit der Gleichung y = 3 begrenzen ein gerades, dreiseitiges Prisma vollständig.

Zeichnen Sie dieses Prisma in ein kartesisches Koordinatensystem.
Berechnen Sie das Volumen des Prismas.

c) Weisen Sie nach, daß alle Dreiecke ABC_t gleichschenklig sind.
Zeigen Sie, daß unter allen Dreiecken ABC_t eines mit minimalem Flächeninhalt existiert, und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_t sowie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

d) Gegeben sei die Kugel K, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und die den Radius 2 besitzt.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen an die Kugel K, die sowohl den Punkt A als auch den Punkt B enthalten.

Aufgabe C 1: Stochastik

Susanne kommt regelmäßig mit der Straßenbahn zur Schule. Auf der Fahrstrecke passiert die Bahn 5 Ampeln und 2 Weichen.
Die Ampeln geben unabhängig voneinander der Bahn mit je 30% Wahrscheinlichkeit freie Fahrt. An den Weichen hat die Bahn mit je 96% Wahrscheinlichkeit freie Fahrt, d.h., in ca. 4% der Fälle muß die Bahn halten und die Weiche von Hand gestellt werden.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Die Bahn muß an genau einer Ampel und an keiner Weiche halten.
Ereignis B: Die Bahn muß nur an der ersten Ampel und nur an der ersten Weiche halten.
Ereignis C: Die Bahn hat an allen Ampeln und an allen Weichen freie Fahrt.

b) Susanne hat über einen längeren Zeitraum die Wartezeiten an Weichen und Ampeln notiert und dabei folgende Mittelwerte erhalten:

„Hindernis“	Wartezeit in Sekunden
Ampel	30
Weiche	100

Ermitteln Sie die durchschnittliche Wartezeit der Bahn auf Susannes Schulweg.
Geben Sie für alle Fälle, bei denen die Bahn an mehr Weichen als an Ampeln hält, jeweils die Wahrscheinlichkeit an, mit der der Fall eintritt.

c) Montags, dienstags und mittwochs fährt Susanne gemeinsam mit ihrer Freundin mit der Bahn zur Schule. Fährt die Bahn mit mehreren Wagen, steigen Sie

in den „Wagen 2“ ein, sonst in den „Wagen 1“.
Donnerstags und freitags fährt Susanne allein zur Schule und benutzt stets den „Wagen 1“.
Nach Angaben der Verkehrsbetriebe verkehren an Schultagen auf Susannes Linie 95% aller Straßenbahnen mit mehr als einem Wagen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die folgenden Ereignisse an einem beliebigen Schultag einer vollen Unterrichtswoche (5 Schultage) eintreten:
Ereignis D: Susanne fährt im „Wagen 1“ zur Schule.
Ereignis F: Susanne fährt mit ihrer Freundin im „Wagen 1“ zur Schule.

d) Susanne erklärt ihrem Tutor, daß die Wahrscheinlichkeit, mit der sie zu spät zur Schule kommt, 10% beträgt.
Der Tutor lehnt diese Hypothese mit der Begründung ab, daß sie von 50 Unterrichtstagen genau 9 mal zu spät gekommen ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er einen Fehler 1. Art begeht?

Aufgabe C 2: Stochastik

Bei einem Würfel W_1 haben alle sechs Seitenflächen die gleiche Chance aufzutreten. Auf einer Seitenfläche wurde die Augenzahl 2, auf zwei Seitenflächen die Augenzahl 3 und auf drei Seitenflächen die Augenzahl 4 angebracht.

a) Die Zufallsgröße X beschreibe die Augensumme beim zweifachen Wurf mit dem Würfel W_1.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an, und stellen Sie diese Verteilung in einem geeigneten Diagramm dar.

b) Wie oft muß der zweifache Wurf mit diesem Würfel mindestens durchgeführt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Augensumme größer als 6 in einem Doppelwurf den Wert 0,95 übersteigt?

c) Der zweifache Wurf mit diesem Würfel soll durch ein Urnenexperiment simuliert werden.
Beschreiben Sie ein entsprechendes Zufallsexperiment, indem Sie die Zusammensetzung des Urneninhaltes und die Art der Ziehung angeben.

Ein idealer Würfel W_2 sei mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 versehen.

d) Wie groß ist beim zweifachen Wurf des Würfels W_2 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Augensumme 7 auftritt und dabei in einem Wurf die Augenzahl 4 erscheint?

e) Ermitteln Sie rechnerisch, welcher der beiden Würfel W_1 oder W_2 benutzt werden muß, wenn die beim zweifachen Wurf erwartete Augensumme möglichst groß sein soll.

f) Der Spieler A spielt mit dem Würfel W_1 gegen den Spieler B, der den Würfel W_2 verwendet.
Jeder darf bei einem Spiel genau einmal werfen, und die höhere Augenzahl gewinnt.
Ermitteln Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die beiden Spieler.
Es wird vereinbart, daß bei jedem Spiel der Verlierer dem Sieger jeweils 2 DM zahlt. Zu Beginn einer Serie von 72 Spielen hat jeder Spieler 50 DM in seiner Kasse.
Welcher Kassenstand ist für den Spieler A und für den Spieler B nach dieser Serie zu erwarten?

Aufgabe C 3: Stochastik

Von zwei äußerlich nicht unterscheidbaren Urnen sei bekannt, daß sie weiße und schwarze Kugeln beinhalten. In Urne 1 sei der Anteil der weißen Kugeln 30%, in Urne 2 dagegen 50%.
Aus jeder dieser Urnen werde 50 Mal mit Zurücklegen gezogen.

a) Wieviel gezogene weiße Kugeln sind bei diesem Experiment bei Urne 1, wieviele bei Urne 2 zu erwarten?

b) Bestimmen Sie bei jeder der beiden Urnen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beim beschriebenen Experiment aufgetretene Anzahl der weißen Kugeln um weniger als 3 vom jeweiligen Erwartungswert abweicht.

In zufälliger Weise wird nun eine der beiden Urnen zum 50maligen Ziehen mit Zurücklegen ausgewählt.

c) Es wird angenommen, daß die zur Ziehung ausgewählte Urne die Urne 1 sei (Nullhypothese).
Welche Ziehungsergebnisse führen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % dazu, daß man die Nullhypothese ablehnen und eine Wahrscheinlichkeit größer als 0,3 für das Ziehen einer weißen Kugel annehmen muß?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}1$ die Hypothese „Es ist Urne 1“ nicht abgelehnt wurde, obwohl in Wirklichkeit die Ziehung aus Urne 2 erfolgte?

d) Jemand hat für sich festgelegt, die These „Es ist Urne 1“ abzulehnen, wenn mehr als 20 weiße Kugeln gezogen werden.
Wie groß ist in diesem Fall die Irrtumswahrscheinlichkeit?

e) Beim 50maligen Ziehen mit Zurücklegen erhalte man 20mal eine weiße Kugel. Auf die richtige Angabe der zur Ziehung verwendeten Urne ist ein Preis gesetzt.
   Für welche Urne würden Sie sich entscheiden?
   Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe C 4: Stochastik

Daniel und Marcel schießen mit einem Fußball auf eine Torwand mit zwei Löchern.
Beim Schießen auf das untere Loch trifft Daniel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 und beim Schießen auf das obere Loch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4.

a) Daniel schießt fünfmal auf das untere Loch.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   Ereignis A: Daniel trifft genau dreimal.
   Ereignis B: Daniel trifft nur beim zweiten und dritten Versuch.
   Ereignis C: Bei zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Versuchen treten stets unterschiedliche Ergebnisse auf.

b) Daniel nimmt an einem Wettbewerb teil, bei dem nur auf das obere Loch geschossen wird. Für einen Treffer werden fünf Pluspunkte vergeben, für einen Fehlschuß zwei Minuspunkte.
   Wie viele Punkte kann er bei 4 Versuchen durchschnittlich erwarten?

c) Daniel schießt im Training fünfmal auf das untere und fünfmal auf das obere Loch. Als Treffer zählen die Fälle, bei denen das anvisierte Loch getroffen wird.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   Ereignis D: Daniel erzielt mindestens einen Treffer.
   Ereignis E: Daniel erzielt mindestens zwei Treffer.

d) Marcel meint, er habe beim Schießen auf das untere Loch eine Trefferwahrscheinlichkeit, die größer als 0,5 ist.
   Daniel behauptet dagegen, Marcels Trefferwahrscheinlichkeit sei höchstens 0,5. Zur Überprüfung wird ein Test durchgeführt, bei dem Marcel 20mal auf die Torwand schießt und dabei 13 Treffer erzielt.
   Muß Daniel seine Behauptung zurücknehmen, wenn er eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % einkalkuliert?

Aufgabe A1: Analysis

$f_2(x) = 3 \cdot \cos(2x)$

a) Nullstellen; $\cos(2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N = \frac{\pi}{4} + \frac{k \cdot \pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Symmetrie: $f(-x) = 3 \cdot \cos(2 \cdot (-x)) = 3 \cdot \cos(2x) = f(x)$

$\Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse

kleinste Periode: π

1. Ableitung: $f'(x) = -6 \cdot \sin(2x)$

2. Ableitung: $f''(x) = -12 \cdot \cos(2x)$

Extremstellen: $f_t' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = \frac{k \cdot \pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$f_t''\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) = -(12) \cdot (-1)$ für ungerade k

$\Rightarrow \quad f_t''\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) > 0$ für ungerade k $\quad \Rightarrow \quad$ lokales Minimum

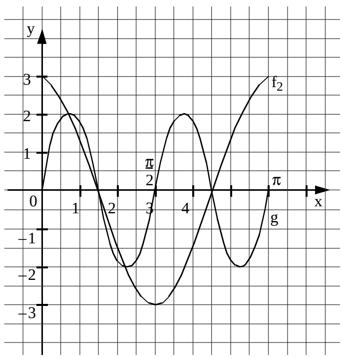
$f_t''\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) = -(12) \cdot 1$ für gerade k

$f_t''\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) = < 0$ für gerade k $\quad \Rightarrow \quad$ lokales Maximum

Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{MAX}(k \cdot \pi; 3)$

$P_{MIN}\left(\frac{2k+1}{2}\pi; -3\right)$

Graph (auch Graph von Aufgabenteil c):



Ansatz für Tangente: $y = m \cdot x + n$

$0 = (-6) \cdot \frac{\pi}{4} + n$

Gleichung der Tangente: $y = -6x + \frac{3 \cdot \pi}{2}$

b) $A(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2t}} \frac{t^2+2}{2} \cdot \cos(tx)\,dx = \left[\frac{t^2+2}{2t} \cdot \sin(tx)\right]_0^{\frac{\pi}{2t}}$

Flächeninhalt in Abhängigkeit von t: $A(t) = \frac{t^2+2}{2t}$

$$A'(t) = \frac{2t \cdot 2t - 2t^2 - 4}{4t^2} = \frac{2t^2 - 4}{4t^2}$$

$$0 = 2t^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\sqrt{2} \quad \text{(entfällt, da } t > 0 \text{ gefordert)}$$

$$t_2 = \sqrt{2} \quad \text{(trifft zu)}$$

$$A''(t) = \frac{16t^3 - 16t^3 + 32t}{16t} = \frac{2}{t^3}$$

$$A''(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Minimum}$$

Flächeninhalt: $A(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Ansatz für Volumen: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\cos(2x))^2\,dx$

$$= 9\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x))^2\,dx$$

$$= \frac{9\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{\sin(2x) \cdot \cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{9}{2}\pi \cdot \left[x + \frac{\sin(2x) \cdot \cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{9}{8} \cdot \pi^2$$

Volumen: $\frac{9}{8} \cdot \pi^2$

c) $2 \cdot \sin(4x) = 3 \cdot \cos(2x)$

Substitution: $z = 2x$

$2 \cdot \sin(2z) = 3 \cdot \cos z$

$3\cos z = 4 \cdot \sin z \cdot \cos z$

$\cos z \cdot (3 - 4\sin z) = 0$

$\cos z = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k \cdot \pi}{2}\,;\; y_1 = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\frac{3}{4} = \sin z \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}848 + k \cdot 2\pi$

$z_3 = 2{,}294 + k \cdot 2\pi$

$\Rightarrow \quad x_2 = 0{,}424 + k \cdot \pi$

$x_3 = 1{,}147 + k \cdot \pi$

Koordinaten der Schnittpunkte: $S_1(\frac{\pi}{4} + \frac{k \cdot \pi}{2}; 0)$

$S_2(0{,}42 + k \cdot \pi; 1{,}98)$

$S_3(1{,}15 + k \cdot \pi; -1{,}98)$

d) $s(x) = 3\cos(2x) + 2\sin(4x)$
$s'(x) = -6\sin(2x) + 8\cos(4x)$
$s''(x) = -12\cos(2x) - 32\sin(4x)$
$s'(x) = 0$

$0 = -6\sin(2x) + 8\cos(4x)$

Substitution: $2x = z$

$0 = -6\sin z + 8\cos(2z)$

$0 = -6\sin z + 8(1 - 2\sin^2 z)$

$0 = -16\sin^2 z - 6\sin z + 8$

Substitution: $\sin z = u$

$0 = -16u^2 - 6u + 8$

$0 = u^2 + \frac{3}{8}u - \frac{1}{2}$

$u_1 = -\frac{3}{16} + \frac{\sqrt{137}}{16}$; $u_2 = -\frac{3}{16} - \frac{\sqrt{137}}{16}$

Näherungswerte: $u_1 = 0{,}544$; $u_2 = -0{,}919$

mit $u = \sin z \Rightarrow z_1 = 0{,}575 \Rightarrow x_{E1} = 0{,}29$; $y_{E1} = 4{,}34$

$z_2 = 2{,}566 \Rightarrow x_{E2} = 1{,}28$; $y_{E2} = -4{,}34$

$z_3 = 4{,}307 \Rightarrow x_{E3} = 2{,}15$; $y_{E3} = 0{,}27$

$z_4 = 5{,}118 \Rightarrow x_{E4} = 2{,}56$; $y_{E4} = -0{,}27$

$s''(x_{E1}) = -39{,}3 \Rightarrow$ lokales Maximum
$s''(x_{E2}) = 39{,}3 \Rightarrow$ lokales Minimum
$s''(x_{E3}) = -18{,}5 \Rightarrow$ lokales Maximum
$s''(x_{E4}) = 18{,}5 \Rightarrow$ lokales Minimum

Bewertungsvorschlag:

a) Nullstellen; Symmetrie; kleinste Periode; Ansatz für Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Art der Extrema; Graph von f_2; Anstieg der Tangente; Gleichung der Tangente — 9 BE

b) Ansatz für Flächeninhalt; Stammfunktion; Flächeninhalt in Abhängigkeit von t; 1. Ableitung; Extremstelle; Nachweis des Minimums; Ansatz für Volumen; partielle Integration; Stammfunktion; Volumen — 10 BE

c) Graph von g; Ansatz; Lösungen der goniometrischen Gleichung; Koordinaten eines Schnittpunktes; Koordinaten aller Schnittpunkte — 5 BE

d) 1. Ableitung; Lösungen der goniometrischen Gleichung; Extremstellen; Extremwerte; 2. Ableitung; Art der Extrema — 6 BE

30 BE

Aufgabe A 2: Analysis

a) Definitionsbereich: $D_{f_a}: \{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\}$

Nullstellen: $x_N = 0$

Symmetrie: $f_a(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \ln(a+x) - \ln(a-x)$

$f_a(-x) = \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) = \ln(a-x) - \ln(a+x)$

$= -1\,(\ln(a+x) - \ln(a-x))$

$\Rightarrow$ $f_a(-x) = -f_a(x)$

$\Rightarrow$ zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung

1. Ableitung: $f_a'(x) = \frac{(a-x)}{(a+x)} \cdot \frac{(a-x)+(a+x)}{(a-x)^2}$

$= \frac{2a}{a^2 - x^2}$

Monotonie: Wegen $2a > 0$ und $a^2 - x^2 > 0$ ist $f_a'(x) > 0$ im gesamten Definitionsbereich von f_a.

$\Rightarrow$ im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend

lokale Extrema: Aus Monotonieverhalten von f_a folgt: $\Rightarrow$ keine lokalen Extrema

Lösungsvariante: $f_a'(x) \neq 0$, da $2a \neq 0 \Rightarrow$ keine lokalen Extrema

2. Ableitung: $f_a''(x) = \frac{4ax}{(a^2 - x^2)^2}$

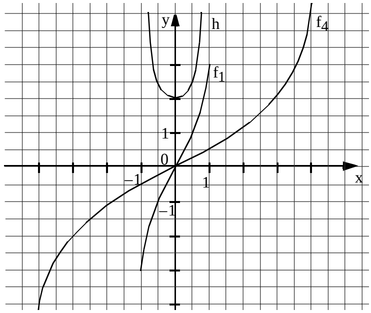
3. Ableitung: $f_a'''(x) = \frac{12ax^2 + 4a^3}{(a^2 - x^2)^3}$

Wendepunkte: $f_a''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 0$

$f_a'''(0) = \frac{4}{a^3} \neq 0$

$\Rightarrow$ W(0; 0)

Graphen von f_1 und f_4
Graph von h
(Aufgabenteil f)



b) W(0; 0)

Anstieg: $f_a'(0) = \frac{2}{a}$

Gleichung der Wendetangenten: $y_a = \frac{2}{a} \cdot x$

c) $F_a'(x) = \ln(a + x) + 1 - \ln(a - x) - 1$
$= \ln(a + x) - \ln(a - x)$
$= \ln\left(\frac{a + x}{a - x}\right)$
$= f_a(x) \quad \Rightarrow \quad F_a$ ist Stammfunktion

$$A = \int_0^{0,5} \left[\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) - \ln\left(\frac{4 + x}{4 - x}\right)\right]dx$$

$$= \left[(1+x)\cdot\ln(1+x) + (1-x)\cdot\ln(1-x) - (4+x)\cdot\ln(4+x) - (4-x)\cdot\ln(4-x)\right]_0^{0,5}$$

$$= -\frac{7}{2}\ln 3 - \frac{15}{2}\ln 3 + 22\ln 2 \quad \approx 0{,}20$$

d) Graph von h (siehe Aufgabenteil a)

Ansatz: $d(u) = h(u) - f_1(u) \quad (0 < u < 1)$

$d(u) = \frac{2}{1 - u^2} - \ln\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)$

$d'(u) = \frac{2u^2 + 4u - 2}{(1 - u^2)^2} \qquad d''(u) = \frac{4u^3 + 12u^2 - 4u + 4}{(1 - u^2)^3}$

$d'(u) = 0 \Rightarrow u^2 + 2u - 1 = 0$

$u_{E1} = -1 + \sqrt{2}$ (trifft zu)

(Näherungswert: 0,414)

$u_{E2} = -1 - \sqrt{2}$ (entfällt, da nicht im Definitionsbereich von d)

$d''(u_{E1}) = 3\sqrt{2} + 4 \approx 8{,}2 \Rightarrow$ lokales Minimum (auch globales Minimum)

Abstand: $\overline{P_u Q_u} = \frac{2}{1 - 0{,}414^2} - \ln\frac{1{,}414}{0{,}586}$

$= \sqrt{2} + 1 - \ln(\sqrt{2} + 1) = 1{,}53$

Bewertungsvorschlag:

a) Definitionsbereich; Nullstelle; Symmetrie; 1. Ableitung; Monotonie; 2. Ableitung; 3. Ableitung; Ansatz für Extrema; Ergebnis; Ansatz für Wendepunkte; Koordinaten des Wendepunktes; Nachweis; Graph von f_1; Graph von f_4 — 14 BE

b) Anstieg der Wendetangente; Gleichung der Wendetangente — 2 BE

c) Ansatz für Nachweis; Ergebnis; Integrationsgrenzen; Ansatz für Flächeninhalt; Stammfunktion; Ergebnis — 6 BE

d) Graph; Zielfunktion; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Lösungen der quadratischen Gleichung; Extremstelle; Nachweis des Minimums; Abstand — 8 BE

30 BE

Aufgabe A 3: Analysis

a) Nullstellen: keine Nullstellen

1. Ableitung: $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 0$

2. Ableitung: $f''(x) = \frac{24x^2-8}{(x^2+1)^3}$

$f''(0) = -8 \quad \Rightarrow \quad$ lokales Maximum

Koordinaten des lokalen Extrempunktes: $P_{MAX}(0; 4)$

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{W1} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$; $x_{W2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

3. Ableitung: $f'''(x) = \frac{96x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$f'''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \approx 11,69 \qquad f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \approx -11,69$

$\Rightarrow \quad x_{W1;\,2}$ sind Wendestellen

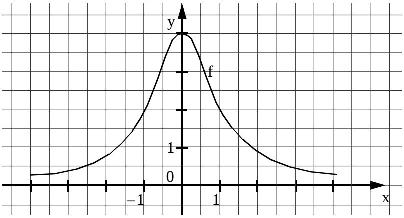
Koordinaten der Wendepunkte: $P_{W1}\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}; 3\right)$; $P_{W2}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}; 3\right)$

Symmetrie: $f(-x) = \frac{4}{(-x)^2+1} = f(x)$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Graph:



b) Das gesuchte Rechteck liegt symmetrisch zur y-Achse.
Zielfunktion: $2x \cdot f(x) = A(x) \quad (x > 0)$

$$2x \cdot \frac{4}{x^2+1} = \frac{8x}{x^2+1} = A(x)$$

$$A'(x) = \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}$$

$$A''(x) = \frac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3}$$

$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow x_{E1} = -1$ (entfällt)
$x_{E2} = 1$ (trifft zu)
$A''(1) = -4 \Rightarrow$ lokales Maximum
Nachweis des globalen Maximums: $A(0) = 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} A(x) = 0$
$\Rightarrow$ Das lokale Maximum ist auch globales Maximum.
Eckpunkt: $E(1; 2) \Rightarrow$ Das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 2.

c) Übergang zur Umkehrfunktion: $y = \sqrt{\frac{4}{x} - 1}$

erstes Teilvolumen: $V_1 = \pi \cdot \int\limits_{0,4}^{4} (\frac{4}{x} - 1)dx$
$= \pi \cdot [4 \cdot \ln|x| - x]_{0,4}^{4}$
$= \pi \cdot [4 \cdot \ln 4 - 4 - 4 \cdot \ln 0{,}4 + 0{,}4]$
$= 17{,}6$

zweites Teilvolumen: $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$= \pi \cdot 9 \cdot 0{,}4$
$= 11{,}3$

Gesamtvolumen: $V = 28{,}9$

d) Gleichung der Normalen zum Graph von f durch M(0; 0): $y = \frac{(x^2+1)^2}{8x} \cdot x$

Schnittpunkte dieser Normalen mit dem Graph von f: $\frac{(x^2+1)^2}{8} = \frac{x^2+1}{4}$

$(x^2 + 1)^3 = 32$

$\Rightarrow$ Koordinaten der Berührungspunkte:

$x_1 = \sqrt{\sqrt[3]{32} - 1}$; $\quad x_2 = -\sqrt{\sqrt[3]{32} - 1}$

$y_1 = \frac{4}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{2}$ $\quad y_2 = \frac{4}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{2}$

e) $S_a(0; a)$; $f_a'(x) = -\frac{2ax}{(x^2 + 1)^2}$

Ermitteln der Koordinaten der Berührungspunkte:

$y = mx + n$

$n = a$

$$\frac{a}{x^2 + 1} = -\frac{2ax}{(x^2 + 1)^2} \cdot x + a$$

$$a(x^2 + 1) = -2ax^2 + a(x^2 + 1)^2 \quad |: a$$

$$x^2 + 1 = -2x^2 + x^4 + 2x^2 + 1$$

$$0 = x^4 - x^2$$

$x_1 = 0 \qquad y_1 = a$

$\left.\begin{array}{ll} x_2 = 1 & y_2 = \frac{a}{2} \\ x_3 = -1 & y_3 = \frac{a}{2} \end{array}\right\}$ Berührungspunkte

$\Rightarrow$ Anstieg $m_2 = -\frac{a}{2}$ $\qquad$ Anstieg $m_3 = \frac{a}{2}$

Gleichung der Geraden: $\quad g_1$: $y = -\frac{a}{2} \cdot x + a$

g_2: $y = \frac{a}{2} \cdot x + a$

Schnittpunkte der Geraden mit der x-Achse: $\quad R_1(2; 0)$, $R_2(-2; 0)$

Flächeninhalt: $A = \frac{4a}{2}$

$\Rightarrow \quad 10 = 2a$

$a = 5$

Bewertungsvorschlag:

a) Aussage zu Nullstellen; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Koordinaten des Extrempunktes; Art des Extremums; 3. Ableitung; Abszissen der Wendepunkte; Ordinaten der Wendepunkte; Symmetrie; Verhalten im Unendlichen; Graph — 11 BE

b) Zielfunktion; 1. Ableitung; Extremstelle; 2. Ableitung; Nachweis des Maximums; Länge der Rechteckseiten — 6 BE

c) Integral; Stammfunktion; Volumen des Teilkörpers; Volumen des Zylinders; Gesamtvolumen des Rotationskörpers — 5 BE

d) Ansatz für Koordinaten der Berührungspunkte; Abszissen der Berührungspunkte; Ordinaten der Berührungspunkte — 3 BE

e) Ansatz; erste Geradengleichung; zweite Geradengleichung; Schnittstellen der Geraden mit der x-Achse; Wert für a — 5 BE

30 BE

Aufgabe A 4: Analysis

a) Definitionsbereich: $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse:

$$0 = 2 \cdot e^{2-x} - 2$$
$$1 = e^{2-x}$$
$$x = 2$$
$$P_x(2;\, 0)$$

Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse:

$$f(0) = 2 \cdot e^{2} - 2$$

Näherungswert: $f(0) = 12{,}8$

$$P_y(0;\, 2 \cdot e^{2} - 2)$$

1. Ableitung: $f'(x) = -2 \cdot e^{2-x}$

Monotonie: wegen $e^{2-x} > 0$ und $-2 < 0$ ist $f'(x) < 0$ im gesamten Definitionsbereich

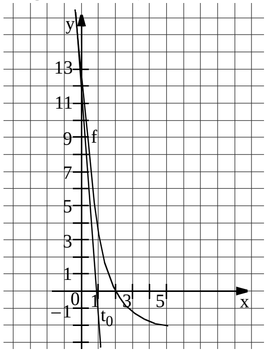
$\Rightarrow$ monoton fallend im gesamten Definitionsbereich

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \infty} (2 \cdot e^{2-x} - 2) = 2 \cdot \lim_{x \to \infty} e^{2-x} - \lim_{x \to \infty} 2$$
$$= 2e^{2} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x}} - 2$$
$$= 2e^{2} \cdot 0 - 2$$
$$= -2$$

analog folgt: $\lim_{x \to -\infty} (2 \cdot e^{2-x} - 2) = \infty$

Graph (auch Graph zu Aufgabenteil b):



b) $y = mx + n \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot e^{2-u} - 2 = -2 \cdot e^{2-u} \cdot u + n$

$$n = 2 \cdot e^{2u}\,(1 + u) - 2$$

Gleichung der Tangenten t_u: $y = -2 \cdot e^{2-u} \cdot x + 2 \cdot e^{2-u} \cdot u + 2 \cdot e^{2-u} - 2$

Ansatz für die Bestimmung von u:

$-2 = -2 \cdot e^{2-u} \cdot 1 + 2 \cdot e^{2-u} \cdot u + 2 \cdot e^{2-u} - 2 \;\left|+2\right| : e^{2-u}$

$0 = -2 + 2u + 2$

$u = 0$

$t_0 = -2e^2x + 2e^2 - 2$

c) Flächeninhalt: $A = \int\limits_0^2 (2 \cdot e^{2-x} - 2)dx$

$$= [-2e^{2-x}]_0^2 - [2x]_0^2$$

$$= -2 + 2e^2 - 4 + 0$$

$$= 2e^2 - 6 \quad \text{(Näherungswert: 8,8)}$$

Zielfunktion: Aus $A_0 = 2 \cdot \pi \cdot r(r + h)$ folgt: $A_0(x) = 2 \cdot \pi \cdot x(x + 2 \cdot e^{2-x} - 2)$

$A_0(x) = 2\pi x^2 + 4\pi x \cdot e^{2-x} - 4\pi x$

mit $0 < x < 2$

$$A_0'(x) = 4\pi x + 4\pi e^{2-x}(1 - x) - 4\pi$$

$$= 4\pi x + 4\pi e^{2-x} - 4\pi x e^{2-x} - 4\pi$$

$$A_0'(x) = 0$$

$$0 = x + e^{2-x} - x \cdot e^{2-x} - 1$$

$$0 = (x - 1) \cdot (1 - e^{2-x})$$

x_{E1} = (trifft zu)

x_{E2} = (entfällt lt. Definitionsbereich der Zielfunktion)

$$A_0''(x) = 4\pi - 8\pi e^{2-x} + 4\pi x e^{2-x}$$

$$A_0''(1) = 4\pi - 4\pi e \approx -21{,}6 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

Das lokale Maximum ist auch globales Maximum (offenes Intervall, stetige Funktion).

$A_0(1) \;= 2\pi + 2\pi \cdot (2e - 2)$
$\quad\quad\quad = 2\pi(2e - 1) \quad$ (Näherungswert: 27,9)

d) Inhalt der Fläche A_a: $A_a = \int_0^a f(x)\,dx + (a \cdot 2)$

$$A_a = 2 \cdot [-e^{2-x} - x + 2x]_0^a$$
$$= [-2 \cdot e^{2-x}]_0^a$$
$$= 2e^2 - 2e^{2-a}$$

$$\lim_{x \to \infty} (2e^2 - 2e^{2-a}) = 2e^2 - 2e^2 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^a} = 2e^2$$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC: $A_D = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 \cdot e^{2-0} - 2 + 2)$
$= e^2 \quad$ (Näherungswert: 7,4)

Verhältnis: $\frac{2e^2 - 2e^{2-a}}{e^2} = \frac{3}{2}$

$$\frac{e^2}{4} = e^{2-a}$$
$$\frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{e^a}$$
$$e^a = 4$$
$$a = \ln 4 \quad \text{(Näherungswert: 1,4)}$$

Bewertungsvorschlag:

a) Definitionsbereich; Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse; Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse; 1. Ableitung; Monotonie; Verhalten für $x \to \infty$; Verhalten für $x \to -\infty$; Graph — 8 BE

b) Ansatz für Gleichung; Gleichung der Tangenten; Ansatz für u; Wert für u; Gleichung der Tangente t_0; graphische Darstellung — 6 BE

c) Ansatz für Flächeninhalt; Stammfunktion; Flächeninhalt; Zielfunktion; 1. Ableitung; Lösungen der Gleichung; Extremstelle; Nachweis des Extremums; Oberflächeninhalt — 9 BE

d) Ansatz für Flächeninhalt der Fläche F_a; Stammfunktion; Flächeninhalt in Abhängigkeit von a; Grenzwert; Ansatz für Flächeninhalt des Dreiecks; Flächeninhalt des Dreiecks; Wert für a — 7 BE

30 BE

Aufgabe B 1: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) Berechnung in der x-y-Ebene:

$g(P_1P_3)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -27 \\ 36 \end{pmatrix}$

$g(P_2P_4)$ mit $g(P_2P_4) \perp g(P_1P_3)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \end{pmatrix}$

$g(P_1P_3) \cap g(P_2P_4) = \{S\} \Rightarrow S(7;\, 24)$ für $s = \frac{1}{3}$

$P_2\,(19;\, 33)$ für $s = \frac{2}{3}$

im Raum: $P_2\,(19;\, 33;\, 0)$

$P_1P_2P_3P_4$ ist Drachenviereck

$\overline{P_1P_3} = 45$; $\overline{P_2P_4} = 30$

$I(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\overline{P_1P_3} \cdot \overline{P_2P_4}}{2} = \frac{45 \cdot 30}{2} = 675$

Flächeninhalt: $A = 675\ m^2$

Preis: $675\ m^2 \cdot 73\ \frac{DM}{m^2} = 49\,275\ DM$

Der Grundstückspreis beträgt 49 275 DM.

b) $g(CG)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g(CG) \cap E_t$: $3t \cdot 4 + 4t \cdot 33 + 25 \cdot s = 144t + 200$

$s = 8 \Rightarrow$ unabhängig von t

$\overline{CG} = 8 \Rightarrow$ Die Seitenwandhöhe beträgt 8 m.

c) E_5: $15x + 20y + 25z = 920$

F_5: $15x + 20y - 25z = 270$

$E_5 \cap F_5 = \{k_5\}$

k_5: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{119}{3} \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{E5}} \cdot \overrightarrow{n_{F5}} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ -25 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_5 \perp F_5$

Höhe der Prismengrundfläche: $h = d(k_5;\, E(P_1P_3P_4)) - \overline{CD}$

$= (13 - 8)\ m$

$= 5\ m$

$V = V_{Quader} + V_{Prisma} = (10 \cdot 15 \cdot 8)\ m^3 + (\frac{10 \cdot 5}{2} \cdot 15)\ m^3$

$= 1\,575\ m^3$

Der umbaute Raum beträgt $1\,575\ m^3$.

d) $\overrightarrow{n_{E_t}} \quad \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 25 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{x-y-Ebene}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = \measuredangle\,(E_t;\ \text{x-y-Ebene})$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_t}} \cdot \overrightarrow{n_{x-y-Ebene}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_t}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{x-y-Ebene}}\right|} = \frac{5}{\sqrt{t^2 + 25}}$$

$30° \leq \alpha \leq 45°$

$\cos 30° \geq \cos\alpha \geq \cos 45°$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \geq \frac{5}{\sqrt{t^2 + 25}} \geq \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\frac{5}{3} \cdot \sqrt{3} \leq t \leq 5$$

e) Der Kranstandort ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks $P_1P_3P_4$.

$m_{\overline{P_1P_3}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 18 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \end{pmatrix}$ (Berechnung in der x-y-Ebene)

$m_{\overline{P_1P_4}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix}$

$m_{\overline{P_1P_3}} \cap m_{\overline{P_1P_4}} = \{K\} \qquad K(17{,}5;\ 22{,}5;\ 0)$

Auslegerlänge: $1 = d(K;\ P_1)$
$= 7{,}5 \cdot \sqrt{10}$

Die Auslegerlänge beträgt 23,7 m.
Kreisgleichung um K mit dem Radius 1: $(x - 17{,}5)^2 + (y - 22{,}5)^2 = 562{,}5$
Lagebeziehung von P_2 und Kreis k:
$(19 - 17{,}5)^2 + (33 - 22{,}5)^2 < 562{,}5 \; (112{,}5 < 562{,}5)$
$\Rightarrow$ P_2 liegt innerhalb des Kreises
$\Rightarrow$ Das gesamte Grundstück kann erreicht werden.

Bewertungsvorschlag:

a) Geradengleichung für $g(P_1P_3)$; Geradengleichung für $g(P_2P_4)$; Schnittpunktskoordinaten; Koordinaten für P_2; Ansatz zur Flächenberechnung; Preis — 6 BE

b) Gleichung der Geraden $g(CG)$; Nachweis der Unabhängigkeit von t; Länge von $\overline{CG}$ — 3 BE

c) Ansatz für k_5; Geradengleichung für k_5; Orthogonalitätsnachweis; Höhe der Grundfläche des Prismas; umbauter Raum — 5 BE

d) Ansatz für Dachneigungswinkel; Doppelungleichung; Ergebnis 3 BE

e) Ansatz für Koordinaten des Umkreismittelpunktes; Koordinaten des Standortes und Auslegerlänge; Überprüfung der Erreichbarkeit des Grundstückes 3 BE

20 BE

Aufgabe B 2: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R};\ s \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 + 2t + 4s \\ y = 2 - t + s \\ z = 1 + 2t + s \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x - z = 3s \\ x + 2y = 5 + 6s \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow E_1\colon -x + 2y + 2z = 5$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{ABCD ist Parallelogramm.}$$

$$\overrightarrow{AD} \quad \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{ABCD ist Rhombus.}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad AB \perp AD \quad \Rightarrow \quad \text{ABCD ist Quadrat.}$$

b) $n_{E_1} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

Lotgerade 1 durch S auf E_1: $x = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\[2pt]\frac{11}{2}\\[2pt]\frac{9}{2}\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad (r \in \mathbb{R})$

$$1 \cap E_1\colon -\left(\tfrac{3}{2} - r\right) + 2\left(\tfrac{11}{2} + 2r\right) + 2\left(\tfrac{9}{2} + 2r\right) = 5$$

$$r = -\tfrac{3}{2}$$

$$F\left(3;\ \tfrac{5}{2};\ \tfrac{3}{2}\right)$$

Nachweis, daß die Pyramide ABCDS eine gerade Pyramide ist:

Mittelpunkt P der Grundfläche ABCD: $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$

$\Rightarrow \quad P\left(3; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$

wegen $F \equiv P \quad \Rightarrow \quad$ Pyramide ABCDS ist gerade Pyramide.

Höhe der Pyramide: $h = \left|\overline{SF}\right| = \frac{9}{2}$

Volumen der Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{9}{2}$$
$$= \frac{27}{2}$$

α sei der Winkel zwischen Grund- und Seitenfläche.

$\tan\alpha = \dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 71{,}6°$

c) Mittelpunkt der Kugel K: $M\left(\frac{8}{3}; \frac{19}{6}; \frac{13}{6}\right)$

Abstand von M zur Ebene E_1 = Abstand der Punkte M und F = 1

Da der Abstand des Mittelpunktes M zur Ebene E_1 gleich dem Radius der Kugel K ist, ist E_1 Tangentialebene an die Kugel K.

Abstand von M zu einer der Seitenflächen, z. B.: Ebene E_{ABS}

E_{ABS}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}; s \in \mathbb{R})$

E_{ABS}: $-7x - 4y + 5z = -10$

Normaleneinheitsvektor der Ebene E(ABS): $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{90}}$

$$d = \left|(x_1 - x_0) \cdot n_0\right|$$

$$d = \left|\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{90}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{90}} \cdot \frac{21}{2}$$

$$= \frac{7}{2 \cdot \sqrt{10}} \quad \text{(Näherungswert: 1,11)}$$

Dieser Abstand ist gleich dem Abstand zu den anderen Seitenflächen, weil die Pyramide ABCDS gerade ist.

Da der Abstand von M zu den Seitenflächen der Pyramide größer ist, als der Radius der Kugel K und E_1 Tangentialebene an die Kugel K ist, besitzt die Kugel K keine Punkte, die außerhalb der Pyramide liegen.

d) Volumen der Restpyramide: $\frac{27}{2} - \frac{19}{2} = 4$

$h = \frac{9}{2}$; $a = 3$

h_2 sei die Höhe der Restpyramide, a_2 die Seitenkante der Grundfläche der Restpyramide.

$h_2 = \frac{3}{2} \cdot a_2$ (Strahlensatz) (1)

$4 = \frac{1}{3} \cdot a_2^{\,2} \cdot h_2$ (Volumen der Restpyramide) (2)

aus (1) und (2) folgt: $a_2 = 2$; $h_2 = 3$

Q sei der Punkt auf der Höhe $\overline{SF}$, der von S den Abstand 3 besitzt.

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{9}{2}\right)^2} = 3$$

Aus g(SF) (Gleichung der Lotgeraden siehe Aufgabenteil b) folgt:

$x = \frac{3}{2} - r$; $y = \frac{11}{2} + 2r$; $z = \frac{9}{2} + 2r$

$\Rightarrow \quad r^2 + 4r^2 + 4r^2 = 9$

$r_1 = 1$ (entfällt, entsprechender Punkt liegt außerhalb der Pyramide ABCDS)

$r_2 = -1$ (trifft zu)

$\Rightarrow \quad Q\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Ebene durch Q mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$: $-x + 2y + 2z = \frac{19}{2}$

Bewertungsvorschlag:

a) Parametergleichung; Ansatz für parameterfreie Gleichung; parameterfreie Gleichung; Nachweis der gleichlangen Seiten; Nachweis der Orthogonalität zweier benachbarter Seiten — 5 BE

b) Gleichung der zu E_1 senkrechten Geraden durch S; Koordinaten von F; Nachweis für gerade Pyramide; Höhe; Volumen; Ansatz für Größe des Winkels; Größe des Winkels — 7 BE

c) Abstand $\overline{MF}$; Begründung für Tangentialebene; Hessesche Normalenform einer Seitenebene; Abstand von M zu einer Seitenebene; Schlußfolgerung und Begründung für die Nichtexistenz äußerer Punkte — 5 BE

d) Beziehung zwischen Höhe und Länge einer Grundkante der Pyramide; Höhe der Restpyramide; Gleichung der Ebene E_2 — 3 BE

20 BE

Aufgabe B 3: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) Grundfläche: $A_G = \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{DA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DC}\right| + \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \sin\sphericalangle(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC})\right)$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-8\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{53}} = \frac{37}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{53}} = 0{,}5948$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = 53{,}5°$$

$$A_G = \frac{1}{2}\cdot(4\cdot 6 + \sqrt{73}\cdot\sqrt{53}\ \sin 53{,}5°) = 37$$

Volumen V: $V = \frac{1}{3}\cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3}\cdot 37\cdot 8 = \frac{296}{3}$

b) $M_1(3{,}5;\,5;\,4)$, $M_2(5;\,9;\,4)$; $G(1{,}5;\,5;\,7)$

Ebene E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1{,}5\\5\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3{,}5\\4\\-3\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} x &= 1{,}5 + 2t + 3{,}5s \\ y &= 5 + 4s \qquad \Rightarrow \quad s = \frac{y-5}{4} \\ z &= 7 - 3t - 3s \end{aligned}$$

$$3x + 2z = 18{,}5 + 4{,}5s$$

$$E_1:\ 24x - 9y + 16z = 103$$

g: $\vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}3\\10\\8\end{pmatrix}$ $(r\in\mathbb{R})$

$E_1 \cap g$: $24\cdot 3r - 9\cdot 10r + 16\cdot 8r = 103 \quad\Rightarrow\quad r = \frac{103}{110}$

$S_1\left(\frac{309}{110};\ \frac{103}{11};\ \frac{412}{55}\right)$

$$\sin\sphericalangle(E_1;\,g) = \frac{\begin{pmatrix}3\\10\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}24\\-9\\16\end{pmatrix}}{\sqrt{173}\cdot\sqrt{913}} = \frac{110}{\sqrt{173}\cdot\sqrt{913}} = 0{,}2768$$

$\Rightarrow\quad \sphericalangle(E_1;\,g) = 16{,}1°$

c) $M_3(1{,}5;\,8;\,4)$, $M_2(5;\,9;\,4)$, $M_1(3{,}5;\,5;\,4)$

Ebene E_2: $z = 4$

$$\cos\sphericalangle(E_1;\,E_2) = \frac{\begin{pmatrix}24\\-9\\16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{913}\cdot 1} = \frac{16}{\sqrt{913}} = 0{,}5295$$

$\Rightarrow\quad \sphericalangle(E_1;\,E_2) = 58{,}0°$

d) $L_1(3;\,10;\,0)$, $L_2(3;\,0;\,8)$; $L_3(0;\,10;\,8)$

$\overline{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OF}_1 + \overrightarrow{OF}_2 + \overrightarrow{OF}_3\right)$

$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad S(2;\, \frac{20}{3};\, \frac{16}{3})$

e) k sei der Kreis durch die Punkte A, B und C.

$M_{\overline{AB}}(\frac{11}{2};\,4;\,0)$, $M_{\overline{BC}}(\frac{7}{2};\,7;\,0)$

g(AB) ist die in der x-y-Ebene liegende Gerade durch die Punkte A und B und besitzt den Anstieg $\frac{8}{3}$.

g(BC) ist die in der x-y-Ebene liegende Gerade durch die Punkte B und C und besitzt den Anstieg $\frac{2}{7}$.

g_1 mit $g_1 \in$ x-y-Ebene und $g_1 \perp g(AB)$: $y = -\frac{3}{8}x + \frac{97}{16}$

g_2 mit $g_2 \in$ x-y-Ebene und $g_2 \perp g(BC)$: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{77}{4}$

$g_1 \cap g_2$: $M_k(\frac{211}{50};\, \frac{112}{25};\, 0)$ (Näherungswert: $M_k(4{,}22;\, 4{,}48;\, 0)$)

$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = r^2 = (\frac{11}{50})^2 + (\frac{224}{50})^2 = \frac{50297}{2500}$ (Näherungswert: 20,12)

Kreis k: $(x - \frac{211}{50})^2 + (y - \frac{112}{25})^2 = \frac{50297}{2500}$

f) Der Punkt D erfüllt die Kreisgleichung nicht!

Für H(x; y; 0) muß gelten:

(1) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$

(2) $\left|\overrightarrow{DH}\right| = 4$ (da $\left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{AD}\right|$)

Aus (1) folgt: $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{8}{7}y + 4$

Aus (2) folgt: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16$

Aus (1) und (2) folgt: $(4 - \frac{8}{7}y)^2 + y^2 = 16$

$\Rightarrow \quad y_1 = 0; \quad x_1 = 4$ (entfällt, da Koordinaten von A)

$y_2 = \frac{448}{113}; \quad x_2 = -\frac{60}{113}$ (trifft zu)

$\Rightarrow \quad H(-\frac{60}{113};\, \frac{448}{113};\, 0)$

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz für Flächeninhalt der Grundfläche; Flächeninhalt der Grundfläche; Volumen 3 BE

b) Ansatz für Ebenengleichung; Gleichung von E_1; Gleichung der Geraden g; Ansatz für Koordinaten von S_1; Koordinaten von S_1; Größe des Schnittwinkels — 6 BE

c) Gleichung der Ebene E_2; Größe des Schnittwinkels — 2 BE

d) Ansatz für Koordinaten des Schwerpunktes; Koordinaten des Schwerpunktes — 2 BE

e) Koordinaten des Kreismittelpunktes; Radius; Kreisgleichung; Nachweis — 4 BE

f) Ansatz; quadratische Gleichung; Koordinaten von H — 3 BE

$\overline{\text{20 BE}}$

Aufgabe B 4: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

a) $\overrightarrow{OC_t} = \begin{pmatrix} -3+4t \\ -22+25t \\ 10-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -22 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \\ -3 \end{pmatrix}$ (ist Gleichung einer Geraden g)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -22 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) $C_2(5;\ 28;\ 4)$

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 26 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 6a \qquad\quad + 8c &= 0 \\ 3a + 26b + 4c &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

E: $4x - 3z = 8$

E || y-Koordinatenachse

Schnittpunkt mit x-Achse: $z = 0 \Rightarrow S_x(2;\ 0;\ 0)$

Schnittpunkt mit z-Achse: $x = 0 \Rightarrow S_z(0;\ 0;\ -\frac{8}{3})$

Volumen:

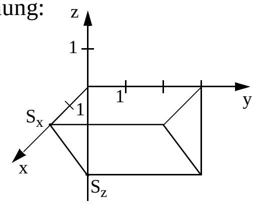
$V = A_G \cdot h$

$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot h$ (Grundfläche des Prismas ist rechtwinkliges Dreieck)

$V = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} \cdot 3$

$\quad = 8$

Zeichnung:



c) $\overline{AC_t} = \sqrt{(-5+4t)^2+(-24+25t)^2+(10-3t)^2} = \sqrt{650t^2-1300t+701}$

$\overline{BC_t} = \sqrt{(-11+4t)^2+(-24+25t)^2+(2-3t)^2} = \sqrt{650t^2-1300t+701}$

$\Rightarrow$ Für jeden Wert t sind die Dreiecke ABC_t gleichschenklig.

Flächeninhalt des Dreiecks ABC_t ist minimal	$\Leftrightarrow$	Abstand $d(\overline{AB}; C_t)$ ist minimal ($\overline{AB}$ ist Grundseite)
$d(\overline{AB}; C_t)$ ist minimal	$\Leftrightarrow$	Ebene $E(ABC_t) \perp$ Gerade g
Ebene $E(ABC_t) \perp$ Gerade g	$\Leftrightarrow$	$g(AC_t) \perp$ Gerade g

$\overrightarrow{AC}_t \cdot \vec{a} = 0$ ($\vec{a}$: Richtungsvektor von g)

$$\begin{pmatrix} -5+4t \\ -24+25t \\ 10-3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-20+16t-600+625t-30+9t = 0$$
$$650t = 650$$
$$t = 1$$

$\Rightarrow$ Für den Punkt $C_1(1; 3; 7)$ ist der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks minimal.

Lösungsvariante:

Flächeninhalt des Dreiecks ABC_t ist minimal	$\Leftrightarrow$	Abstand $d(\overline{AB}; C_t)$ ist minimal (da $\overline{AB}$ konstant ist)
Abstand $d(\overline{AB}; C_t)$ ist minimal	$\Leftrightarrow$	$\overline{AC_t}$ ist minimal ($\Delta\, ABC_t$ ist gleichschenklig)

$\overline{AC_t} = \sqrt{650t^2-1300t+701} \rightarrow$ Minimum

Ersatzfunktion: $f(t) = 650t^2 - 1\,300t + 701 \quad (t \in \mathbb{R})$

$$f'(t) = 1\,300t - 1\,300$$
$$f''(t) = 1\,300$$
$$f'(t_{MIN}) = 0 \Rightarrow t_{MIN} = 1$$
$$f''(1) = 1\,300 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

Flächeninhalt: $\overline{AC_1} = \sqrt{51} \qquad \overline{AB} = 10$

$h_{\Delta ABC_1} = \sqrt{51-25}$ (lt. Satz des Pythagoras)

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{26} = 5 \cdot \sqrt{26}$$

d) Es gibt genau zwei Tangentialebenen an die Kugel K, die die Gerade g(AB) enthalten.

Für jeden Berührungspunkt P mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt:

$\overrightarrow{OP}^2 = r^2$, da $P \in K$. $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Da A in beiden Tangentialebenen liegt, gilt: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = r^2. \Rightarrow 2x + 2y = 4$

Da B in beiden Tangentialebenen liegt, gilt: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = r^2. \Rightarrow 8x + 2y + 8z = 4$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 &=& 4 \\ 2x + 2y &=& 4 \\ 8x + 2y + 8z &=& 4 \\ \hline \end{array}$$

$$y = 2 - x \qquad z = -\frac{3}{4}x \qquad \frac{41}{16}x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{64}{41}$$

Koordinaten der Berührungspunkte: $P_1(0;\, 2;\, 0)$; $P_2\left(\frac{64}{41};\, \frac{18}{41};\, -\frac{48}{41}\right)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis; Gleichung der Geraden	2 BE
b)	Ansatz; parameterfreie Gleichung der Ebene; Parallelität zur y-Achse; Koordinaten der Schnittpunkte mit x-Achse und z-Achse; Zeichnung; Ansatz für Volumen; Volumen	7 BE
c)	$\overline{AC_t}$; $\overline{BC_t}$ und Schlußfolgerung; Erkenntnis zur Lagebeziehung von E_{ABC_t} zur Gerade g; Ansatz zur Berechnung von t_{MIN}; Wert für t_{MIN}; Koordinaten für C_1; Flächeninhalt	7 BE
d)	erste Gleichung des Gleichungssystems; zweite und dritte Gleichung des Gleichungssystems; quadratische Gleichung; Koordinaten der Berührungspunkte	4 BE
		20 BE

Aufgabe C 1: Stochastik

a) $P(A) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}96^2 = 0{,}0261$

$P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 0{,}0002$

$P(C) = 0{,}3^5 \cdot 0{,}96^2 = 0{,}0022$

b) X... Anzahl der Halte an Ampeln

X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}7$

$E(X) = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$

durchschnittliche Wartezeit an Ampeln: $3{,}5 \cdot 30\text{ s} = 105\text{ s}$

Y... Anzahl der Halte an Weichen

Y ist binomialverteilt mit $n = 2$ und $p = 0{,}04$

$E(Y) = 2 \cdot 0{,}04 = 0{,}08$

durchschnittliche Wartezeit an Weichen: $0{,}08 \cdot 100\text{ s} = 8\text{s}$

durchschnittliche Wartezeit an Ampeln und Weichen: 113 s = 1:53 min

Die gesuchten Fälle: F_1: 0 mal Halt an Ampeln und 1mal Halt an Weichen

F_2: 0 mal Halt an Ampeln und 2mal Halt an Weichen

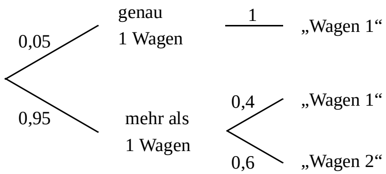
F_3: 1 mal Halt an Ampeln und 2mal Halt an Weichen

$P(F_1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$

$P(F_2) = P(X = 0) \cdot P(Y = 2) = 3{,}9 \cdot 10^{-6}$

$P(F_3) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2) = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$

c)



$P(D) = 0{,}05 + 0{,}95 \cdot 0{,}4$
$= 0{,}43$

$P(E) = 0{,}6 \cdot 0{,}05$
$= 0{,}03$

d) H_0: $p = 0{,}1$ (Die Wahrscheinlichkeit des Zuspätkommens beträgt 10 %.)

$\overline{H}_0$: $p > 0{,}1$

Versuchsdurchführungen: 50

Kritischer Bereich für H_0: $K = \{9; 10; ...49; 50\}$

Berechnung der Irrtumswahrscheinlichkeit α, für den Fall, H_0 sei wahr:

S... Anzahl des Zuspätkommens

S ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}1$

$\Rightarrow \quad \alpha = P(S \geq 9) = 1 - P(S \leq 8)$
$= 1 - 0{,}9421$ (nach Tafel)
$= 0{,}0579$

Bewertungsvorschlag:

a)	P(A); P(B); P(C)	3 BE
b)	Ansatz; Erwartungswert; 3 Wahrscheinlichkeiten	3 BE
c)	P(D); P(E)	2 BE
d)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
		10 BE

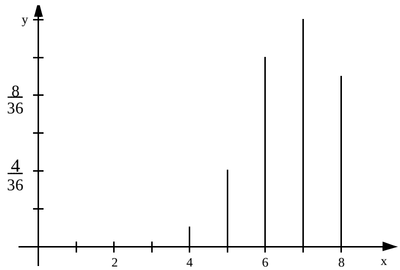
Aufgabe C 2: Stochastik

a) Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen beim einfachen Wurf von W_1:

$P(2) = \frac{1}{6}$; $P(3) = \frac{1}{3}$; $P(4) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X:

x_i	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$



b) E_n... Bei n durchgeführten Versuchen tritt wenigstens einmal eine Augensumme größer als 6 auf.

$P(E_n) = 1 - P(\overline{E_n}) > 0{,}95$

$\Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{15}{36}\right)^n > 0{,}95$

$\Rightarrow \quad 0{,}05 > \left(\frac{15}{36}\right)^n$

$\lg 0{,}05 > n \cdot \lg\left(\frac{15}{36}\right)$

$3{,}42 < n$

$\Rightarrow$ Der zweifache Wurf muß mindestens viermal durchgeführt werden.

c) Zweimaliges Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit 6 Kugeln, von denen genau eine mit der Nummer 2, genau zwei mit der Nummer 3 und genau drei mit der Nummer 4 beschriftet sind.

d) A... Augensumme ist 7.
B... Ein Würfel zeigt Augenzahl 4.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

$= \frac{6}{36} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$

e) W_1: $E(X) = \frac{1}{36} \cdot 4 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{10}{36} \cdot 6 + \frac{12}{36} \cdot 7 + \frac{9}{36} \cdot 8 = 6\frac{2}{3}$

W_2: Die Zufallsgröße Y beschreibe die Augensumme beim zweifachen Wurf mit W_2.

$E(Y) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{4}{36} \cdot 9$
$+ \frac{3}{36} \cdot 10 + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12$
$= 7$

$\Rightarrow$ W_2 ist zu nutzen.

f) ij mit i = 2; 3; 4 und j = 1; 2; 3; 4; 5; 6 bedeute: Spieler A würfelt Augenzahl i und Spieler B würfelt Augenzahl j.

G_A... Spieler A gewinnt, $G_A = \{21, 31, 32, 41, 42, 43\}$
G_B... Spieler B gewinnt, $G_B = \{23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46\}$
$P(G_A) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$
$P(G_B) = 4 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{16}{36} = \frac{8}{18}$
$\Rightarrow$ Spieler A hat 28 Siege und Spieler B hat 32 Siege zu erwarten.
$\Rightarrow$ erwarteter Kassenstand für Spieler A: $50 + (28 \cdot 2) - (32 \cdot 2)$ DM = 42 DM
$\Rightarrow$ erwarteter Kassenstand für Spieler B: $50 + (32 \cdot 2) - (28 \cdot 2)$ DM = 58 DM

Bewertungsvorschlag:

a)	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Diagramm	2 BE
b)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
c)	Beschreibung	1 BE
d)	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses	1 BE
e)	Ergebnis	1 BE
f)	Charakterisierung der Ereignisse; Wahrscheinlichkeiten; Kassenstände	3 BE
		10 BE

Aufgabe C 3: Stochastik

a) Urne 1: X... Anzahl der gezogenen weißen Kugeln
X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}3$.
$E(X) = n \cdot p$
$= 50 \cdot 0{,}3 = 15$
Urne 2: Y... Anzahl der gezogenen weißen Kugeln
Y ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}5$.
$E(Y) = 50 \cdot 0{,}5 = 25$
Bei Urne 1 sind 15 und bei Urne 2 sind 25 weiße Kugeln zu erwarten.

b) Urne 1: $P(13 \le X \le 17) = P(X \le 17) - P(X \le 12)$
$= 0{,}7822 - 0{,}2229 = 0{,}5593$
Urne 2: $P(23 \le Y \le 27) = P(Y \le 27) - P(Y \le 22)$
$= 0{,}7601 - 0{,}2399 = 0{,}5202$

c) H_0: $p = 0{,}3$ ist rechtsseitig mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}1$ zu testen
$P(X \ge g) \le 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le g - 1) \ge 0{,}9$
$\Rightarrow$ $g = 20$, d. h. als Ablehnungsbereich K erhält man $K = \{20; 21; 22;...;50\}$
Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art: $\beta = P(Y \le 19) = 0{,}0595$

d) Einseitiger Test, da Ablehnungsbereich nur große Werte enthält.
Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist gesucht mit $\alpha \geq P(X \geq 21)$.
$P(X \geq 21) = 1 - P(X \leq 20)$
$= 1 - 0{,}9522$
$= 0{,}0478$
$\Rightarrow$ Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}0478$

e) Zu vergleichen sind: $P(X = 20)$ und $P(Y = 20)$
$P(X = 20) = 0{,}9522 - 0{,}9152 = 0{,}0370$ (Tafel)
$P(Y = 20) = 0{,}1013 - 0{,}0595 = 0{,}0418$
$P(X = 20) < P(Y = 20)$
$\Rightarrow$ Entscheidung für Urne 2

Bewertungsvorschlag:

a)	erster Erwartungswert; zweiter Erwartungswert	2 BE
b)	Ansatz; Wahrscheinlichkeiten	2 BE
c)	Ansatz; Ablehnungsbereich; Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art	3 BE
d)	Irrtumswahrscheinlichkeit	1 BE
e)	Wahrscheinlichkeiten; Entscheidung	2 BE
		10 BE

Aufgabe C 4: Stochastik

a) X... Anzahl der Treffer bei 5 Versuchen
X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}7$
$P(A) = P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2$
$= 0{,}3087$
$P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$
$= 0{,}0132$
$P(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7$
$= 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 + 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2$
$= 0{,}0441$

b)

Anzahl der Treffer	0	1	2	3	4
Punkte	–8	–1	6	13	20

Y... Anzahl der Punkte bei 4 Versuchen

y_i	-8	-1	6	13	20
$P(Y = y_i)$	$0{,}6^4$ $= 0{,}1296$	$\binom{4}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^3$ $= 0{,}3456$	$\binom{4}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2$ $= 0{,}3456$	$\binom{4}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6$ $= 0{,}1536$	$0{,}4^4$ $= 0{,}0256$

$E(Y) = (-8 \cdot 0{,}1296) + (-1 \cdot 0{,}3456) + (6 \cdot 0{,}3456) + (13 \cdot 0{,}1536) + (20 \cdot 0{,}0256)$
$= 3{,}2$

Er kann 3,2 Punkte erwarten.

c) $\overline{D}$ ist das Ereignis: Daniel erzielt keinen Treffer bei 10 Versuchen.
$P(\overline{D}) = 0{,}6^5 \cdot 0{,}3^5 = 1{,}8896 \cdot 10^{-4}$
$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 0{,}9998$
$\overline{E}_1$ ist das Ereignis: Daniel trifft nur einmal ins untere Loch.
$P(\overline{E}_1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}0022$
$\overline{E}_2$ ist das Ereignis: Daniel trifft nur einmal ins obere Loch.
$P(\overline{E}_2) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}3^5 = 6{,}298 \cdot 10^{-4}$
$P(E) = 1 - (P(\overline{D}) + P(\overline{E}_1) + P(\overline{E}_2))$
$= 0{,}9970$

d) H_0: $p \leq 0{,}5$ (Behauptung von Daniel)
Anzahl der Versuchsdurchführungen: 20
Beschreibt G die Anzahl der Treffer von Marcel bei 20 Versuchen, so ist G bei wahrer Nullhypothese im Grenzfall binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}5$.
H_0 wird für große Werte von G abgelehnt, also ist $K = \{g;\ldots 20\}$ der kritische Bereich für H_0.
$P(G \geq g) = 1 - P(G < g) \leq 0{,}05 \quad (0{,}05 = \alpha)$
$= 1 - P(G \leq g - 1)$
$P(G < g) \geq 0{,}95$
$\Rightarrow \quad g = 15$ (Tafel)
Das Testergebnis liegt wegen $13 < 15$ nicht im kritischen Bereich.
$\Rightarrow$ Daniel muß seine Behauptung nicht zurücknehmen.

Bewertungsvorschlag:

a)	P(A); P(B); P(C)	3 BE
b)	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Erwartungswert	2 BE
c)	P(D); Ansatz für P(E); P(E)	3 BE
d)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
		10 BE

Mathematik

Abiturprüfung Leistungskurs

1995/96

Gymnasium · Sachsen - Anhalt

Aufgabe 1.1: Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $y = f_a(x) = \frac{a - x}{x + 3}$, $x, a \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$, $a \neq -3$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen der Schar f_a mit den Koordinatenachsen an.
Ermitteln Sie je eine Gleichung für die Asymptoten der Graphen der Funktionen der Schar von f_a.
Weisen Sie nach, daß die Graphen der Funktionen der Schar f_a keine Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzen.
Zeichnen Sie die Asymptoten und den Graphen der Funktion f_5 in ein und dasselbe Koordinatensystem im Intervall $-8 \leq x \leq 6$.

b) Der Graph der Funktion f_5 und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche F vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.
Durch Rotation der Fläche F um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieses Körpers.

c) Im Punkt $P(-2 \mid 7)$ wird an den Graphen der Funktion f_5 die Tangente t_1 gelegt.
Zeigen Sie, daß die Tangente t_1 durch den Punkt $Q(0 \mid -9)$ verläuft.
Weisen Sie nach, daß durch den Punkt Q genau eine weitere Tangente t_2 an den Graphen von f_5 existiert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B dieser Tangente t_2, und geben Sie eine Gleichung der Tangente t_2 an.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.1	a)	b)	c)
45 BE	2 / 4 / 5 / 5 BE	8 / 7 BE	4 / 6 / 4 BE

Aufgabe 1.2: Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch

$$y = f_a(x) = \frac{1}{a}(x - a)\sqrt{x}, \quad x, a \in \mathbb{R}, a > 0, x \geq 0.$$

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen der Schar f_a an.
Zeigen Sie, daß der Graph jeder Funktion der Schar f_a genau einen Tiefpunkt besitzt. Berechnen Sie die Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen der Funktionen der Schar f_a.

Geben Sie eine Gleichung für die Ortskurve k der Tiefpunkte der Graphen der Funktionen der Schar f_a an.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_4 im Intervall $0 \leq x \leq 6$. Zeichnen Sie die Ortskurve k in dasselbe Koordinatensystem.

b) Der Graph der Funktion f_4 und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.
Der Graph jeder Funktion der Schar f_a schließt mit der x-Achse jeweils eine Fläche vollständig ein.
Bei der Rotation dieser Flächen um die x-Achse entstehen Stromlinienkörper. Ermitteln Sie den Wert des Parameters a für den Fall, daß die Maßzahl des Volumens des Körpers 3π beträgt.

c) Die Tangenten an den Graphen jeder Funktion der Schar f_a in dem Tiefpunkt und in dem Schnittpunkt mit der x-Achse begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Trapez. Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes der Trapezfläche in Abhängigkeit von a.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.2	a)	b)	c)
45 BE	2 / 10 / 3 / 6 BE	7 / 7 BE	10 BE

Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

der Punkt $A(4 \mid 5 \mid -2)$,

die Gerade g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$,

die Ebene E_1: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und

die Schar der Ebenen F_a: $2x_1 + ax_2 + (2a-4)x_3 = 6, \quad a \in \mathbb{R}$, gegeben.

a) Zeigen Sie, daß der Punkt A und die Gerade g_1 eine Ebene E_2 bestimmen.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von E_2.
[Ergebnis zur Kontrolle: z.B. E_2: $x_1 + 2x_2 + x_3 - 12 = 0$]
Untersuchen Sie die Lage der Ebenen E_1 und E_2 zueinander.

b) Genau eine Ebene F_a schneidet die Ebene E_2 orthogonal. Die Schnittgerade dieser Ebenen sei die Gerade g_2.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g_2.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden g_2.

c) Senkrecht zur Ebene E_1 verläuft durch den Koordinatenursprung die Gerade g_3. Auf der Geraden g_3 liegt der Mittelpunkt der Kugel K, für die die Ebenen E_1 und E_2 (aus Aufgabe a) Tangentialebenen sind.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Kugel K.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.1	a)	b)	c)
35 BE	2 / 5 / 3 BE	9 / 4 BE	12 BE

Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
$A(9 \mid -4 \mid 7)$, $B(9 \mid 2 \mid 1)$ und $C(3 \mid 8 \mid 1)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß die Punkte A, B und C eine Ebene E_1 bestimmen. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von E_1. [Mögliches Ergebnis: $x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$]
Begründen Sie: Ein weiterer Punkt D kann so gewählt werden, daß die Punkte A, B, C und D Eckpunkte des Rhombus ABCD sind.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D.
Berechnen Sie das Gradmaß eines Innenwinkels dieses Rhombus.

b) Die Ebene E_2 verlaufe durch den Koordinatenursprung und parallel zur Ebene, in der der Rhombus ABCD (aus Aufgabe a) liegt. Geben Sie eine Gleichung für die Ebene E_2 an.
Die Punkte A, B, C und D (aus Aufgabe a) seien Eckpunkte eines geraden Prismas ABCDEFGH. Die Eckpunkte E, F, G und H dieses Prismas liegen in der Ebene E_2. Ermitteln sie die Koordinaten der Punkte E, F, G und H.

c) Dem Prisma ABCDEFGH (aus Aufgabe b) wird ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben. Dabei liege eine Kreisfläche des Zylinders in der Ebene E_1, und das Volumen des Zylinders sei maximal.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Symmetrieachse des Kreiszylinders.
Berechnen Sie die Maßzahl der Länge des Radius des Kreiszylinders.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.2	a)	b)	c)
35 BE	3 / 5 / 4 / 2 / 3 BE	2 / 8 BE	4 / 4 BE

Aufgabe 3.1: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein Gerät G ist mit 10 unabhängig voneinander arbeitenden Bauteilen bestückt. Jedes dieser Bauteile fällt während der Zeitspanne T mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}05$ aus. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der während T ausfallenden Teile.

a) Geben Sie eine Verteilungsfunktion für die Zufallsgröße X an. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß X einen Wert annimmt, der um mindestens 2 vom Erwartungswert von X abweicht.

b) Ein anderes Gerät G′ mit gleicher Funktion ist mit doppelt so vielen unabhängig voneinander arbeitenden Bauteilen wie G bestückt. Jedes der Bauteile im Gerät G′ fällt während der Zeitspanne T mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{p}{2}$ aus.
Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß während der Zeitspanne T in den Geräten jeweils kein Bauteil ausfällt.

c) Ein Großgerät sei mit 500 Bauteilen bestückt. Diese Bauteile unterliegen den gleichen Bedingungen wie die Bauteile des Gerätes G. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall während der Zeitspanne T beträgt für jedes Bauteil ebenfalls $P = 0{,}05$. Nunmehr beschreibe die Zufallsgröße Y die Anzahl der während er Zeitspanne T ausfallenden Teile. Y kann näherungsweise als normalverteilt angesehen werden.
Ermitteln Sie unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, daß während der Zeitspanne T höchstens 15 Bauteile ausfallen.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 3.1	a)	b)	c)
20 BE	4 / 5 BE	4 BE	7 BE

Aufgabe 3.2: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) $f(x) = -2f'(x), \qquad x \in \mathbb{R}$

(2) $f(0) = 4$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Funktion f.
   [Ergebnis zur Kontrolle: z.B. $y = f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x}$]
   Untersuchen Sie die Funktion f auf Monotonie.
   Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-1 \le x \le 8$.

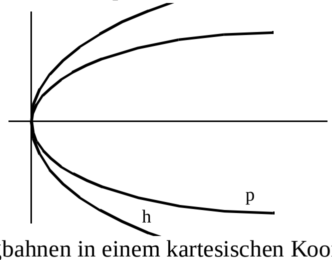
b) Der Graph der Funktion f rotiere im Intervall $a \le x \le b$ um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Die Maßzahlen der Längen der Radien der diesen Körper begrenzenden Kreisflächen sind $r_1 = 4$ und $r_2 = 1$.
   Weisen Sie nach, daß die Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers 15π beträgt.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 3.2	a)	b)
20 BE	6 / 3 / 3 BE	8 BE

Aufgabe 3.3: Analytische Geometrie

Ein Flugkörper wird zu Erkundungen im interplanetaren und interstellaren Raum eingesetzt. Bei der Annäherung an einen Himmelskörper soll er von einer parabelförmigen auf eine hyperbelförmige Flugbahn gebracht werden.
Die Skizze zeigt die Lage der Parabel p und eines Astes der Hyperbel h zueinander.



Skizze, nicht maßstäblich

Nunmehr werden die Flugbahnen in einem kartesischen Koordinatensystem betrachtet.

a) Die Parabel p hat den Scheitelpunkt S(0 | 0) und verläuft durch die Punkte P(2 | –2) und Q(2 | 2). Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Parabel.
   [Ergebnis zur Kontrolle: z.B. $y^2 = 2x$]

b) Der Punkt $S(0 \mid 0)$ sei ein gemeinsamer Scheitelpunkt der Parabel p und der Hyperbel h in achsenparalleler Lage. Eine Asymptote der Hyperbel verlaufe durch die Punkte $A(1 \mid 2{,}5)$ und $B(2 \mid 3)$.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Hyperbel.
[Ergebnis zur Kontrolle: z.B. $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$]

c) Im Punkt $T(4 \mid 2\sqrt{2})$ wird die Tangente an die Parabel gelegt. Diese Tangente schneidet die Hyperbel für $x > 0$ im Punkt H.
Berechnen Sie die Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{TH}$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 3.3	a)	b)	c)
20 BE	3 BE	8 BE	9 BE

Aufgabe 1.1: Analysis

Geg.: Funktionenschar $y = f_a(x) = \frac{a - x}{x + 3}$

a) Schnittpunkte der Graphen der Schar mit den Koordinatenachsen

S_y: Bed. $x = 0$

$$f_a(0) = \frac{a - 0}{0 + 3} = \frac{a}{3} \qquad \Rightarrow \; S_y(0;\ \tfrac{a}{3})$$

S_x: Bed. $y = 0$

$$0 = \frac{a - x}{x + 3} \qquad \Big| \cdot (x + 3)$$

$$0 = a - x$$

$$x_0 = a \qquad \Rightarrow \; N(a;\ 0)$$

Asymptoten der Graphen der Schar

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a - x}{x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\frac{a}{x} - 1)}{x(1 + \frac{3}{x})} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a - x}{x + 3} = -1$$

NR z.B. $(a - x) : (x + 3) = -1$

$$\begin{array}{l} \underline{(-3 - x)} \\ \quad a + 3 \end{array}$$

Polstelle Bed.: $x + 3 = 0$

$x_p = -3$

senkrechte Asymptote $x = -3$

waagerechte Asymptote $y = -1$

Nachweis, daß die Graphen der Schar keine Extrempunkte besitzen, keine Wendepunkte besitzen

$$f_a(x) = \frac{a - x}{x + 3}$$

$$f'_a(x) = \frac{(-1) \cdot (x + 3) - (a - x) \cdot 1}{(x + 3)^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{-x - 3 - a + x}{(x + 3)^2} = \frac{-3 - a}{(x + 3)^2} = (-3 - a) \cdot (x + 3)^{-2}$$

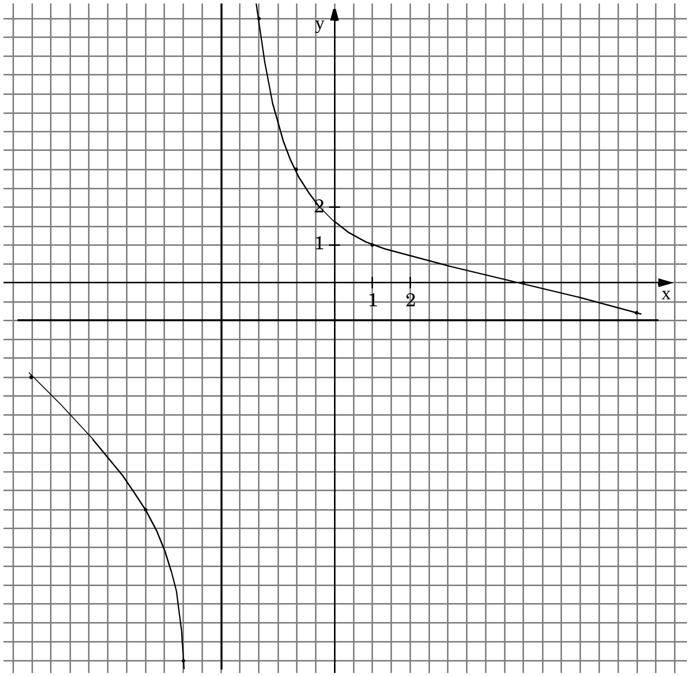
$$f''_a(x) = (-3 - a) \cdot (-2) \cdot (x + 3)^{-3} = \frac{6 + 2a}{(x + 3)^3}$$

wegen $f'_a(x) = \frac{-3 - a}{(x + 3)^2}$ kann $f'_a(x)$ für keinen Wert von x null werden

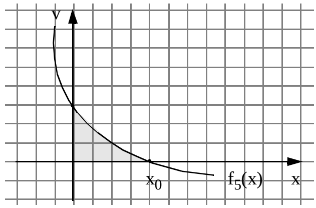
$\Rightarrow$ es gilt stets $f'_a(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ es gibt keine Stelle x für die die notwendige Bedingung eines Extrempunktes erfüllt wäre

Wegen $f''_a(x) = \frac{6 + 2a}{(x + 3)^3}$ gibt es keine wendepunktverdächtige Stelle x, da stets $f''_a(x) \neq 0$.



b) Maßzahl des Flächeninhaltes



$$A = \int_0^{x_0} f_5(x)\,dx$$

wegen N(a; 0) $\Rightarrow$ $x_0 = 5$

$$\Rightarrow\ A = \int_0^5 \left(\frac{a-x}{x+3}\right)dx = \int_0^5 \left[-1 + \frac{a+3}{x+3}\right]dx$$

$$(-x + a) : (x + 3) = -1 + \frac{a+3}{x+3}$$
$$\underline{-(-x - 3)}$$
$$a + 3$$

$A = [-x + (a + 3) \cdot \ln|x + 3|]\Big|_0^5$ mit a = 5

$A = (-5 + (5 + 3) \cdot \ln|5 + 3|) - (-0 + (5 + 3) \cdot \ln|0 + 3|)$

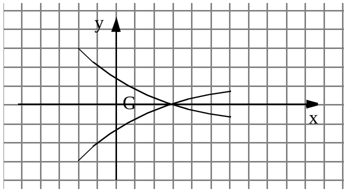
$A = -5 + 8\ln 8 - 8 \cdot \ln 3 \approx 2{,}85$

Andere Wege, z.B.

1) Substitution $x + 3 = z$ $\quad$ $x = z - 3$
$dz = dx$

2) partielle Integration $u = a - x$ $\quad$ $u = -1$
$v' = x + 3$ $\quad$ $v = \ln|x + 3|$

Maßzahl des Rotationsvolumens



$$V = \pi\int_0^5 [f_5(x)]^2 dx$$

$$V = \pi\int_0^5 \left[\frac{5 - x}{x + 3}\right]^2 dx$$

$$V = \pi\int_0^5 \frac{25 - 10x + x^2}{(x + 3)^2}\,dx$$

$$(x^2 - 10x + 25) : (x^2 + 6x + 9) = 1 + \frac{-16x + 16}{(x + 3)^2}$$
$$\underline{-(x^2 + \ \ 6x + 9)}$$
$$-16x + 16$$

$$V = \pi\int_0^5 \left[1 + \frac{-16x + 16}{(x + 3)^2}\right]dx$$

$$V = 5\pi + \pi\int_0^5 \frac{-16x + 16}{(x + 3)^2}\,dx$$

Substitution

$x + 3 = z$ $\quad$ $z - 3 = x$

$\frac{dz}{dx} = +1$ $\quad$ $dz = dx$

$$V = 5\pi + \pi\left[-16\ln|x + 3| - 64\frac{1}{x + 3}\right]_0^5$$

$$V = 5\pi + \pi(-16\ln 8 - \frac{64}{8} + 16\ln 3 + \frac{64}{3})$$

$$V = 5\pi + \pi(16 \cdot (\ln 3 - \ln 8) + 64(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}))$$

$$V \approx 8{,}29$$

$$\int \frac{-16(z - 3) + 16}{z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{-16z + 64}{z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{-16}{z}\,dz + \int \frac{64}{z^2}\,dz$$

$$= -16\ln|z| - 64\frac{1}{z}$$

c) Nachweis, daß Tangente t_1 durch den Punkt Q

$f_5(x) = \frac{5-x}{x+3}$ P(–2; 7)

$f'_5(x) = \frac{-8}{(x+3)^2}$

t_1: $\frac{y-y_P}{x-x_P} = f'_5(x_P)$

$$y - y_P = \frac{-8}{(-2+3)^2} \cdot (x+2)$$

$$y - y_P = -8(x+2)$$

$$y = -8x - 16 + 7$$

t_1: $y = -8x - 9$

Q in t_1: $-9 = -8 \cdot 0 - 9$ w.A. $\Rightarrow$ $Q \in t_1$

Nachweis, daß genau eine weitere Tangente t_2 durch Q an $f_5(x)$

$f'_5(x) = \frac{-8}{(x+3)^2}$ Q(0; –9)

Anderer Weg, z.B. über Punktsymmetrie bezüglich des Asymptotenschnittpunktes
$\Rightarrow$ $f'_5(x)$ an Stelle x_Q
liefert $m = f'_5(x_B)$

Tangentengleichung allgemein von Q an $f_5(x)$

$$y + 9 = m \cdot (x - 0)$$

$$\frac{5-x}{x+3} + 9 = \frac{-8 \cdot x}{(x+3)^2} \quad \Big| \cdot (x+3)^2$$

$$(5-x)(x+3) + 9(x+3)^2 = -8x$$

$$5x + 15 - x^2 - 3x + 9x^2 + 54x + 81 + 8x = 0$$

$$8x^2 + 64x + 96 = 0 \quad \Big| : 8$$

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16-12}$$

es gibt genau zwei Lösungen: $x_1 = -4 - 2 = -6$
$x_2 = -4 + 2 = -2$

$f_5(-2) = 7$ P(–2; 7)

$f_5(-6) = \frac{11}{-3}$ $B(-6; -\frac{11}{3})$ als Berührungspunkt von t_2 mit $f_5(x)$

t_2: $y - y_B = f'_5(x_B) \cdot (x - x_B)$

$$y + \frac{11}{3} = \frac{-8}{(-6+3)^2}(x+6)$$

$$y = -\frac{8}{9}x - \frac{48}{9} - \frac{33}{9}$$

t_2: $y = -\frac{8}{9}x - 9$

Aufgabe 1.2: Analysis

Geg.: Funktionenschar f_a

$$y = f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (x - a)\sqrt{x}$$

a) Nullstellen der Funktionenschar

Bed. $y = 0$ $\qquad 0 = \frac{1}{a}(x - a)\sqrt{x}$

$\Rightarrow \quad x_{01} = a$

$\qquad x_{02} = 0 \qquad \Rightarrow N_1(0; 0) \qquad N_2(a; 0)$

Nachweis, daß genau ein Tiefpunkt in jedem Graphen der Schar

$$f_a(x) = \frac{1}{a}(x - a)\sqrt{x}$$

$$f'_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \left[1 \cdot \sqrt{x} + (x - a) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$f'_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{2x + x - a}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{a} \cdot \frac{3x - a}{2\sqrt{x}}$$

$$f''_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} - (3x - a) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x}$$

notw. Bed. $\qquad f'_a(x) = 0$

notw. Bed. u. $\qquad f'_a(x) = 0$

hinr. Bed. $\qquad f''_a(x_E) \neq 0$

$$0 = \frac{1}{a} \cdot \frac{3x - a}{2\sqrt{x}}$$

$$0 = 3x - a$$

$x_E = \frac{a}{3}$ $\qquad$ eine einzige extremwertverdächtige Stelle

$$f''_a(x_E) = \frac{1}{a} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} - (3 \cdot \frac{a}{3} - a) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{3}}}}{4 \cdot \frac{a}{3}}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} - (0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{3}}}}{\frac{4}{3}a} = \frac{1}{a} \; \frac{6 \cdot 3}{4} \; \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{9}{2\sqrt{3}} \; \frac{\sqrt{a}}{a^2} \qquad \text{stets} > \text{null}$$

$\Rightarrow$ an Stelle $x_E = \frac{a}{3}$ $\qquad$ Minimum

$$\Rightarrow \; f_a\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a}{3} - a\right)\sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$\Rightarrow \; T\left(\frac{a}{3}; -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

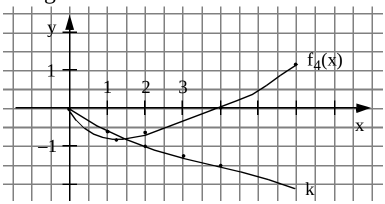
Gleichung für die Ortskurve der Tiefpunkte

$x_E = \frac{a}{3} \qquad \Rightarrow \qquad a = 3x_E$

$y_E = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3x_E}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x_E}$

$y_E = f(x_E) = -\frac{2}{3}\sqrt{x_E}$, wobei $x > 0$

graphische Darstellung



b) Maßzahl des Inhaltes einer eingeschlossenen Fläche

$$A = \left| \int_0^4 \frac{1}{4} \cdot (x-4) \cdot \sqrt{x}\, dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^4 \frac{1}{4} (x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}})\, dx \right|$$

$$A = \left| \frac{1}{4} \cdot [\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}]_0^4 \right|$$

$$A = \left| \frac{1}{4} \cdot [\frac{64}{5} - \frac{64}{3}] \right| \approx 2{,}13$$

Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_0^a [f_a(x)]^2 dx \qquad \text{mit} \qquad f_a(x) = \frac{1}{a}(x-a)\sqrt{x}$$

$$f_a^2(x) = \frac{1}{a^2}(x-a)^2 x$$

$$f_a^2(x) = \frac{1}{a^2}[x^3 - 2ax^2 + a^2x]$$

$$V = \pi \int_0^a \frac{1}{a^2}[x^3 - 2ax^2 + a^2x]dx$$

$$V = \frac{1}{a^2} \cdot \pi[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2]\Big|_0^a$$

$$V = \frac{\pi}{a^2}[\frac{a^4}{4} - \frac{2}{3}a^4 + \frac{1}{2}a^4] = \frac{\pi}{a^2} \cdot a^4[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}]$$

$V = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot a^2$

Bedingung $\quad V = 3\pi$

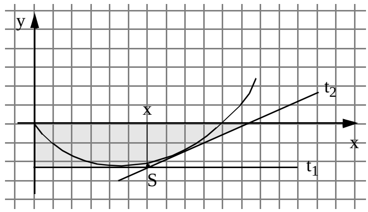
$3 = \frac{1}{12} a^2$

$a^2 = 36 \qquad\qquad a_1 = -6 \qquad$ entfällt wegen $a > 0$

$\qquad\qquad\qquad\quad a_2 = \;\; 6$

c) Maßzahl für den Inhalt einer Trapezfläche

$t_2: \quad y = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$



$t_1: \frac{y-0}{x-a} = f'_a(a)$

$y = \frac{1}{a} \cdot \frac{3a-a}{2\sqrt{a}}\,(x-a)$

$y = \frac{1}{a} \cdot \frac{2a}{2\sqrt{a}}\,x - \frac{1}{a} \cdot \frac{2a}{2\sqrt{a}} \cdot a$

$y = \frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$

Schnittpunkt S:

$y_{t_1} = y_{t_2}$

$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$

$\frac{x}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \cdot (1 - \frac{2}{9}\sqrt{3})$

$x_S = a \cdot (1 - \frac{2}{9}\sqrt{3})$

Trapezflächeninhalt

$A = x_S \left| -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \right| + \frac{1}{2}(a - x) \cdot \left| -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \right|$

$A = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot [x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x]$

$A = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_S + a) \qquad$ mit $x_S = a \cdot (1 - \frac{2}{9}\sqrt{3})$

$A = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot (1 - \frac{2}{9}\sqrt{3} + 1)a$

$A = \frac{1}{9}\sqrt{3a} \cdot (2 - \frac{2}{9}\sqrt{3})a$

$A = (\frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{81}) \cdot \sqrt{a} \cdot a$

$A = \frac{6 \cdot \sqrt{3} - 2}{27} a \cdot \sqrt{a}$

Anderer Weg: über Integralrechnung

$$A = \left| \int_0^{x_S} t_2(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_S}^{a} t_1(x)\,dx \right|$$

Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie

Geg.: Punkt A(4; 5; –2)

Gerade g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}13\\-10\\7\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

Ebene E_1: $[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\8\\6\end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$

Ebenenschar: F_a: $2x + ay + (2a - 4)z = 6, \quad a \in \mathbb{R}$

a) Nachweis, daß A und g_1 eine Ebene E_2 bestimmen

Wenn $A \notin g_1$, dann durch A und g_1 eine Ebene E_2 eindeutig bestimmbar

Punktprobe: $\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}13\\-10\\7\end{pmatrix}$

$t_x = \frac{6}{13}$

$t_y = \frac{3}{10}$

$t_z = 0$

Koordinatengleichung von E_2

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}13\\-10\\7\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2-4\\8-5\\-2+2\end{pmatrix}$

mit $\vec{n}_{E2} = \begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 3 & 0\\ 13 & -10 & 7\end{pmatrix} = 21\vec{i} + 60\vec{k} - 39\vec{k} + 42\vec{j} = \begin{pmatrix}21\\42\\21\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}\right) = 0$

$(x - 4) + 2(y - 5) + (z + 2) = 0$

$x + 2y + z - 12 = 0$

Lagebeziehung zwischen den Ebenen E_1 und E_2

wegen $\vec{n}_{E1} = \vec{n}_{E2} \Rightarrow E_1 \,||\, E_2$

Punktprobe

A in E_1 $\begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-8 \\ -2-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 0$

$2 - 6 - 8 \neq 0$

$\Rightarrow \quad E_1 \neq E_2 \quad \text{und} \quad E_1 \parallel E_2$

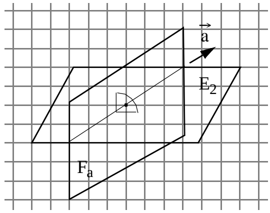
b) Gleichung einer Schnittgeraden

orthogonaler Schnitt zwischen F_a und E_2 heißt

(1) $\vec{n}_{E_2} \circ \vec{n}_{F_a} = 0$

und der Richtungsvektor für die Schnittgerade läßt sich ermitteln als

(2) $\vec{a} = \vec{n}_{E_2} \times \vec{n}_{F_a}$



aus (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2a-4 \end{pmatrix} = 0$

$2 + 2a + 2a - 4 = 0$

$a = 0{,}5$

aus (2) $\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} - 4\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6{,}5 \\ 5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$

E_2 in $F_{0,5}$ einsetzen

$$2(-2 + 13t - 6s) + \frac{1}{2}(8 - 10t + 3s) - 3(-2 + 7t) = 6$$

$$-4 + 26t - 12s + 4 - 5t + 1{,}5s + 6 - 21t = 6$$

$$s = 0$$

$\Rightarrow$ Schnittgerade

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$

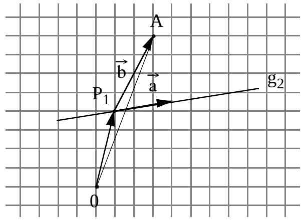
Abstand des Punktes A von der Geraden g_2:

Wegen d $\triangleq$ Flächeninhalt/Grundfläche

$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$ mit $\vec{a}$ … Richtungsvektor der Geraden

$\vec{b}$ … Differenzvektor zwischen A und Punkt der Geraden

$\vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1A}$



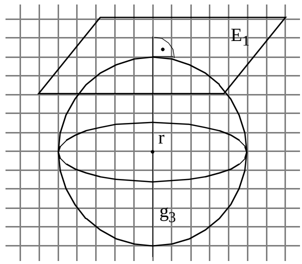
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 5-8 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & -10 & 7 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 42\vec{j} - 39\vec{k} + 60\vec{k} + 21\vec{i} = \begin{pmatrix} 21 \\ 42 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ d = \frac{\sqrt{21^2 + 42^2 + 21^2}}{\sqrt{13^2 + (-10)^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{2646}}{\sqrt{318}} \approx 2{,}88$$

c) Kugelgleichung



Es gilt: $\quad g_3$: $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für den Kugeldurchmesser d gilt:
d = Abstand (E_1, E_2)

$$d = \frac{\left| \vec{n}_{E_1} \circ \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-8 \\ -2-6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \vec{n}_{E_1} \right|} \qquad \text{mit } \vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

entstanden aus: dem Spatprodukt ≙ Volumen,
Kreuzprodukt ≙ Flächeninhalt eines Parallelepipeds,

$$d = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3) + 1 \cdot (-8)|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{6}$$

Für den Kugelmittelpunkt M gilt:
B_{E_1} ist Berührungspunkt zwischen Kugel und E_1

$$\overrightarrow{OB_{E_1}} = r^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in } E_1$$

$$(r^* - 2) + 2(2r^* - 8) + (r^* - 6) = 0$$
$$r^* - 2 + 4r^* - 16 + r^* - 6 = 0$$
$$r^* = 4$$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{OB_{E_1}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

analog

$$\overrightarrow{OB_{E_2}} \ (r^*) + 2(r^* \cdot 2) + (r^*) - 12 = 0$$
$$r^* = 2$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OB_{E_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB_{E_2}} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB_{E_1}} - \overrightarrow{OB_{E_2}})$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad K: \ (x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-3)^2 = 6$$

Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie

Geg.: A(9; –4; 7) B(9; 2; 1) C(3; 8; 1)

a) Nachweis, daß A, B, C eine Ebene E_1 bestimmen

a) A, B, C spannen eine Ebene auf, wenn A, B, C nicht auf ein und derselben Geraden

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

weil $\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad g(A, B) \neq g(A, C)$

Koordinatengleichung $E_1(A, B, C)$

$$E_1: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{AB}^* \times \overrightarrow{AC}^* = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$$

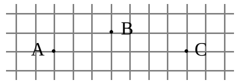
$$0 = (x-9) + (y+4) + (z-7)$$

$$E_1 \qquad 0 = x + y + z - 12$$

Möglichkeit der Existenz eines Rhombus ABCD

– weil A, B, C nicht sämtlich auf einer Geraden, entsteht ΔABC

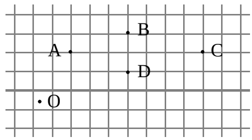
– Untersuchung des ΔABC auf Gleichschenkligkeit



$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}9\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

Koordinaten des Punktes D

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$



$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}9\\-4\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}$$

D(3; 2; 7)

Maßzahl für Innenwinkel des Rhombus

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} \qquad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{0-36+0}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{72}}$$

$$= \frac{-36}{72} = -\frac{1}{2}$$

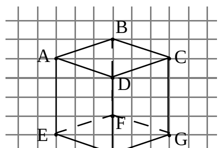
$$\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 120°$$

b) Ebene E_2 durch Ursprung parallel zu E_1

$$E_2: \quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$E_2 \qquad x + y + z = 0$$

Eckpunkte E, F, G, H des Prismas
Über senkrechte Hilfsgeraden von E_1 durch A, B, C, D mit E_2



$$h(A, E): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\-4\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

in E_2

$$x + y + z = 0$$
$$9 + r - 4 + r + 7 + r = 0$$
$$12 + 3r = 0$$
$$r = -4$$

$\Rightarrow$ E(5; –8; 3)

Anderer Weg:
r über Abstand der Ebenen bestimmen

$$r = d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

weitere Punkte über Rhombus-Eigenschaften

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ F(5; –2; –3)

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ G(–1; 4; –3)

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

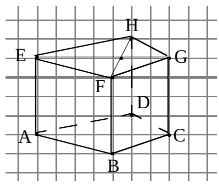
$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ H(–1; –2; 3)

c) Symmetrieachse für maximalen, dem Prisma einbeschriebenen Kreiszylinder
In Kreismittelpunkt mit Diagonalenschnittpunkt des Rhombus identisch

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



M(6; 2; 4)

Symmetrieachse:

s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Radius des Kreiszylinders
Entspricht dem Abstand des Punktes M von der Geraden g(A, B)

$$r = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|} \qquad \text{mit} \qquad \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$r = \frac{\sqrt{18^2 + 18^2 + 18^2}}{\sqrt{36 + 36}}$$

$$r = 3{,}67 \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6-9 \\ 2+4 \\ 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & -6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= -18\vec{i} + 18\vec{j} + 18\vec{k} + 36\vec{i}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Anderer Weg, z. B.
elementargeometrisch mit Hilfe der Winkelfunktionen

Aufgabe 3.1: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Geg.: 10 unabhängige Bauteile
Ausfallwahrscheinlichkeit $p = 0{,}05$ in Zeitspanne T
Zufallsgröße X für Anzahl der in T ausfallenden Teile

a) Verteilungsfunktion für die Zufallsgröße X

$n = 10 \quad 0 \le k \le 10$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$	0,59	0,31	0,07	0,01	0,0009	0,00006	$2 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$1{,}6 \cdot 10^{-9}$	$1{,}8 \cdot 10^{-11}$	$9{,}7 \cdot 10^{-14}$

allgemein $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}05^t \cdot 0{,}95^{n-k}$

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_{i=0}^{10} x_i \cdot P(X = x_i), \text{ d. h.}$$

$E(X) \approx 0{,}48$

Anderer Weg:
$E(X) = n \cdot p = \mu$, also
$E(X) = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$

Varianz

$$V(X) = \sum_{i=0}^{10} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \quad \text{mit } \mu = E(X)$$

$$V(X) = D^2X = n \cdot p \cdot q \qquad q = 1 - q$$
$$= 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475$$

$V(X) = D^2X = n \cdot p \cdot q$

$D^2X = 0{,}475$

Wahrscheinlichkeit, daß X einen Wert annimmt, der um mindestens 2 vom Erwartungswert von X abweicht

d.h. $|X - 0{,}5| \geq 2$, wegen X stets $\geq$ null heißt das $X \geq 3$

$$\Rightarrow \quad P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$
$$\approx 1 - 0{,}59 - 0{,}31 - 0{,}07 \approx 0{,}03$$
$$= 1 - 0{,}5987 - 0{,}3151 - 0{,}0746 = 0{,}0116 \quad \text{(laut Tabelle)}$$

b) Wahrscheinlichkeiten, daß während einer Zeitspanne T in G′, G jeweils kein Bauteil ausfällt

Für das Gerät G gilt

$$P_G(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1 - 0{,}05)^{10} = 0{,}95^{10} \approx 0{,}5987$$

Für das Gerät G' gilt (wobei n' = 20; $p' = \frac{p}{2}$)

$$P_{G'}(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}025^0 \cdot (1 - 0{,}025)^{20} = 0{,}975^{20} \approx 0{,}6027$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß in beiden Geräten keine Baugruppe ausfällt, ist ungefähr gleich.

c) Wahrscheinlichkeit, daß unter der Annahme einer Normalverteilung während einer Zeitspanne T von 500 Bauteilen höchstens 15 Bauteile ausfallen

Grundsätzlich auch hier binomialverteilte Zufallsgröße Y

$EY = n \cdot p \qquad D^2Y = n \cdot p \cdot q$

daher

$EY = 500 \cdot 0{,}05$ wegen $n = 500$

$= 25 \qquad p = 0{,}05$

$D^2Y = 500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95$

$= 23{,}75$

Nun wird Y näherungsweise als normalverteilt angesehen, also gilt die globale Näherungsformel

$$
\begin{aligned}
P(Y \le 15) &\approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) && \text{mit} \quad \sigma = \sqrt{D^2Y} \\
&\approx \Phi\left(\frac{15-25}{\sqrt{23,75}}\right) \\
&\approx \Phi(-2{,}05) && \text{wegen} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \\
&\approx 1 - \Phi(2{,}05) \\
&\approx 1 - 0{,}9798 && \text{laut Tabelle} \\
&\approx 0{,}0202
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2: Analysis

Geg.: (1) $f(x) = -2 \cdot f'(x) \qquad x \in \mathbb{R}$
(2) $f(0) = 4$

a) Gleichung für die Funktion
aus (1) folgt

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2} \qquad \text{integrieren}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int -\frac{1}{2}\,dx$$

$$\ln|f(x)| = -\frac{1}{2}x + c \qquad \text{also}$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x + c} = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot e^{c}$$

aus (2)

$$e^0 \cdot e^c = 4$$

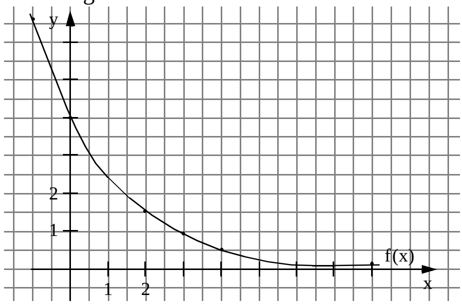
$$e^c = 4$$

$\Rightarrow$ $$f(x) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

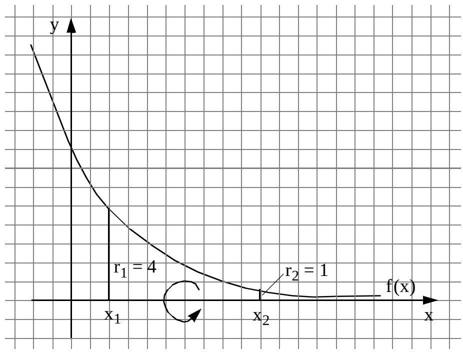
Monotonieuntersuchung

aus $f'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$ folgt wegen $e^{-\frac{1}{2}x}$ stets > null
$f'(x)$ stets < 0 d.h. stets monoton fallend.

graphische Darstellung



b) Maßzahl für Rotationsvolumen



(1) $4 = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x_1}$

$1 = e^{-\frac{1}{2}x_1}$

$\ln 1 = -\frac{1}{2}x_1$

$x_1 = 0$

(2) $1 = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x_2}$

$\frac{1}{4} = e^{-\frac{1}{2}x_2}$

$\ln\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}x_2$

$x_2 = -2\ln 0{,}25 \approx 2{,}77$

Nachweis, daß Rotationsvolumen 15π

$$V = \pi\int_0^{-2\ln 0,25}[f(x)]^2dx = \pi\int_0^{-2\ln 0,25}16\cdot e^{-\frac{1}{2}x\cdot 2}\,dx = \pi\int_0^{-2\ln 0,25}16\cdot e^{-x}dx$$

$V = 16\pi[-e^{-x}]_0^{-2\ln 0,25}$

$V = 16\pi[-e^{2\ln 0,25} - (-e^{-0})]$

$V = 16\pi[-(\frac{1}{4})^2 + 1] = 16\pi - \pi = 15\pi$

Aufgabe 3.3: Analytische Geometrie

a) Parabelgleichung

S(0; 0) P(2; –2) Q(2; 2)

Parabelgleichung mit Scheitelpunkt im Ursprung

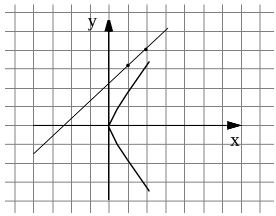
$y^2 = 2px$

d.h. $4 = 2 \cdot p \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad p = 1$

$\Rightarrow \quad y^2 = 2x$

b) Hyperbelgleichung

S(0; 0) Scheitelpunkt für Hyperbel in achsenparalleler Lage



Asymptote durch A(1; 2,5)
B(2; 3)

$$\frac{x-c}{a} \pm \frac{y-d}{b} = 0$$

P(c; d) ist derjenige Punkt, in dem die Asymptote die x-Achse schneidet

g(A, B) I $2{,}5 = m + n$

II $3 = 2m + n$

I–II $-\frac{1}{2} = -m$

$m = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 2$

g(A, B) $y = \frac{1}{2}x + 2$ schneidet die x-Achse in

$0 = \frac{1}{2}x + 2$

$x_0 = -4$

$\Rightarrow$ P(−4; 0) $\quad \Rightarrow \quad a = 4$

b über Asymptote

$$\frac{2+4}{4} - \frac{3-0}{b} = 0$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{b} \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Hyperbelgleichung

$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y-0)^2}{4} = 1$$

c) Tangente in T an Parabel

$T(4; 2\sqrt{2})$ $\qquad H(x_H, y_H) \quad x_H > 0$

$T \in$ Parabel $\qquad H \in$ Hyperbel

$$y^2 = 2x$$

$$2y \cdot y' = 2$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Tangente in T

$f'(4) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 4}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

t: $\quad \frac{y - 2\sqrt{2}}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{8}}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{4}{\sqrt{8}} + 2\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,x - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

t: $\quad y = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$

Schnitt zwischen Tangente und Hyperbel

$$4(x + 4)^2 - 16\cdot\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\right)^2 = 64$$

$$4x^2 + 32x + 64 - 16\cdot\left(\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) = 64$$

$$x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 + 16}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm 4\sqrt{2}$$

wegen $x > 0$, entfällt $x_2 = -4 - 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x_H = -4 + 4\sqrt{2}$

$y_H = 2$ aus

$$\frac{(-4 + 4\sqrt{2} + 4)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{16\cdot 2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$y = 2$$

($y = -2$ entfällt)

Streckenlänge TH

$$\overline{TH} = \sqrt{(x_T - x_H)^2 + (y_T - y_H)^2}$$

$$\overline{TH} = \sqrt{(4 - (-4 + 4\sqrt{2}))^2 + (2\sqrt{2} - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(4 + 4 - 4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 2)^2}$$

$$\approx 2{,}48$$

Mathematik

Abiturprüfung Leistungskurs

1994/95

Gymnasium · Thüringen

Aufgabe 1.1

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Symmetrie!

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_t mit der x-Achse!

c) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte!

d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen $f_{t?}$
Geben Sie eine Gleichung dieser Ortskurve an!

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!

f) Die Punkte $P_1\left(t; \frac{5}{9}t^2\right)$, $P_2(t\sqrt{6}; 0)$ und $P_3(-t\sqrt{6}; 0)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser quadratischen Funktion!

g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximumpunkte des Graphen von f_2 schneidet die y-Achse im Punkt S. Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P\left(x_p; f_2(x_p)\right)$ und $Q\left(-x_p; f_2(-x_p)\right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks ΔQPS.
Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal?
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks ΔQPS an!

h) Der Graph von f_t, die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die x-Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A(t).
Berechnen Sie A(t)!

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.1	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
30 BE	1 BE	2 BE	5 BE	3 BE	1 BE	5 BE	8 BE	5 BE

Aufgabe 1.2

Für jedes $t \geq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch
$f_t(x) = x(t - \ln x)$ $\qquad (x \in \mathbb{R};\ x > 0)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte und weisen Sie die Art der lokalen Extrema nach!

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 im Intervall $0 < x \leq 8$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

c) An welcher Stelle x_B muß man die Tangente an den Graphen von f_t legen, damit diese Tangente durch den Punkt T (0; 3) verläuft?

d) Es sei $P\left(x; f_t(x)\right)$ mit $0 < x < e^t$ ein Punkt auf dem Graphen von f_t.
Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in einem Punkt Q, die Parallele zur x-Achse durch P schneidet die y-Achse in einem Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten von P für den Fall, daß der Flächeninhalt des Rechtecks OQPS maximal wird (O bezeichnet den Koordinatenursprung.)!

e) Zeigen Sie, daß die Funktion F_t mit $F_t(x) = \frac{x^2}{2}\left(t - \ln x + \frac{1}{2}\right) + 1995$ eine Stammfunktion von f_t ist!

f) Eine Fläche wird vom Graphen der Funktion f_t, der x-Achse und den Geraden $x = e^{t-1}$ und $x = e^t$ vollständig begrenzt. Berechnen Sie den Inhalt A_t dieser Fläche!

g) Die Zahlen $A_n = \frac{1}{4}\, e^{2n}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)$ sind für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ die Glieder einer Zahlenfolge (A_n).
Beweisen Sie, daß für die Partialsummenfolge (s_n) mit $s_n = A_0 + \ldots + A_n$ gilt:

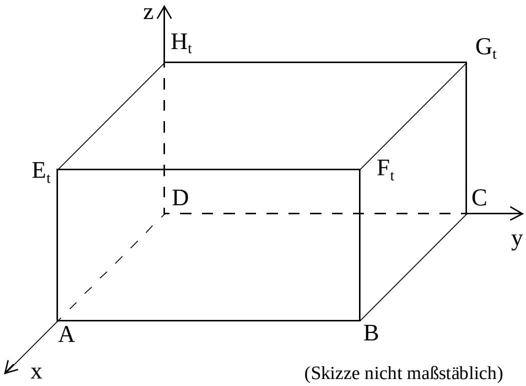
$$s_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)\frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}\ !$$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.2	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
30 BE	6 BE	3 BE	4 BE	6 BE	2 BE	4 BE	5 BE

Aufgabe 2.1

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$) ist ein Quader $ABCDE_tF_tG_tH_t$ mit F_t (6; 12; t) in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung D gegeben (siehe Skizze). Mit g_t sei die Gerade durch D und F_t bezeichnet, ε_t sei die Ebene durch die Punkte B, E_t und G_t.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene ε_{18} an! Die Gerade g_{18} schneidet die Ebene ε_{18} in einem Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie den Schnittwinkel α von g_{18} mit ε_{18}!

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $BG_{18}E_{18}F_{18}$ und geben Sie den Abstand des Punktes F_{18} von ε_{18} an!

c) Für welche positive Zahl t hat der Punkt F_t von der Ebene ε_t den Abstand 4?

d) Weisen Sie nach, daß es kein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so daß die Gerade g_t senkrecht zur Ebene ε_t ist!

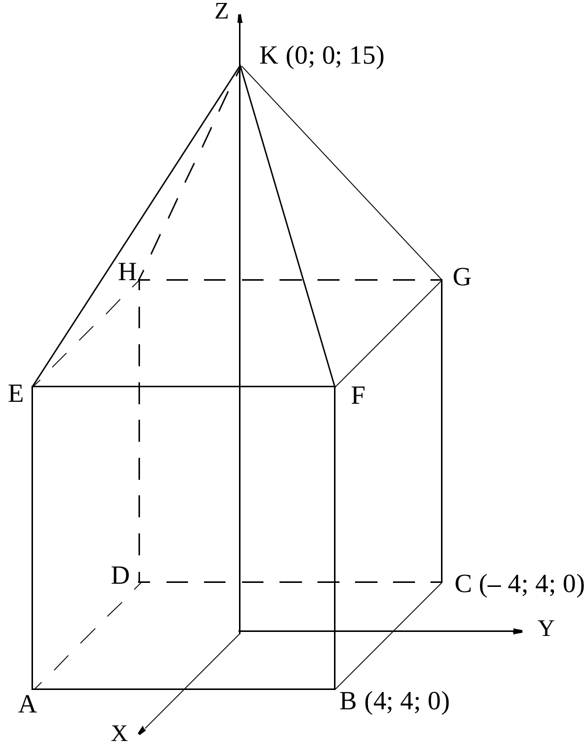
e) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s_t von ε_t mit der x-y-Ebene an! Untersuchen Sie s_t auf Schnittpunkte mit der Parabel $y = x^2 - 16x + 64$, und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.1	a)	b)	c)	d)	e)
15 BE	4 BE	3 BE	3 BE	2 BE	3 BE

Aufgabe 2.2

Der Turm einer Burg hat die Form eines Würfels, dem eine gerade Pyramide aufgesetzt ist (siehe Zeichnung in einem kartesischen Koordinatensystem). Die Kantenlänge des Würfels beträgt 8,00 m, die Höhe der Pyramide 7,00 m.



a) Die Ebenen ε_1 bzw. ε_2 enthalten die Punkte E, F und K bzw. die Punkte F, G und K. Geben Sie für beide Ebenen je eine parameterfreie Gleichung an!

b) Unter welchem Winkel schneiden sich ε_1 und ε_2 (aus Teilaufgabe a)?

c) Wie lang ist die Turmkante $\overline{FK}$, und welchen Neigungswinkel hat sie gegenüber der x-y-Ebene?

d) Auf der Turmspitze K befindet sich ein 3,00 m langer in Richtung der z-Achse verlaufender Fahnenmast mit der Spitze S.
Ein Beobachter steht im Punkt T $(0; y_T; 0)$. Seine Augenhöhe beträgt 1,60 m. Wie groß muß y_T mindestens sein, damit der Beobachter die Spitze S sehen kann?

e) Aus Gründen der Stabilität wird in das Turmdach ein Balken eingezogen, von dessen Dicke abgesehen wird. Der Balken geht vom Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$ aus und stützt die Dachfläche FGK so ab, daß er senkrecht zu dieser Fläche steht. Berechnen Sie die Länge des Balkens!

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.2	a)	b)	c)	d)	e)
15 BE	4 BE	2 BE	2 BE	4 BE	3 BE

Aufgabe 2.3

In Thüringen kann man 1 Liter Voll- bzw. Magermilch in verschiedenen Verpackungen kaufen. Um das Kaufverhalten der Kunden zu hinterfragen, wird Milch nur mittels Automaten verkauft.
Folgendes Wahlverhalten von 2588 Kunden wurde registriert:

	Vollmilch	Magermilch
Glasflasche	214	178
Plastflasche	753	632
Pappverpackung	441	370

Betrachtet werden die Ereignisse
A:= „der Kunde entscheidet sich für Magermilch“,
B:= „der Kunde kauft Magermilch in einer Plastflasche“,
C:= „der Kunde wählt weder Plastflasche noch Magermilch“,
D:= „der Kunde entschied sich für Vollmilch in einer Plastflasche“.

a) Ermitteln Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C und D!

b) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und E:= „der Kunde wählt eine Plastflasche“ voneinander unabhängig sind!

Um das Rückgabeverhalten der Kunden zu analysieren, werden die n Plastflaschen durchnumeriert und alle verkauft. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine dieser Flaschen nach Gebrauch zurückgegeben wird, heiße Rückgabewahrscheinlichkeit und werde mit p bezeichnet. Es gilt p = 0,70.

c) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
F := „von n = 15 Flaschen werden genau 4 Flaschen zurückgegeben",
G := „von n = 100 Flaschen werden mehr als 21 Flaschen nicht zurückgegeben"!

d) Bestimmen Sie k so, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
H_k := „von 100 Flaschen werden weniger als k Stück zurückgegeben"
kleiner als 0,05 ist!

Jede zurückgegebene Plastflasche werde wieder gefüllt und verkauft.
Beachten Sie, daß eine Flasche erst dann zurückgegeben werden kann, wenn mit ihr bereits 1 Liter Milch verkauft wurde.

e) Berechnen Sie für p = 0,70 jeweils die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
J := „mit ein und derselben Flasche lassen sich insgesamt genau 5 Liter Milch verkaufen",
K := „mit ein und derselben Flasche lassen sich insgesamt mindestens 5 Liter Milch verkaufen"!

f) Bestimmen Sie die Rückgabewahrscheinlichkeit p für den Fall, daß das Ereignis
L := „mit ein und derselben Flasche werden mindestens 10 Liter Milch verkauft" eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,85 besitzt!

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.3	a)	b)	c)	d)	e)	f)
15 BE	4 BE	1 BE	3 BE	2 BE	3 BE	2 BE

Aufgabe 1.1

$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 \qquad t > 0,\ x \notin \mathbb{R}$

a) $\underline{\underline{f(-x)}} = -\frac{1}{9}(-x)^4 + \frac{2}{3}t^2(-x)^2 = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 \underline{\underline{= f(x)}}$

Funktion ist symmetrisch zur y-Achse (gerade Funktion)

b) Schnittpunkt mit x-Achse

$-\frac{1}{9}\ x_0^{\ 4} + \frac{2}{3}t^2x_0^{\ 2} = 0$

$x_0^{\ 2}\left(-\frac{1}{9}x_0^{\ 2} + \frac{2}{3}t^2\right) = 0$

$x_{01} = 0$

$-\frac{1}{9}x_0^{\ 2} + \frac{2}{3}t^2 = 0$

$x_0^{\ 2} = 6t^2$

$x_{02} = +\sqrt{6}\,t$

$x_{03} = -\sqrt{6}\,t$

$\underline{\underline{P_{x_1}(0;\ 0) \qquad P_{x_2}(\sqrt{6}\,t;\ 0) \qquad P_{x_3}(-\sqrt{6}\,t;\ 0)}}$

c) $f_t'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2x$

$f_t''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2$

$f_t'''(x) = -\frac{24}{9}x = -\frac{8}{3}x$

$f_t'(x) = 0$ (notwendige Bedingung für lokale Extremstelle)

$\frac{4}{3}\ x_E\left(-\frac{1}{3}x^2 + t^2\right) = 0$

$x_{E1} = 0$

$x_E^{\ 2} = 3t^2$

$x_{E2} = +\sqrt{3}\,t$

$x_{E3} = -\sqrt{3}\,t$

$f_t''(0) = \frac{4}{3}t^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokale Minimumstelle

$f_t''(\pm\sqrt{3}\,t) = -\frac{4}{3} \cdot 3t^2 + \frac{4}{3}t^2 = -\frac{8}{3}t^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokale Maximumstelle

$f(0) = 0 \qquad \underline{\underline{P_{Min}(0;\ 0)}}$

$f(\pm\sqrt{3}\,t) = -\frac{1}{9} \cdot 9t^4 + \frac{2}{3}\ t^2 \cdot 3t^2 = -t^4 + 2t^4 = t^4$

$\underline{\underline{P_{Max_1}(\sqrt{3}\,t;\ t^4)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max_2}(-\sqrt{3}\,t;\ t^4)}}$

$f_t''(x) = 0$ (notwendige Bedingung für Wendepunkt)

$\frac{4}{3}\ x_w^{\ 2} = \frac{4}{3}t^2$

$x_{w1,\,2} = \pm t$

$f_t'''(\pm t) = \pm\frac{24}{9}t \neq 0$, da $t > 0$

$f_t(\pm t) = -\frac{1}{9}t^4 + \frac{2}{3}t^4 = \frac{5}{9}t^4$

$\underline{\underline{P_{w_1} = (t;\ \frac{5}{9}\ t^4)}} \qquad \underline{\underline{P_{w_2} = (-t;\ \frac{5}{9}\ t^4)}}$

d) $P_{Max}(\pm\sqrt{3}\,t;\ t^4)$

$$\left.\begin{aligned} z &= \pm\sqrt{3}\,t \\ t &= \pm\frac{z}{\sqrt{3}} \\ t^4 &= \frac{z^2}{9} \end{aligned}\right\} \qquad f(z) = \frac{1}{9}z^4$$

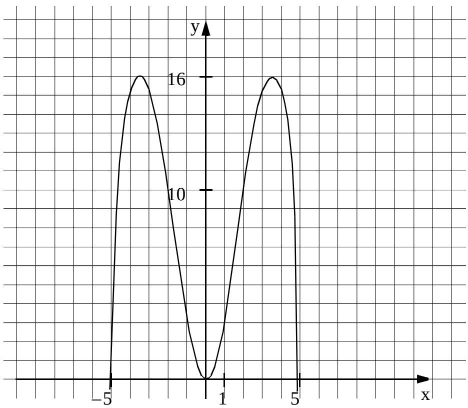
$\underline{\underline{\text{bzw. } y = \frac{1}{9}x^4}}$ Ortskurve der Maximumpunkte

e) $f_2(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{8}{3}x^2$

$x_{01} = 0 \quad x_{02,\,3} = \pm 2\sqrt{6} \approx 4{,}9$

$P_{Min}(0;\ 0) \quad P_{Max1,\,2}(\pm 2\sqrt{3}\ ;\ 16)$

$P_{W1,\,2}(\pm\ 2;\ \frac{80}{9})$



f) $P_1(t;\ \frac{5}{9}t^2)$ $\quad P_2(t\sqrt{6}\,;0)$ $\quad P_3(-t\sqrt{6}\,;0)$

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(t) = \frac{5}{9}t^2 = a\cdot t^2 + bt + c \qquad (1)$$

$$g(\sqrt{6}\,t) = 0 = 6at^2 + \sqrt{6}\,bt + c \qquad (2)$$

$$g(-\sqrt{6}\,t) = 0 = 6at^2 - \sqrt{6}\,bt + c \qquad (3)$$

$$(2) + (3):\quad 0 = 12at^2 + 2c \quad\Rightarrow\quad c = -6at^2 \quad (3')$$

$$\sqrt{6}\cdot(1) + (3):\ \sqrt{6}\cdot\frac{5}{9}t^2 = \sqrt{6}\,at^2 + 6at^2 + \sqrt{6}\,c + c$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{9}t^2 = a(\sqrt{6}\,t^2 + 6t^2) + c(\sqrt{6} + 1)$$

(3') einsetzen $\quad \frac{5}{9}\sqrt{6}\,t^2 = a(\sqrt{6}\,t^2 + 6t^2) - 6at^2(\sqrt{6} + 1)$

$$= a\sqrt{6}\,t^2 + 6at^2 - 6\sqrt{6}\,at^2 - 6at^2$$

$$\frac{5}{9}\sqrt{6}\,t^2 = -5\sqrt{6}\,t^2 a$$

$$\underline{\underline{a = -\frac{1}{9}}} \qquad \underline{\underline{c}} = -6\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)t^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}t^2}}$$

a und c in (1) $\quad \frac{5}{9}t^2 = -\frac{1}{9}t^2 + b\cdot t + \frac{2}{3}t^2$

$$\underline{\underline{b = 0}}$$

$$\underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2}}$$

g) $A_{\Delta PQS}$ $\quad$ $S(0;\,16)$ $\quad$ $0 < x_p < 2\sqrt{3}$

ΔPQS besteht aus 2 kongruenten rechtwinkligen Dreiecken mit Kathetenlängen x_p und $16 - f(x_p)$

$$P\left(x_p;\, -\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

$$A(x_p) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_p\left(16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

$$A(x_p) = 16x_p + \frac{1}{9}x_p^5 - \frac{8}{3}x_p^3$$

$$A'(x_p) = 16 + \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2$$

$$A''(x_p) = \frac{20}{9}x_p^3 - 16x_p$$

$$A'(x_p) = 0 \qquad \frac{5}{9}z^2 - 8z + 16 = 0$$

$$x_p^2 = z \qquad z^2 - \frac{72}{5}z + \frac{144}{5} = 0$$

$$z_1 = 12 \qquad z_2 = \frac{12}{5}$$

$$x_{p1} = \sqrt{12} \notin Db \qquad x_{p2} = \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{15} < 2\sqrt{3}$$

$A''\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right) = \frac{32}{15}\sqrt{15} - \frac{32}{5}\sqrt{15} < 0 \Rightarrow$ lokale Maximumstelle

$$A_{Max} = 16 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{15} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{15} \cdot \frac{144}{25} - \frac{8}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{15} = \underline{\underline{\frac{512}{125}\sqrt{15}}} \approx 15{,}9$$

h) Tangente an den Graphen im Wendepunkt

$P_w\left(t;\, \frac{5}{9}t^4\right)$

$f'(t) = -\frac{4}{9}t^3 + \frac{4}{3}t^3 = \frac{8}{9}t^3 = m_{tang.}$

$y = mx + n$

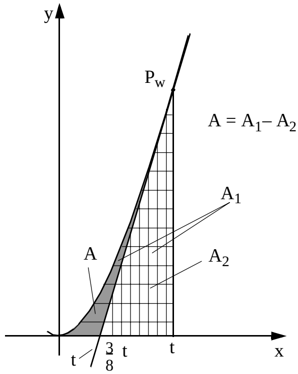
$\frac{5}{9}t^4 = \frac{8}{9}t^3 \cdot t + n$

$n = -\frac{1}{3}t^4$

Gleichung der Tangente $\qquad y = \frac{8}{9}t^3x - \frac{1}{3}t^4$

Schnittpunkt der Tangente mit x-Achse $\qquad 0 = \frac{8}{9}t^3x_0 - \frac{1}{3}t^4$

$$x_0 = \frac{3}{8}t$$



$$A_1 = \int_0^t f_t(x)\,dx = \left[-\frac{x^5}{45} + \frac{2}{9}t^2x^3\right]_0^t \qquad A_2 = A_\Delta = \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{8}t\right)\cdot\frac{5}{9}t^4$$

$$= -\frac{t^5}{45} + \frac{2}{9}t^5 = \frac{1}{5}t^{5} \qquad = \frac{25}{144}t^5$$

$$\underline{\underline{A = \frac{19}{720}t^5}}$$

Aufgabe 1.2

$f_t(x) = x(t - \ln x) \qquad t \geq 0;\ x \in \mathbb{R},\ x > 0$

a) Schnittpunkt mit der x-Achse

da $x > 0 \qquad t - \ln x_0 = 0$

$x_0 = e^t \qquad \underline{\underline{P_x(e^t; 0)}}$

$f_t'(x) = 1(t - \ln x) + x\left(-\frac{1}{x}\right) = t - 1 - \ln x$

$f_t''(x) = -\frac{1}{x}$

$f_t'''(x) = +\frac{1}{x^2}$

$f_t'(x_E) = 0$ (notwendige Bedingung für lokale Extremstelle)

$t - 1 - \ln x_E = 0 \qquad f_t''(e^{t-1}) = \frac{-1}{e^{t-1}} < 0 \Rightarrow$ lokale Maximumstelle

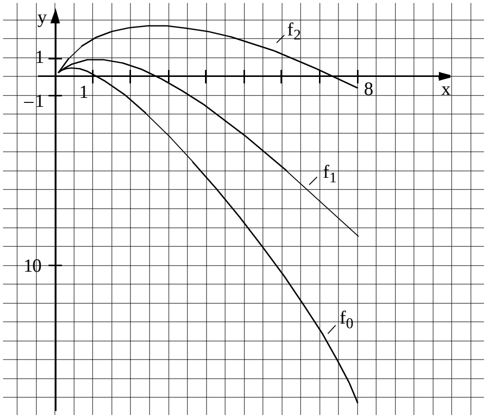
$\ln x_E = t - 1 \qquad f_t(e^{t-1}) = e^{t-1}(t - t + 1) = e^{t-1}$

$x_E = e^{t-1} \qquad \underline{\underline{P_{Max}(e^{t-1}; e^{t-1})}}$

$f_t''(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow$ <u>keine Wendepunkte</u>

b)

$f_0(x) = -x\ln x$	$f_0(8) \approx -16{,}6$	$P_0(1; 0)$	$P_{Max}(\frac{1}{e}; \frac{1}{e})$
$f_1(x) = x(1 - \ln x)$	$f_1(8) \approx -8{,}6$	$P_0(e; 0)$	$P_{Max}(1; 1)$
$f_2(x) = x(2 - \ln x)$	$f_2(8) \approx -0{,}6$	$P_0(e^2; 0)$	$P_{Max}(e; e)$



c) $\left.\begin{array}{l}T(0; 3)\\ \text{Gleichung einer Tangente } y = mx + n\end{array}\right\} \Rightarrow n = 3$

$$y = f_t'(x_B) \cdot x + 3$$

$$f_t'(x_B) = t - 1 - \ln x_B$$

$$y = f_t(x_B) = f'(x_B) \cdot x_B + 3$$

$$x_B(t - \ln x_B) = (t - 1 - \ln x_B) \cdot x_B + 3$$

$$x_B \cdot t - x_B \ln x_B = t x_B - x_B - x_B \ln x_B + 3$$

$$\underline{\underline{x_B = 3}}$$

d) $P(x; f_t(x)) \qquad 0 < x < e^t$

$A(x) = \overline{OQ} \cdot \overline{QP} = x \cdot f(x) = x^2(t - \ln x)$

$$A'(x) = 2x(t - \ln x) + x^2\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$A'(x) = 2x(t - \ln x) - x$$

$$A''(x) = 2(t - \ln x) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right) - 1$$

$$= 2(t - \ln x) - 3$$

$A'(x) = 0$ notwendige Bedingung f. lokale Extremstelle

$$2x(t - \ln x) = x \quad |: x > 0$$
$$2t - 2\ln x = 1$$
$$\ln x = t - \tfrac{1}{2}$$
$$0 < x = e^{t - \frac{1}{2}} < e^t$$
$$A''(e^{t-\frac{1}{2}}) = 2(t - t + \tfrac{1}{2}) - 3 = -2 < 0 \quad \Rightarrow \text{ lokale Maximumstelle}$$

lokale Maximumstelle $\triangleq$ globale Maximumstelle, da nur eine Extremstelle im Intervall

$$f_t(e^{t-\frac{1}{2}}) = e^{t-\frac{1}{2}}\,(t - t + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,e^{t-\frac{1}{2}}$$
$$\underline{\underline{P(e^{t-\frac{1}{2}};\ \tfrac{1}{2}\,e^{t-\frac{1}{2}})}}$$

e) $F_t(x) = \frac{x^2}{2}(t - \ln x + \frac{1}{2}) + 1995$ ist Stammfunktion von $f_t(x)$,
wenn gilt $F_t'(x) = f_t(x)$

$$F_t'(x) = x(t - \ln x + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{x^2}{2}\,(-\tfrac{1}{x})$$
$$= x(t - \ln x + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}x = x(t - \ln x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) = x(t - \ln x)$$
$$\underline{\underline{= f_t(x)}}$$

f) $$A = \int_{e^{t-1}}^{e^t} f_t(x)\,dx = \left[\tfrac{x^2}{2}\,(t - \ln x + \tfrac{1}{2})\right]_{e^{t-1}}^{e^t}$$
$$= \tfrac{e^{2t}}{2}(t - t + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{e^{2t-2}}{2}(t - t + 1 + \tfrac{1}{2})$$
$$\underline{\underline{A = \tfrac{e^{2t}}{4}\,(1 - \tfrac{3}{e^2})}}$$

g) Vor. $A_n = \frac{1}{4}e^{2n}(1 - \frac{3}{e^2})$ $\quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 0$

$s_n = A_0 + \ldots + A_n$

Beh. $s_n = \frac{1}{4}(1 - \frac{3}{e^2})\,\frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang

$$\underline{\underline{s_0 = \tfrac{1}{4}}}(1 - \tfrac{3}{e^2})\,\tfrac{1 - e^2}{1 - e^2} = \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{3}{e^2}) = \tfrac{1}{4}\cdot e^0(1 - \tfrac{3}{e^2}) \underline{\underline{= A_0}}$$

Ind.vor. $s_k = \frac{1}{4}(1 - \frac{3}{e^2})\,\frac{1 - e^{2k+2}}{1 - e^2}$ $\quad k \in \mathbb{N}$, beliebig aber fest gewählt

Ind.beh. $\underline{\underline{s_{k+1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right) \frac{1 - e^{2k+4}}{1 - e^2}}}$

Ind.bew. $s_{k+1} = s_k + A_{k+1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right) \frac{1 - e^{2k+2}}{1 - e^2} + \frac{1}{4} e^{2k+2}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)\left(\frac{1 - e^{2k+2}}{1 - e^2} + \frac{e^{2k+2}(1 - e^2)}{1 - e^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)\left(\frac{1 - e^{2k+2} + e^{2k+2} - e^{2k+4}}{1 - e^2}\right.$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right) \frac{1 - e^{2k+4}}{1 - e^2}}} \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Aufgabe 2.1

$t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$

a) Ebene ε_t durch B, E_t; G_t

B(6; 12; 0) $\qquad G_t(0; 12; t) \qquad E_t(6; 0; t)$

ε_{18} durch B(6; 12; 0) $\qquad E_{18}(6; 0; 18) \qquad G_{18}(0; 12; 18)$

$$\varepsilon_{18}: \quad \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}}} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

3-Punkte-Gleichung

$$\text{bzw.} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{18}: \quad \underline{\underline{6x + 3y + 2z}} = 36 + 36 = \underline{\underline{72}}$$

Koordinatenform

g_{18} durch D und F_{18} $\qquad$ D(0; 0) $\qquad F_{18}(6; 12; 18)$

$$\underline{\underline{g_{18}: \ \vec{x} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}}}$$

$g_{18} \cap \varepsilon_{18} = S$ $\qquad$ Einsetzen der Geradengleichung in die Koordinatenform der Ebene

$$6 \cdot 6t + 3 \cdot 12t + 2 \cdot 18t = 72$$

$$108t = 72$$

$$\underline{\underline{t = \frac{2}{3}}} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(4; 8; 12)}}$$

$\sphericalangle (g_{18}; \varepsilon_{18}) = \alpha$

$$\sin\alpha = \sin \sphericalangle (\vec{n}, \vec{a}_{g18}) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}\right|} = \frac{108}{7 \cdot \sqrt{504}} \approx 0{,}6872 \qquad \underline{\underline{\alpha \approx 43{,}1°}}$$

b) $V_P = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ $\quad A_G \triangleq \Delta E_{18}BF_{18}$

$A_G = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108 \qquad h = 6 \qquad V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 108$

$\underline{\underline{V = 216 \text{ VE}}}$

Abstand F_{18} von ε_{18}

$$d(F_{18}; \varepsilon_{18}) = \left|\frac{6x_{F_{18}} + 3y_{F_{18}} + 2 \cdot z_{F_{18}} - 72}{7}\right| = \frac{6 \cdot 6 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 18 - 72}{7} = \underline{\underline{\frac{36}{7}}}$$

c) Ebene ε_t durch B, E_t, G_t:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_t = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 12 \end{pmatrix}$$

ε_t: $2tx + ty + 12z = 24t$

$$F(6; 12; t) \quad d(F_t; \varepsilon_t) = 4 = \frac{2t \cdot 6 + 12 \cdot t + 12 \cdot t - 24t}{\sqrt{4t^2 + t^2 + 144}}$$

$$4\sqrt{5t^2 + 144} = 12t$$

$$5t^2 + 144 = 9t^2$$

$$4t^2 = 144$$

$$\underline{\underline{t = 6}} \quad \text{da } t > 0$$

d) g_t durch D und F_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ t \end{pmatrix}$

$g_t \perp \varepsilon_t$; d. h. $\quad \vec{n}_t \,||\, \vec{a}_t$

$$\vec{n}_t = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 12 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{t}{3} \\ \lambda_2 = \frac{t}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

$$\lambda_3 = \frac{t}{12} \qquad \Rightarrow g_t \perp \varepsilon_t \text{ unmöglich!}$$

e) s_t Schnittgerade von ε_t mit x-y-Ebene

$$z = 0 \Rightarrow 2tx + ty = 24t \quad |: t \neq 0$$

$$2x + y = 24$$

$$\underline{\underline{y = -2x + 24}}$$

Schnittpunkt mit Parabel $\quad y = x^2 - 16x + 64$

$$-2x + 24 = x^2 - 16x + 64$$

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

$x_1 = 10 \qquad y_1 = 4$

$x_2 = 4 \qquad y_2 = 16$

$\underline{\underline{S_1(10; 4) \qquad S_2(4; 16)}}$

Aufgabe 2.2

Turm aus Würfel mit aufgesetzter gerader Pyramide
Kantenlänge Würfel 8,00 m; Pyramidenhöhe 7,00 m

a) ε_1 durch E(4; –4; 8); F(4; 4; 8); K(0; 0; 15)

$$\left.\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-4\\8\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}-4\\4\\7\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix}7\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_1:\ 7x + 4z = 60}}$$

ε_z durch F(4; 4; 8); G(–4; 4; 8); K(0; 0; 15)

$$\left.\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-4\\-4\\7\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\7\\4\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_2:\ 7y + 4z = 60}}$$

b) Schnittwinkel: $\cos \sphericalangle (\varepsilon_1; \varepsilon_2) = \cos \sphericalangle (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

$$= \frac{16}{\sqrt{49+36}\cdot\sqrt{49+16}} = \frac{16}{65}$$

$$\underline{\underline{\alpha \approx 75{,}75°}}$$

c) $\overline{FK} = \sqrt{16+16+49} = 9$ $\qquad$ $\underline{\underline{\overline{FK} = 9{,}00\text{ m}}}$

g durch FK: $\left.\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-4\\7\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \vec{a}_g = \begin{pmatrix}-4\\-4\\7\end{pmatrix}$

$$\vec{n}_{\text{x-y-Ebene}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Neigungswinkel: $\sin \sphericalangle (\vec{n}_{\text{x-y-Ebene}}; \vec{a}_g) = \frac{7}{1 - \sqrt{16+16+49}} = \frac{7}{9}$

$$\underline{\underline{a \approx 51{,}06°}}$$

d) S(0; 0; 18) $\qquad$ T(0; y_t; 0); T'(0; y_t; 1,6)

L: Mittelpunkt von $\overline{FG}$; L(0; 4; 8)

Gerade h durch S und L $\qquad$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-10\end{pmatrix}$

T' $\in$ h: $\begin{pmatrix}0\\y_t\\1,6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\-10\end{pmatrix}$

$y_t = 4t$

$1{,}6 = 18 - 10t \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}64$

$$\underline{\underline{y_t = 4 \cdot 1{,}64 = 6{,}56}}$$

y_t muß mindestens 6,56 m betragen.

e) Mittelpunkt M von EH $\quad M(0; -4; 8)$
Balkenlänge entspricht dem Abstand des Punktes M von der Ebene durch FGK (ε_2 aus a))

$$\varepsilon_2\text{: } 7y + 4z = 60$$

$$d(M, \varepsilon_2) = \left|\frac{7 \cdot (-4) + 4 \cdot 8 - 60}{\sqrt{49 + 16}}\right| = \frac{56}{\sqrt{65}} \approx 6{,}95$$

$\underline{\underline{\text{Balkenlänge } 6{,}95\text{ m}}}$

Aufgabe 2.3

a) $P(A) = \frac{178 + 632 + 370}{2588} = \frac{1180}{2588} \approx 0{,}4559$

$P(B) = \frac{632}{2588} \approx 0{,}2442$

$P(C) = \frac{214 + 441}{2588} = \frac{655}{2588} \approx 0{,}2531$

$P(D) = \frac{753}{2588} \approx 0{,}2909$

b) $P(E) = \frac{753 + 632}{2588} = \frac{1385}{2588} \approx 0{,}5352$

$P(A \cap E) = \frac{632}{2588} = P(B) \approx 0{,}2442$

$P(A) \cdot P(E) \approx 0{,}4559 \cdot 0{,}5352 \approx 0{,}24398 \underline{\underline{\neq P(A \cap E)}}$

$\Rightarrow$ Ereignisse A und E abhängig

| Bei anderer Rundung ergibt sich aber
$P(A) \cdot P(E) \approx P(A \cap E) \quad \Rightarrow$ linear unabhängig |

c) Binomialverteilung
$p = 0{,}7 \qquad n = 15 \qquad k = 4$
$\underline{\underline{P(F)}} = b(4; 15; 0{,}7) = \binom{15}{4} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^{11} \underline{\underline{\approx 0{,}00058}}$
G: mehr als 21 Flaschen werden nicht zurückgegeben
$p = 0{,}3 \qquad n = 100$

$$\underline{\underline{P(G)}} = 1 - \sum_{i=0}^{21} \binom{100}{i} 0{,}3^i \cdot 0{,}7^{100-i} \approx 1 - 0{,}02883$$
$$\underline{\underline{\approx 0{,}97117}}$$

d) H_k: Weniger als k Stück von 100 werden zurückgegeben

$$\sum_{i=0}^{k-1} b(i; 100; 0{,}7) \leq 0{,}05$$
$$k - 1 \leq 61$$
$$\underline{\underline{k \leq 62}}$$

e) J: genau 5 l Milch, d. h. 4 x Rückgabe, 1 x keine Rückgabe

$P(J) = 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}07203$

K: mindestens 5 l, d. h. 4 x Rückgabe

$P(K) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$

f) L: mindestens 10 l, d. h. 9 x Rückgabe

$$\begin{aligned} P(L) &= p^9 > 0{,}85 \\ &= p > \sqrt[9]{0{,}85} \\ &= p > 0{,}9821 \end{aligned}$$

Mathematik

Abiturprüfung Leistungskurs

1995/96

Gymnasium · Thüringen

Aufgabe 1.1:

Gegeben sind Funktionen f_a und g durch
$y = f_a(x) = a \cdot \sin x$ und $y = g(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R};\ 0 \le x \le 4;\ a \in \mathbb{R};\ a > 0)$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2 der Graphen von f_1 und g!
Ermitteln Sie den Schnittwinkel, unter dem sich die Tangenten an die Graphen von f_1 und g in S_1 schneiden!
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und g in ein und dasselbe Koordinatensystem!

b) Auf der x-Achse existiert ein Punkt $P_o\,(x_0;\ 0)$ mit $0 \le x_0 \le 4$ so, daß die Strecken $\overline{P_0S_1}$ und $\overline{P_0S_2}$ zueinander orthogonal sind.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_o!

c) Der Graph von g, die x-Achse und die y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Der Graph von f_1 teilt diese Fläche in zwei Teilflächen. Beweisen Sie, daß die Inhalte dieser Teilflächen sind wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten!

d) An welcher Stelle x wird die Differenz der Funktionswerte $d_1(x) = f_1(x) - g(x)$ maximal?
Begründen Sie, daß das lokale Maximum auch das globale Maximum ist!
Berechnen Sie diese maximale Differenz!

e) Der Graph der Funktion f_a hat den Wendepunkt $W(\pi;\ 0)$. Die Tangente an den Graphen von f_a in W begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck.
Für welches a beträgt der Umfang dieses Dreiecks 3π Längeneinheiten?

f) Gegeben sind die Funktionen p_a mit $y = p_a(x) = f_a(x) \cdot g(x)$.
Bilden Sie die zweite und vierte Ableitung von p_a, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle geraden Ableitungen gilt:
$y^{(2n)} = p_a^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a \cdot 2^{2n-1} \cdot \sin 2x,\ (n \in \mathbb{N};\ n \ge 1)$!

Aufgabe 1.2:

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{3 - x^2}{2 \cdot e^x}$; $(x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und den Graphen von f auf lokale Extrempunkte!
Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \le x \le 4$!

b) Für welche Funktionswerte c ($c \in \mathbb{R}$) existiert genau ein x ($x \in \mathbb{R}$), so daß gilt:
$f(x) = c = \frac{3 - x^2}{2 \cdot e^x}$?
Bestimmen Sie diese Zahlen c aus den Eigenschaften der Funktion f!

c) Der Graph von f schneidet die x-Achse im Punkt $S_0(x_0; y_0)$, $x_0 > 0$.
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g, die durch S_0 geht und senkrecht auf der Tangente an den Graphen von f in S_0 steht!
Welchen Schnittwinkel bildet die Gerade g mit der x-Achse?

d) Weisen Sie nach, daß $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f ist!
Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und h vollständig begrenzt wird!

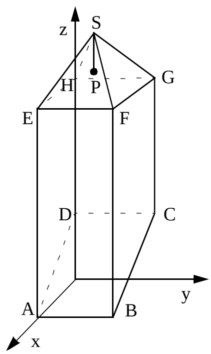
Gegeben sind nun Funktionen $g_{a;\,b}$ durch
$y = g_{a;\,b}(x) = \frac{a - x^2}{b \cdot e^x}$; ($a, b, x \in \mathbb{R}$; $b \neq 0$)

e) Der Punkt $E(-2; e^2)$ ist ein lokaler Extrempunkt des Graphen einer Funktion $g_{a;\,b}$.
Berechnen Sie für diesen Fall die Werte der Parameter a und b!

f) Weisen Sie nach, daß für die n-te Ableitung der Funktion $g_{a;\,b}$ gilt:
$y^{(n)} = g_{a;\,b}^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(x-n)^2 - n - a}{b \cdot e^x}$!
($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$)

Aufgabe 2.1:

An einem Steilhang wird ein Beobachtungsturm errichtet.
Dieser Turm kann als von einer Ebene geschnittener Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide aufgefaßt werden (siehe Skizze).
Die Höhe der aufgesetzten Pyramide beträgt 4 m.
Aus der Bauzeichnung sind die Koordinaten der folgenden Punkte bekannt:
A(4; 0; 0), B(4; 4; 0), D(0; 0; 3), E(4; 0; 10),
F(4; 4; 10), H(0; 0; 10).
(Koordinateneinheit 1 m)
(Skizze nicht maßstäblich)



a) Der Steilhang liegt in einer Ebene, die durch die Punkte A, B, C und D geht. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene auf!

b) Ein Sonnenstrahl, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann, erzeugt auf dem Hang im Punkt S' einen Schatten der Turmspitze S. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes S'!
Unter welchem Winkel trifft der Sonnenstrahl auf dem Hang auf?

c) In der Turmspitze soll ein Pendel so angebracht werden, daß der Pendelkörper P von allen Eckpunkten der Pyramide den gleichen Abstand hat.
Wie lang muß dieses Pendel sein?

d) Die Turmkanten $\overline{AE}$ und $\overline{FS}$ liegen auf den geraden g und h.
Zeigen Sie, daß g und h windschief sind, und berechnen Sie den Abstand dieser Geraden!

Aufgabe 2.2:

Gegeben sind die Punkte A(2; 0; 5), B(3; 1; 5), C(3; 2; 6), D(3; 4; –1) und E(–3; –10; 9).

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene ε_1, die die Punkte A, B und C enthält!

b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene ε_1!

c) In welchem Punkt S durchstößt die Gerade DE die Ebene ε_1?
Berechnen Sie den Winkel zwischen der Geraden DE und der Ebene ε_1!

d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε_2 an, die durch D geht und parallel zu ε_1 verläuft! Ermitteln Sie eine Gleichung einer Ebene ε_3,die durch D geht und orthogonal zu ε_1 ist!

e) Gegeben sind die Ebenen

ε_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

ε_5: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie a, b und c für den Fall, daß die Ebenen ε_4 und ε_5 identisch sind!

Aufgabe 2.3

An einer Schule mit 900 Schülern wird monatlich eine Schülerzeitung herausgegeben. Im Durchschnitt wird diese Zeitung von 80% der Schüler gekauft.

a) In der Redaktion arbeiten 15 Schüler, von denen jeder mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 bei jeder Sitzung fehlt.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
   A: = „Alle Mitglieder der Redaktion sind anwesend“.
   B: = „Es fehlen weniger als ein Drittel der Redakteure“.
   C: = „Bei drei aufeinanderfolgenden Sitzungen fehlt jeweils höchstens ein Redakteur“.

b) Von den Käufern der Aprilausgabe der Schülerzeitung waren 75 % Mädchen, von den Nichtkäufern nur 30 %.
   Wie viele Mädchen müßten nach diesen Angaben an diese Schule gehen?
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Junge die Aprilausgabe der Schülerzeitung gekauft hat?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der verkauften Zeitungen um höchstens 10 vom Erwartungswert abweicht!
   Monatlich stehen 730 Exemplare der Schülerzeitung zum Verkauf zur Verfügung.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle Zeitungen eines Jahrgangs verkauft?

d) Beim Drucken treten erfahrungsgemäß bei 5 % der Zeitungen Fehler auf, so daß diese Zeitungen nicht verkauft werden können.
   Wie viele Zeitungen müssen mindestens gedruckt werden, so daß mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 730 Exemplare zum Verkauf geeignet sind?

Aufgabe 1.1

$y = f_a(x) = a\sin x \qquad y = g(x) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R};\ 0 \le x \le 4;\ a \in \mathbb{R};\ a > 0)$

a) $f_1(x) = \sin x$

$\sin x_s = \cos x_s$

$\tan x_s = 1$

$x_{s1} = \frac{\pi}{4} \qquad x_{s2} = \frac{5}{4}\pi$

$\underline{\underline{S_1(\frac{\pi}{4};\ \frac{1}{2}\sqrt{2})}} \qquad \underline{\underline{S_2(\frac{5}{4}\pi;\ -\frac{1}{2}\sqrt{2})}}$

Schnittwinkel:

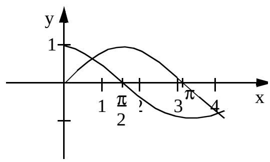
$f_1'(x) = \cos x \qquad g'(x) = -\sin x$

$f_1'\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad g'\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$m_1 = \tan\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad m_2 = \tan\alpha_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha_1 \approx 35{,}3° \qquad \alpha_2 \approx 144{,}7°$

$\underline{\underline{\alpha_s \approx 70{,}6°}}$



b) $P_o(x_0;\ 0) \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$P_0S_1:\ m_1 = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4} - x_0} \qquad P_0S_2:\ m_2 = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{5}{4}\pi - x_0}$

$\overline{P_0S_1} \perp \overline{P_0S_2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$

also $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4} - x_0} = \dfrac{\frac{5}{4}\pi - x_0}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

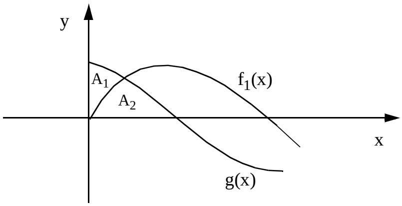
$x_0^2 - \frac{6}{4}\pi\, x_0 + \frac{5}{16}\pi^2 - \frac{1}{2} = 0$

$x_{01} = \frac{3}{4}\pi + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}} > 4$ entfällt, da $\notin$ Db

$x_{02} = \frac{3}{4}\pi - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}} \approx 0{,}63$

$\underline{\underline{P_o(\frac{3}{4}\pi - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}};\ 0)}}$

c)



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [g(x) - f(x)]\,dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) $d_1(x) = f_1(x) - g(x) = \sin x - \cos x$

$d_1'(x) = \cos x + \sin x$

$d_1'(x_E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x_E = -\cos x_E$

$\tan x_E = -1$

$\underline{\underline{x_E = \frac{3}{4}\pi}}$

$d_1''(x) = -\sin x + \cos x$

$d_1''(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2} < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum $\quad \underline{\underline{d_1(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}}}$

Da d_1 wegen f_1 u. g. ebenfalls stetig ist und im Intervall nur eine lokale Maximumstelle vorliegt, ist sie gleichzeitig die globale Maximumstelle, $\sqrt{2}$ ist also globales Maximum.

e) $f_a(x) = a \sin x \qquad W(\pi; 0)$

$f_a'(x) = a \cos x \qquad f_a'(\pi) = -a = m_t$

Tangentengleichung: $y = -ax + a\pi$

Dreiecksseiten: $a \cdot \pi$; π und $c = \sqrt{a^2\pi^2 + \pi^2} = \pi\sqrt{1 + a^2}$

$u = a \cdot \pi + \pi + \pi\sqrt{1 + a^2} = 3\pi$

$\sqrt{1 + a^2} = 2 - a$

$4a = 3$

$\underline{\underline{a = \frac{3}{4}}}$

f) $p_a(x) = a \sin x \cos x$

$p_a'(x) = a\,[\cos^2 x - \sin^2 x]$

$\underline{\underline{p_a''(x)}} = a\,[2\cos x\,(-\sin x) - 2\sin x \cos x] = \underline{\underline{-2a \sin 2x}}$

$p_a'''(x) = -4a \cos 2x$

$p_a^{(4)}(x) = 8a \sin 2x$

$y^{(2n)} = p_a^{(2n)}(x) = (-1)^n a \cdot 2^{2n-1} \sin 2x \quad n \in \mathbb{N};\ n \geq 1)$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 1$

$$y^{(2)} = (-1)^1 \cdot a \cdot 2^1 \cdot \sin 2x = -2a \sin 2x$$
$$= p_a''(x) \text{ s. o.}$$

Induktionsvoraussetzung: $n = k$ $\quad p_a^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot a \cdot 2^{2k-1} \sin 2x$

Induktionsbehauptung: $n = k + 1$ $\quad p_a^{(2k+2)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot a \cdot 2^{2k+1} \sin 2x$

Induktionsbeweis: $p_a^{(2k+2)}(x) = [p_a^{(2k)}(x)]'' = [(-1)^k \cdot a \cdot 2^{2k-1} \cdot \cos 2x \cdot 2]'$

$$= [(-1)^k \cdot a \cdot 2^{2k} \cos 2x]'$$
$$= [(-1)^k \cdot a \cdot 2^{2k} \cdot (-1) \cdot \sin 2x \cdot 2$$
$$\underline{\underline{= (-1)^{k+1} - a \cdot 2^{2k+1} \sin 2x}}$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Schnittpunkte; Schnittwinkel; Skizze	5 BE
b)	Vektoren;	4 BE
c)	Ansatz; Nachweis	5 BE
d)	Ableitungen; Extremstelle; Nachweis; maximale Differenz	5 BE
e)	Anstieg; Tangente; Ergebnis	5 BE
f)	Ableitungen; Induktionsanfang; Induktionsvoraussetzung; Induktionsbehauptung; Induktionsbeweis	6 BE
		30 BE

Aufgabe 1.2

$y = f(x) = \frac{3 - x^2}{2e^x} \quad x \in \mathbb{R}$

a) Nullstellen: $\underline{\underline{x_{01} = \sqrt{3}\,;\ x_{02} = -\sqrt{3}}}\,;\ 2e^x \neq 0$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2e^x}$

$f''(x) = \frac{-x^2 + 4x + 1}{2e^x}$

$f'(x_E) = 0 \qquad x_E^2 - 2x_E - 3 = 0$

$x_{E1} = -1$

$x_{E2} = 3$

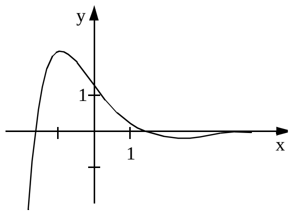
$f''(-1) = \frac{-4}{2e^{-1}} < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum $f(-1) = e$

$f''(3) = \frac{4}{2e^3} > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum $f(3) = -\frac{3}{e^3}$

$\underline{\underline{\text{Max}(-1;\ e) \qquad \text{Min}(3;\ -\tfrac{3}{e^3})}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3 - x^2}{2e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x}{2e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2}{2e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3 - x^2}{2e^x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ Wertebereich: $\underline{\underline{y \in \mathbb{R};\ y \leq e}}$

Max(–1; e)



b) Für alle $\underline{\underline{c < \frac{3}{e^3}}}$, da bei $(3;\ -\frac{3}{e^3})$ lokales Minimum und bei $\underline{\underline{c = e}}$

c) $S_0(\sqrt{3};\ 0) \quad f'(\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}}} = m_t \quad m_g = -\frac{1}{m_t}$, da $g \perp t$

$m_g = \frac{e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$

$g:\ y - y_o = m_g(x - x_o)$

$\underline{\underline{y = \frac{e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\,x - e^{\sqrt{3}}}}$

$\underline{\underline{m_g = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 72{,}96°}}$

d) $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)e^{-x}$

$F'(x) = (x + 1)\, e^{-x} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)e^{-x}(-1)$

$= \dfrac{x + 1 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}}{e^x} = \dfrac{3 - x^2}{2e^x} = f(x)$

F(x) ist Stammfunktion f(x)

$h(x) = e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$

$h(x_s) = f(x_s)$

$\dfrac{1}{e^{x_s}} = \dfrac{3 - x_s^{\,2}}{2e^{x_s}}$

$\underline{\underline{x_{s1,\,2} = \pm 1}}$

$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - h(x)]\, dx$

$= \left[\left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + e^{-x}\right]_{-1}^{1}$

$= \left[\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{2}{e}}}$

e) $y = g_{a,\,b}(x) = \dfrac{a - x^2}{be^x} \qquad a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 \qquad E(-2;\, e^2)$

$g_{a,\,b}'(x) = \dfrac{-2x - a + x^2}{be^x}$

$x_E^{\,2} - 2x_E - a = 0$

$x_{E1,\,2} = 1 \pm \sqrt{1 + a} = -2$

$\underline{\underline{a = 8}}$

$g(-2) = \dfrac{8 - 4}{b \cdot e^{x-2}} = e^2$

$\dfrac{4}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{b = 4}}$

f) $y^{(n)} = g_{a,\,b}^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\, \dfrac{(x - n)^2 - n - a}{be^x}$

Induktionsanfang: $n = 1$ $\qquad g_{a,\,b}^{(1)}(x) = (-1)^2\, \dfrac{(x - 1)^2 - 1 - a}{be^x} \qquad \dfrac{x^2 - 2x - a}{be^x}$

$= f'(x)$ siehe e)

Induktionsvoraussetzung: $n = k \quad g^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\, \dfrac{(x - k)^2 - k - a}{b \cdot e^x}$

Induktionsbehauptung: $n = k + 1$

$g^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+2}\, \dfrac{[x - (k + 1)]^2 - (k + 1) - a}{b \cdot e^x}$

Induktionsbeweis:

$g^{(k+1)}{}'(x) = [g^{(k)}(x)]' = (-1)^{k+1}\, \dfrac{2(x - k) \cdot be^x - [(x - k)^2 - k - a]be^x}{(b \cdot e^x)^2}$

$= (-1)^{k+1}\, \dfrac{2x - 2k - x^2 + 2kx - k^2 + k + a}{be^x}$

$= (-1)^{k+2}\, \dfrac{x^2 - 2x(k + 1) + (k + 1)^2 - (k + 1) - a}{b \cdot e^x}$

$= (-1)^{k+2}\, \dfrac{[x - (k + 1)]^2 - (k + 1) - a}{b \cdot e^x}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstellen; Ableitungen; Nachweise; lokaler Maximumpunkt; lokaler Minimumpunkt; Wertebereiche; Skizze	8 BE
b)	Ergebnis	2 BE
c)	Ansatz; Geradengleichung; Schnittwinkel	4 BE
d)	Nachweis; Ansatz für Fläche; Flächeninhalt	6 BE
e)	Ableitung; Parameterwerte	4 BE
f)	Induktionsanfang; Induktionsvoraussetzung;Induktionsbehauptung; Induktionsbeweis	6 BE
		30 BE

Aufgabe 2.1

A(4; 0; 0) B(4; 4; 0) D(0; 0; 3) E(4; 0; 10) F(4; 4; 10) H(0; 0; 10)

a) $\underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}}$ $r, s \in \mathbb{R}$ bzw. $\underline{\underline{3x + 4z = 12}}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ s durch S mit $\vec{a}$ S(2; 2; 14)

s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

Schnittpunkt von s mit E $\rightarrow$ S'

$3(2 - 2t) + 4\,(14 - t) = 12$

$t = 5$

S': $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ S'(−8; 7; 9)

α: Winkel zwischen s und E

$\sin\alpha = \left| \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ $\underline{\underline{\alpha \approx 54{,}73°}}$

c) S(2; 2; 14)

P über Mittelpunkt von $\overline{FH}$: $P(2; 2; z_p)$

$\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ z_p - 10 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_p - 14 \end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{EP}\right| = \left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{4 + 4(z_p - 10)^2} = z_p - 14$$

$$8 + (z_p - 10)^2 = (z_p - 14)^2$$

$$z_p = 11 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\text{ Pendellänge 3 m}}}$$

d) $g = AE\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ g \nparallel h$

$h = FS\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\10\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$

$g \cap h\colon\ \begin{matrix}4 = 4 - 2t_2\\ 0 = 4 - 2t_2\end{matrix}$ ↯ g und h sind windschief

$d = \dfrac{\left|(\vec{x}_0 - \vec{x}_1)\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$ mit $\vec{n} \perp g$ und $\vec{n} \perp h$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}4\\4\\10\end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad d = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\-4\\-10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Ebenengleichung	1 BE
b)	Koordinaten von S(2; 2; 14) und S'(–8; 7; 9); Geradengleichung; Ansatz; Normalenvektor der Ebene $\vec{n}$; Winkel α	6 BE
c)	P(2; 2; z_p); Ansatz; z_p	4 BE
d)	Geradengleichungen; Nachweis; Normalenvektor; Abstand	4 BE
		15 BE

Aufgabe 2.2

A(2; 0; 5) B(3; 1; 5) C(3; 2; 6) D(3; 4; –1) E(–3; –10; 9)

a) $\varepsilon_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R} \qquad$ bzw. $x - y + z = 7$

b) Hessesche Normalform von ε_1: $\dfrac{x - y + z - 7}{\sqrt{3}} = 0$

$$d = \left|\frac{x_D - y_D + z_D - 7}{\sqrt{3}}\right| = \frac{9}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{3\sqrt{3}}}$$

c) DE: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -14 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \quad t, t' \in \mathbb{R}$

$DE \cap \varepsilon_1 \quad 3 + 3t' - 4 - 7t' - 1 - 5t' = 7$

$t' = 1$

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S(0; -3; 4)}}$

α: Winkel zwischen DE, ε_1

$\sin\alpha = \left| \dfrac{\overrightarrow{n_{\varepsilon_1}} \cdot \vec{a}}{\left|\overrightarrow{n_{\varepsilon_1}}\right| \cdot |\vec{a}|} \right| \quad$ mit $\overrightarrow{n_{\varepsilon_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sin\alpha = \left| \dfrac{3 \cdot 1 + 7(-1) - 5 \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9 + 49 + 25}} \right| = \dfrac{9}{\sqrt{3}\sqrt{83}} \qquad \underline{\underline{\alpha \approx 34{,}77°}}$

d) ε_2: $x - y + z = 3 - 4 - 1 = -2 \qquad \underline{\underline{x - y + z = -2}}$

ε_3: z. B. $x + 2y + z = 3 + 8 - 1 = 10 \qquad \underline{\underline{x + 2y + z = 10}}$

(unendlich viele Lösungen möglich)

e) ε_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_5$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{\varepsilon_4}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{\varepsilon_5}} = \begin{pmatrix} -1 \\ c - b \\ 2b - c \end{pmatrix}$

$\varepsilon_4 \equiv \varepsilon_5$, wenn $\overrightarrow{n_{\varepsilon_5}} = \lambda\, \overrightarrow{n_{\varepsilon_4}}$ und $(2; 1; 5) \in \varepsilon_4$

$\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ c - b \\ 2b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$

$\left.\begin{aligned} 2(c - b) &= 1 \\ 2(2b - c) &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c &= 2 \\ \underline{\underline{b}} &\underline{\underline{= \tfrac{3}{2}}} \end{aligned}$

$-2x + y + 2z = -4 + 1 + 10 = 7$ also

$-2a + 3 + 2 = 7$

$a = -1$

Bewertungsvorschlag:

a)	Ebenengleichung	1 BE
b)	Ansatz für Normalenvektor; Normalenvektor $\vec{n}$; Abstand	3 BE
c)	Gleichung der Geraden DE; Schnittpunkt S(0; –3; 4); Ansatz; Winkel α	4 BE

d) Ebenengleichung von ε_2; Lösungsidee für Gleichung von ε_3;
Ebenengleichung von ε_3 3 BE

e) Normalenvektor von ε_4; Ansatz zur Berechnung von b und c 4 BE

15 BE

Aufgabe 2.3

a) n = 15 Wahrscheinlichkeit für Fehlen p = 0,1

Binomialverteilung

A: k = 0 $P(A) = 0{,}9^{15} = \underline{\underline{0{,}205}}$

B: k = 0, 1, 2, 3, 4 $B(4; 15; 0{,}1) = \underline{\underline{0{,}98728}}$ (nach Tabelle)

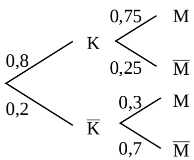
C: k = 0,1 $B(1; 15; 0{,}1) = 0{,}54904$

$\Rightarrow \quad P(C) = 0{,}54904^3 = \underline{\underline{0{,}16550}}$

b)

K: Käufer

M: Mädchen



$P(M) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}3$

$= 0{,}66$

d. h. $\underline{\underline{\text{594 Mädchen}}}$

$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 0{,}34$

$$P_{\overline{M}}(K) = \frac{P(K \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}25}{0{,}34} \approx \underline{\underline{0{,}588}}$$

c) $E(X) = 900 \cdot 0{,}8 = 720$ $V(x) = n \cdot p\,(1-p) = 144$ $\sigma = 12$

$$P(710 \le X \le 730) \approx \Phi\left(\frac{730 - 720 + 0{,}5}{12}\right) - \Phi\left(\frac{710 - 720 - 0{,}5}{12}\right)$$

$$= \Phi(0{,}875) - \Phi(-0{,}875) \approx 0{,}6157$$

$$P(X \ge 730) = 1 - P(X \le 729) \approx 1 - \Phi\left(\frac{729 - 720 + 0{,}5}{12}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0{,}79)$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}21476}}$$

Zeitungen eines Jahrgang, d. h. 12 Monate

J: alle Zeitungen eines Jahrgangs werden verkauft

$\underline{\underline{P(J) \approx 0{,}21476^{12} \approx 9 \cdot 10^{-9}}}$

d) $P(X \geq 730) = 1 - P(X \leq 729) \geq 0{,}95$

$p = 0{,}95 \qquad 1 - \Phi(\underbrace{\frac{729 - 0{,}95n + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}}}_{z}) \geq 0{,}95$

$$0{,}05 \geq \Phi(z)$$

$\Phi(-1{,}65) = 0{,}05$ (Tabelle)

Also muß gelten $z = \frac{729 - 0{,}95n + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \leq -1{,}65$ (*)

bzw. $n^2 - 1\,535{,}933n + 589\,662{,}327 \geq 0$

(Das Relationszeichen kehrt sich beim Quadrieren um!)

$n \leq 757{,}48$ bzw. $n \geq 778{,}45$

Für $n = 757{,}48$ ist Ungleichung * nicht erfüllt; d. h. es müssen mindestens 779 Zeitungen gedruckt werden.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ereignisse A, B und C	4 BE
b)	Ergebnis P(M); Ergebnis $P_j(K)$	3 BE
c)	Wahrscheinlichkeiten	4 BE
d)	Substitution	4 BE
		15 BE

Mathematik

Abiturprüfung
Leistungskurs

1995/96

Gymnasium · Mecklenburg - Vorpommern

Plichtaufgaben Leistungskurs A

Aufgabe 1: Folgen

a) Eine Folge (a_n) ist gegeben durch $a_n = \frac{3n}{2n-5}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
Berechnen Sie die Glieder a_1 bis a_6!
Bestimmen Sie den Grenzwert g der Folge (a_n)!
Für welche Glieder ist der Abstand von g kleiner als $\frac{1}{1000}$?

b) Für eine geometrische Folge (b_n) gelten $b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n$ und $b_1 = 81$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
Wie groß ist die Summe der ersten 25 Glieder dieser Folge?
Berechnen Sie den Grenzwert der zu (b_n) gehörigen Partialsummenfolge!

Aufgabe 2: Rationale Funktionen

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit
$y = f_a(x) = \frac{(x-a)^2}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

a) Untersuchen Sie die Graphen von f_a auf gemeinsame Punkte, und weisen Sie die Art der Extrema nach!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten der gesuchten Punkte, und weisen Sie die Art der Extrema nach!
In welchen Punkten schneiden die Graphen von f_a eine der beiden Asymptoten?

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_{-1} und f_3 im Intervall $-5 \leq x \leq 6$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

Aufgabe 3: Geometrie im Raum

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5 \mid 2 \mid -1)$, $B(-1 \mid 6 \mid -1)$, $C(-1 \mid 2 \mid 2)$ und $D(2 \mid 0 \mid 2)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Trapezes sind!
Weisen Sie nach, daß kein Parallelogramm vorliegt!

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel und die Koordinaten des Schnittpunktes der Diagonalen des Trapezes ABCD!

c) Zwei Seiten des Trapezes durchstoßen die x-y-Ebene.
Berechnen Sie die Koordinaten eines der beiden Durchstoßpunkte!

d) Prüfen Sie, ob der Punkt $Q(7 \mid 5 \mid 4)$ auf der Geraden liegt, die senkrecht auf dem Trapez ABCD steht und durch den Punkt A verläuft!

Aufgabe 4: Stochastik

Einem Elektrogroßhändler wird der Kauf einer größeren Menge von Halbleiterdioden zu günstigen Konditionen angeboten. Die Auslieferung der Dioden erfolgt in Kartons zu je 500 Stück.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Stichprobe von 5 Dioden genau 2 defekt sind, wenn der Anteil der defekten Dioden in dem ausgewählten Karton 2 % beträgt?

b) Unter den Kartons ist einer, in dem 25 % der Dioden defekt sind. Diesem Karton wird zur Kontrolle eine Stichprobe von 20 Dioden entnommen.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß aus dieser Stichprobe keine, genau drei, maximal drei Dioden defekt sind!
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei dieser Stichprobe mehr als fünf defekte Bauelemente zu erhalten?
Für welche Ausschußquote wäre die Wahrscheinlichkeit, aus einer Stichprobe vom Umfang 20 höchstens eine defekte Diode auszusondern, etwa 0,025?

c) Ein anderer Hersteller bietet gleichartige Dioden an. Er garantiert eine maximale Ausschu0quote von 10 %. Der Händler prüft wieder 20 (zufällig ausgewählte) Dioden aus der Gesamtsendung.
Könnte man dem Hersteller glauben, wenn mehr als drei der geprüften Dioden defekt sind?
Begründen Sie!
Binomialverteilung B(n; p; k) für n = 20

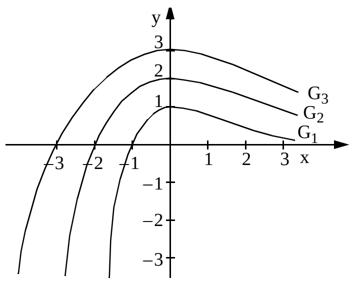
		p										
n	**k**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**	
20	**0**	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	**20**
	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000	**19**
	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002	**18**
	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011	**17**
	4	0,0133	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046	**16**
	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148	**15**
	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370	**14**
	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739	**13**
	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201	**12**
	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602	**11**
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762	**10**
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602	**9**
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201	**8**
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739	**7**
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370	**6**
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148	**5**
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046	**4**
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	**3**
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	**2**
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	**1**
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	**0**
n		**0,95**	**0,90**	**0,85**	**0,80**	**0,75**	**0,70**	**0,65**	**0,60**	**0,55**	**0,50**	**k**

Wahlaufgabe 1: Funktionenschar

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a durch die Gleichung

$f_a(x) = (x + a)\, e^{-\frac{x}{a}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a (siehe Bild).



a) Berechnen Sie von G_a die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Extrempunkte!

b) An jeden Graphen G_a werden durch seinen Schnittpunkt P_a mit der x-Achse die

Tangente und die Normale gelegt. Die Normale in P_a ist die Senkrechte zur Tangente in P_a.
Ermitteln Sie die Gleichungen der so entstehenden Tangentenschar t_a und der Normalenschar n_a!
Bestimmen Sie die Größen der Winkel, unter denen die Graphen G_a aller Funktionen f_a die x-Achse schneiden!

c) Der Koordinatenursprung und die Schnittpunkte der Tangenten t_a mit den Koordinatenachsen bilden die Eckpunkte eines Dreiecks, des Tangentendreiecks.
Der Koordinatenursprung und die Schnittpunkte der Normalen na mit den Koordinatenachsen bilden die Eckpunkte eines weiteren Dreiecks, des Normalendreiecks.
Geben Sie die Flächeninhalte dieser Dreiecke in Abhängigkeit von a an!
Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte von Tangenten- und Normalendreieck in Abhängigkeit von a!

d) Zeigen Sie, daß $F_a(x) = (-2a^2 - ax)\, e^{-\frac{x}{a}}$ Gleichung einer Stammfunktionenschar von f_a ist!
Die Koordinatenachsen und jeder Graph der Kurvenschar G_a begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a!

Wahlaufgabe 2: Analysis

Gegeben sind Funktionen f_m und g_m mit den Gleichungen

$$f_m(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(mx+1)^3}\,,\ x \in \mathbb{R},\ x \geq -\frac{1}{m}\,,\ m \in \mathbb{R},\ m > 0$$

und $g_m(x) = mx + 1,\ x \in \mathbb{R}$

a) Zeigen Sie, daß die Punkte $P(-\frac{1}{m} \mid 0)$ und $Q(\frac{8}{m} \mid 9)$ die einzigen gemeinsamen Punkte der Graphen von f_m und g_m sind!

b) Die Graphen der beiden Funktionen f_2 und g_2 schließen eine Fläche A_2 um die x-Achse entsteht!
Skizzieren Sie die Fläche A_2!
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche A_2!

c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei der Rotation der Fläche A_2 um die x-Achse!

d) Berechnen Sie den Wert von m, für den eine der Funktionen f_m in Q den Anstieg 6 hat!

Wie groß ist für den Wert von m der Schnittwinkel zwischen den Graphen von f_m und g_m an der Stelle $\frac{8}{m}$?

Wahlaufgabe 3: Geometrie im Raum

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3 \mid 0 \mid 2)$, $B(4 \mid 2 \mid 0)$, und $D(-1 \mid 4 \mid 4)$ gegeben. Sie bestimmen eine Ebene ε.
Ferner werden die Punkte $P(9{,}5 \mid 7 \mid 10)$ und $Q(-5 \mid 1 \mid -4)$ betrachtet.

a) Zeigen Sie, daß A, B, D Eckpunkte eines Rechtecks sein können!
Bestimmen Sie die Koordinaten des fehlenden Punktes C!

b) Geben Sie für die Ebene ε eine parameterfreie Gleichung an!
Die Ebene ε zerlegt den Raum in zwei Halbräume.
Zeigen Sie rechnerisch, daß P und Q bzgl. ε in verschiedenen Halbräumen liegen!
Untersuchen Sie, ob die Gerade durch P und Q senkrecht auf ε steht!

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P' von P bezüglich der Spiegelung an ε!

d) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3 \mid 0 \mid 2)$, $B_b(4 \mid b \mid 0)$, $D_d(-1 \mid 4 \mid d)$ gegeben.
Für welche Werte der Parameter b bzw. d sind die Vektoren $\overrightarrow{AB_b} \perp \overrightarrow{AD_d}$ linear abhängig?
Geben Sie eine Bedingung dafür an, daß $\overrightarrow{AB_b} \perp \overrightarrow{AD_d}$!

Pflichtaufgaben wie Leistungskurs A

Wahlaufgabe 1: Ebene Geometrie/Extremwertaufgabe

a) Gegeben sind die Kreise
k_1 mit dem Mittelpunkt $M_1(0 \mid 0)$ und dem Radius $r_1 = 5$ und
k_2 mit der Gleichung $x^2 + 6x + y^2 - 12y + 5 = 0$.
Berechnen Sie den Mittelpunkt M_2 und den r_2 des Kreises k_2!
Zeichnen Sie beide Kreise in ein und dasselbe kartesische Koordinatensystem!
Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Kreise k_1 und k_2!
Berechnen Sie die Länge der Sehne $\overline{S_1S_2}$!
Zeigen Sie rechnerisch, daß die Gerade durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 senkrecht auf der Sehne $\overline{S_1S_2}$ steht!

b) Durch die Gleichung $y = f(x) = \sqrt{3(x-1)}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$ ist der Graph G der Funktion f gegeben.
Berechnen Sie den Schnittpunkt S_3 und die Größe des Schnittwinkels α von k_1 und G!
Die Gleichung der Geraden durch die Punkte S_1 und S_2 bestimmt eine Funktion $y = g(x)$.
Für jede Parallele zur y-Achse, die die Graphen der Funktion von f und g in je einem Punkt schneidet, stellt $h(x) = g(x) - f(x)$ den Abstand der beiden Punkte dar.
Berechnen Sie die Abszisse x_E für den Fall, daß dieser Abstand minimal wird!

Wahlaufgabe 2: Nichtrationale Funktionen

a) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = x(\ln x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf lokale Extrempunkte!
Zeigen Sie, daß der Graph der Funktion f keine Wendepunkte hat!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $0 < x \leq 5$!

b) Der Graph von f, die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ bzw. $x = \sqrt{e}$ und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche! Wenden Sie dabei die partielle Integration an!

c) Gegeben ist die Funktion g durch $y = g(x) = x^2(\ln x^2 - 2)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.
Untersuchen Sie diese Funktion auf Symmetrie und Monotonie!
Skizzieren Sie die Funktion in einem geeigneten Intervall!

Wahlaufgabe 3: Geometrie im Raum

Eine Menge vierseitiger Pyramiden P_r sei durch die gemeinsame Grundfläche ABCD und die Spitzen S_r, die auf einer Geraden g liegen, bestimmt.
Dabei sind $A(4 \mid 0 \mid 0)$, $B(6 \mid 6 \mid 0)$, $C(2 \mid 6 \mid 2)$, $D(0 \mid 0 \mid 2)$ und g durch
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. $S_r(8 - 2r \mid 6 - 4r \mid 7)$, $r \in \mathbb{R}$, gegeben.

a) Stellen Sie die Pyramide $ABCDS_1$ und die Gerade g gemeinsam in einem Koordinatensystem dar!

b) Zeigen Sie, daß die Grundfläche ABCD ein Parallelogramm ist!
M sei der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms ABCD.
Zeigen Sie, daß die Winkel $\sphericalangle\, AMS_1$ und $\sphericalangle\, DMS_1$ Winkel sind
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide P_1!

c) Durch Spiegelung an der Ebene ε, in der A, B, C, D liegen, entsteht ein Punkt S_1' als Bildpunkt von S_1.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1'!

d) Bestimmen Sie r für den Fall, daß die Pyramide P_r „entartet“ ist, was hier bedeuten soll, daß das Volumen der Pyramide die Maßzahl 0 hat!

Aufgabe 1: Folgen

a) $a_1 = -1$ $a_2 = -6$ $a_3 = 9$ $a_4 = 4$ $a_5 = 3$ $a_6 = \frac{18}{7}$

$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = 1{,}5$

$|a_n - g| < \varepsilon$ $\quad \left|\frac{3n}{2n-5} - 1{,}5\right| < \frac{1}{1000}$

$\left|\frac{3n - 1{,}5(2n-5)}{2n-5}\right| < \frac{1}{1000}$

$\left|\frac{7{,}5}{2n-5}\right| < \frac{1}{1000}$ $\quad (2n-5) > 0$ für $n > 2$

$\frac{7{,}5}{2n-5} < \frac{1}{1000}$ $\quad$ (Für $n = 1$; 2 ist der Abstand größer als $\frac{1}{1000}$)

$7\,500 < 2n - 5$

$3\,752{,}5 < n$

Ab $n = 3\,753$ ist der Abstand kleiner.

b) $b_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $\quad b_{25} = 81 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{25} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 242{,}99$ $\quad \lim\limits_{n \to \infty} (b_n) = 243$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1	a)	b)
9 BE	6 BE	3 BE

Aufgabe 2: Rationale Funktionen

a) Punkte mit x-Achse $f_a(x_N) = 0$:

$0 = \frac{(x-a) \cdot 2a}{x^2}$ $\quad x \neq 0$ $\quad \underline{x_n = a \;\; P_N(a; 0)}$

lokale Extrempunkte $f_a'(x_E) = 0$ (notwendige Bedingung)

$f_a''(x_E) \neq 0$ (hinreichende Bedingung)

$f_a'(x) = \frac{(x-a) \cdot 2a}{x^3}$ $\quad f_a'(x_E) = 0 \;\; x_E = a$ da $a \neq 0$

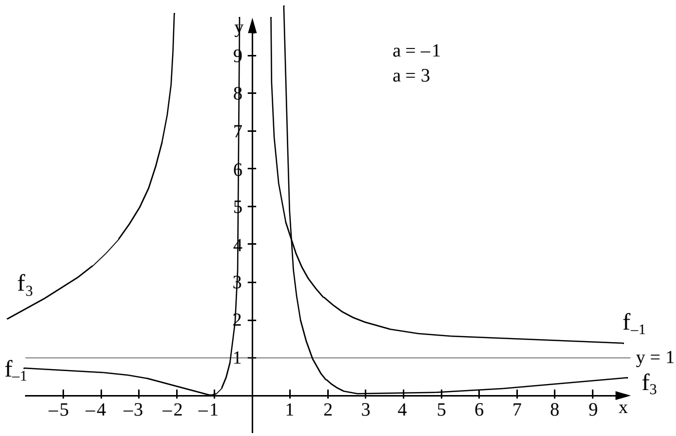
$f_a''(x) = \frac{6a^2 - 4ax}{x^4}$ $\quad f_a''(a) = \frac{2}{a^2} > 0 \;\; \Rightarrow$ lokales Minimum $P_T(a; 0)$

Asymptoten: $x = 0$ $\quad y = 1$

Schnittpunkt nur mit $y = 1$ möglich, $1 = \frac{(x_s - a)^2}{x^2}$ $\quad x_s = \frac{a}{2}$ $\quad \underline{P_s(\frac{a}{2}; 1)}$

da $x \neq 0$

b)



Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2	a)	b)
16 BE	11 BE	5 BE

Aufgabe 3: Geometrie im Raum

a) Trapez: ein Paar parallele Seiten $A(5\,|\,2\,|\,1)$ $B(-1\,|\,6\,|\,-1)$
$C(-\,|\,2\,|\,2)$ $D(2\,|\,0\,|\,2)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{BC}$ $(t_1 = \text{n. d.}, t_2 = -1, t_3 = 0)$ $\Rightarrow$ ABCD ist ein Trapez

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \nparallel \overrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$ kein Parallelogramm
$(t_1 = 0, t_2 = 2, t_3 = 1)$

(nicht zwei parallele Seiten)

Man erkennt an $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$, daß ABCD kein Parallelogramm ist.

Es müßte gelten $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{DC}$.

b) Diagonalen: Gerade g durch A, C und Gerade h durch B, D

$$g: = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\6\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix} \qquad s, r \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt:
$$\begin{aligned} 5 - 6s &= -1 + 3r \\ 2 &= 6 - 6r \\ -1 + 3s &= -1 + 3r \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad r = \tfrac{2}{3},\ s = \tfrac{2}{3} \quad P_s(1\,|\,2\,|\,1)$$

Schnittwinkel: $\cos(\alpha) = \frac{-9}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{54}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 79{,}48°$ (Schnittwinkel $\leq 90°$)

c) Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$

Gerade 1 durch A,D Gerade m durch B, C

$$1: = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix} \qquad m: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\6\\-1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} \qquad l, m \in \mathbb{R}$$

Durchstoßpunkt für Gerade 1:
$$\begin{aligned} x_D &= 5 - 3l \\ y_D &= 2 - 2l \\ 0 &= -1 + 3l \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad l = \tfrac{1}{3} \quad P_D(4\,|\,\tfrac{4}{3}\,|\,0)$$

$$\begin{aligned} x_D &= -1 \\ y_D &= 6 - 4m \\ 0 &= -1 + 3m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad m = \tfrac{1}{3} \quad P_D(-1\,|\,\tfrac{14}{3}\,|\,0)$$

d) Liegt Q auf einer Geraden senkrecht zum Trapez (Ebene ABCD) durch A, so muß gelten:

$\overrightarrow{AQ}$ senkrecht $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow$ Bedingung nicht erfüllt

Q liegt nicht auf dieser Geraden.

Weitere Lösungsansätze (z. B. über den Normalenvektor) sind möglich.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 3	a)	b)	c)	d)
19 BE	4 BE	8 BE	4 BE	3 BE

Aufgabe 4: Stochastik

a) $p_{def} = 0{,}02 \qquad q = 0{,}98 \qquad k = 2$

$P(k = 2) = \binom{5}{2}\, 0{,}02^2\, 0{,}98^3 = 0{,}0037647$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0037647.

b) $p = 0{,}25 \qquad q = 0{,}75 \qquad n = 20$

$P(k = 0) = 0{,}0032$

$P(k = 3) = 0{,}1339$

$P(k \leq 0) = P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2) + P(k = 3)$ (Werte der Tabelle entnehmen!)

$= 0{,}0032 + 0{,}0211 + 0{,}0669 + 0{,}1339$

$\underline{= 0{,}2251}$

Die Wahrscheinlichkeit, unter 20 Dioden keine defekte zu haben, beträgt 0,0032.
Die Wahrscheinlichkeit, unter 20 Dioden genau drei defekte zu bekommen, beträgt 0,1339.
Die Wahrscheinlichkeit, unter 20 Dioden maximal drei defekte zu ziehen, beträgt 0,2251.

$k > 5$

$P(k > 5) = 1 - P(k \leq 5)$

$= 1 - (0{,}0032 + 0{,}0211 + 0{,}0669 + 0{,}1339 + 0{,}1897 + 0{,}2023)$

$\underline{= 0{,}3829}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3829 erhält man mehr als fünf defekte Bauelemente.

$n = 20$

$P(k = 0) + P(k = 1) = 0{,}025$

laut Tabelle für $\underline{\underline{p = 0{,}25}}$ $\qquad P(k = 0) = 0{,}0032 \qquad P(k = 1) = 0{,}0211$

$P(k = 0) + P(k = 1) = 0{,}0243 \approx 0{,}025$

c) $p = 0{,}1 \qquad q = 0{,}09 \qquad n = 20 \quad k > 3$

$p(k > 3) = 1 - P(k \leq 3) = (0{,}1216 + 0{,}2702 + 0{,}2852 + 0{,}1901)$

$\underline{= 0{,}132}$

Die Wahrscheinlichkeit, mehr als drei defekte Dioden in einer Stichprobe von 20 zu haben, beträgt 0,132. Da diese Wahrscheinlichkeit nicht sehr hoch ist, würde ich ihm glauben.
Andererseits kann es bei dieser Wahrscheinlichkeit durchaus eintreten, daß man bei einem Griff mehr als drei defekte Teile entnimmt. Ich würde daher nocheinmal prüfen.
Diese Aufgabe kann auch gelöst werden, indem der Erwartungswert und die Standardabweichung berechnet werden, aber die Aussagekraft der Werte ist auch nicht größer.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 4	a)	b)	c)
10 BE	2 BE	5 BE	3 BE

Wahlaufgaben A

Wahlaufgabe 1: Funktionenschar

a) $f_a(x) = (x + a) \cdot e^{-\frac{x}{a}}$ $x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f_a(x_N) = 0$ $x_N = -a$ $P_N(-a\,|\,0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_a(0) = a$ $P(0\,|\,a)$
Extrempunkte:
notwendige Bedingung $f_a'(x_E) = 0$ hinreichende Bedingung $f_a''(x_E) \neq 0$

$f_a'(x) = e^{-\frac{x}{a}} \cdot (-\frac{x}{a})$ $f_a''(x) = e^{-\frac{x}{a}} \cdot (\frac{x}{a^2} - \frac{1}{a})$

$f_a'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = 0$ $f_a''(0) = -\frac{1}{a} < 0$, da $a > 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

$P_H(0\,|\,a)$

b) $f_a'(-a) = m_t = e$ $P(-a\,|\,0)$
$y_t = ex + ea$ $m_t = \tan\alpha = e$ $\alpha = 69{,}8°$ Schnittwinkel mit x-Achse

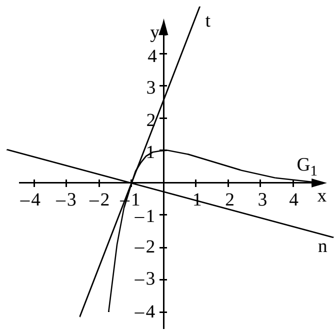
$m_N = -\frac{1}{m_t}$ $m_N = -\frac{1}{e}$ $y_N = -\frac{1}{e}x - \frac{a}{e}$

c)

Dreieck 1 (Tangente): $A = \frac{1}{2}gh$
$g = a$ $h = ea$
$A_1(a) = \frac{1}{2}a^2 e$ FE

Dreieck 2 (Normale): $A = \frac{1}{2}gh$
$g = a$ $h = \frac{e}{a}$
$A_2(a) = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{e}$ FE

$\frac{A_1(a)}{A_2(a)} = e^2$



d) $F_a(x) = (-2a^2 - ax)\,e^{-\frac{x}{a}}$ $F'(x) = f(x)$, wenn $F(x)$ Stammfunktion

$F_a'(x) = -a \cdot e^{-\frac{x}{a}} + ((-2a^2 - ax) \cdot (-\frac{1}{a}) \cdot e^{-\frac{x}{a}})$

$= e^{-\frac{x}{a}} \cdot (-a + (2a + x) = e^{-\frac{x}{a}} \cdot (x + a) = f_a(x) \Rightarrow F_a(x)$ ist Stammfunktion von $f_a(x)$

$A_a = \int_{-a}^{0} f_a(x)\,dx = [(-2a^2 - ax)\,e^{-\frac{x}{a}}]_{-a}^{0} = a^2 \cdot (e - 2) \approx 0{,}72 \cdot a^2$ FE

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe W1	a)	b)	c)	d)
23 BE	7 BE	7 BE	5 BE	4 BE

Wahlaufgabe 2: Analysis

a)

$$\frac{1}{3}\sqrt{(mx_s + 1)^3} = mx_s + 1$$

$$\frac{1}{9}(mx_s + 1)^3 = (mx_s + 1)^2$$

$$(mx_s + 1)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}(mx_s + 1) - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{s1} = -\frac{1}{m}; \qquad x_{s2} = \frac{8}{m}$$

$$y_{s1} = -1 + 1 = 0 \qquad y_{s2} = 8 + 1 = 9$$

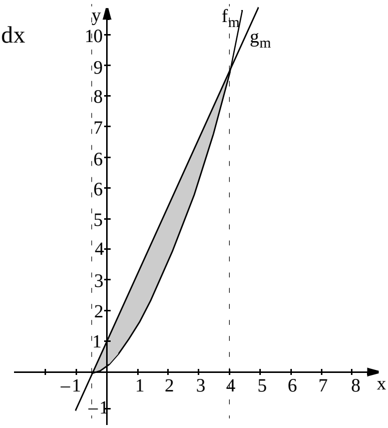
$$P\left(-\frac{1}{m} \mid 0\right) \qquad Q\left(\frac{8}{m} \mid 9\right)$$

b)

$$A_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \left[(2x + 1) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x + 1)^3}\right)\right]dx$$

$$= \left[(x^2 + x) - \left(\frac{1}{15}\sqrt{(2x + 1)^5}\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$$

$$= 4{,}05 \text{ FE}$$

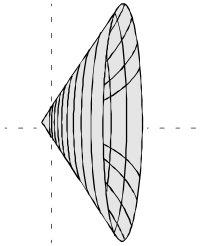


c)

$$V = \Pi\left(\cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{4} (2x+1)^2 dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\right)^2 dx\right)$$

$$= \Pi \cdot \left(\left[\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{4} - \left[\frac{1}{72} \cdot (2x+1)^4\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}\right)$$

$$= 95{,}42 \text{ VE}$$



d) $f_m'(x) = 6 \quad f_m'(x) = \frac{m}{2}\sqrt{mx+1}$

$x = \frac{8}{m} \qquad f_m'\left(\frac{8}{m}\right) = \frac{3m}{2} \qquad 6 = \frac{3m}{2} \quad \Rightarrow \quad m = 4$

Schnittwinkel für m = 4: $\tan\alpha_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 80{,}54°$

$\tan\alpha_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 75{,}96° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 4{,}58°$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe W2	a)	b)	c)	d)
23 BE	3 BE	8 BE	6 BE	6 BE

Wahlaufgabe 3: Geometrie im Raum

a) Rechteck: alle Winkel sind rechte Winkel

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -4 + 8 - 4$ Winkel ABD ist 90°,

d. h. es könnte ein Rechteck sein.

C(0 | 6 | 2) (fehlender Punkt C)

$[\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 + 8 - 4 = 0]$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

b) $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{2x + y + 2z = 10}$

$\overrightarrow{PQ}$ senrecht auf Ebene, wenn gilt $m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -14, 5 \\ -6 \\ -14 \end{pmatrix}$

$m_1 = -7{,}25 \qquad m_2 = -6$

$\Rightarrow$ Gerade durch PQ nicht senkrecht zur Ebene

Untersuchung der Halbräume: P und Q in Ebenengleichung einsetzen; sind die Vorzeichen unterschiedlich, liegen die Punkte in unterschiedlichen Halbräumen

$2 \cdot 9{,}5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 = 46 > 0$ $\qquad$ $2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -17 < 0$

$\Rightarrow$ unterschiedliche Halbräume

c) Spiegelung von P an der Ebene

1. Lotgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9{,}5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Durchstoßpunkt $\quad 2(9{,}5 + 2n) + (7 + n) + 2\,(10 + 2n) = 10$

$n = -4$

$P_D(1{,}5 \mid 3 \mid 2)$

3. $\overrightarrow{PP_D} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

4. Punkt $P'(-6{,}5 \mid -1 \mid -6)$ $\qquad$ $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PP_D}$

d) linear abhängig: $\overrightarrow{AB_b} = k \cdot \overrightarrow{AD_d}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ d-2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $b = -1 \quad k = -\frac{1}{4}$

$d = 10$

$\overrightarrow{AB_b} \cdot \overrightarrow{AD_d} = -4 + 4b + -2(d-2) = 0 \quad d = 2b$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe W3	a)	b)	c)	d)
23 BE	3 BE	10 BE	6 BE	4 BE

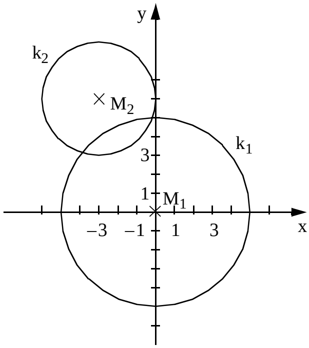
Wahlaufgaben B

Wahlaufgabe 1: Ebene Geometrie/Extremwertaufgabe

a) $x^2 + 6x + y^2 - 12y + 5 = 0$ \ quadratische Ergänzung

$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 40$ $\Rightarrow$ $M_2(-3 \mid 6)$ $r_2 = \sqrt{40}$

Zeichnung:



Schnittpunkte der Kreise K_1 und K_2

K_1: $x^2 + y^2 = 25$ K_2: $x^2 + 6x + y^2 - 12y + 5 = 0$

$x^2 + y^2 - 25 = 0$

$x_s^2 + y_s^2 - 25 = x_s^2 + y_s^2 - 12y_s + 5 \Rightarrow x_s = 2y_s - 5$

$(2y_s - 5) + y^2 = 25$ $\Rightarrow$ $y_1 = 0$ $y_2 = 4$ $\Rightarrow$ $S_1(-5 \mid 0)$ $S_2(3 \mid 4)$

Sehnenlänge: $\overrightarrow{S_1S_2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Gerade g durch M_1M_2 senkrecht auf Gerade h durch S_1S_2:

Anstieg von g: $m_g = 2$ Anstieg von h: $m_h = \frac{1}{2}$ Es gilt: $m_g \cdot m_h = -1$

d. h. Gerade g senkrecht Gerade h

oder:

$\overrightarrow{S_1S_2} = \binom{8}{4}$ $\overrightarrow{M_1M_2} = \binom{-3}{6}$ $\Rightarrow$ $8 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = 0$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{S_1S_2} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$

b) Schnittpunkt f(x) und K_1:

$x_s^2 + \left(\sqrt{2(x_s - 1)}\right)^2 = 25$ $\Rightarrow$ $x_{s1} = 4$ $x_{s2} = -7$ (entfällt nach Probe)

$P_s(4 : 3)$

Schnittwinkel:

Anstieg der Funktion im Punkt P_s

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3(x-1)}}$ $f'(4) = \frac{1}{2} = \tan\alpha_1$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 26{,}565°$

Anstieg der Tangente an den Kreis im Punkt P_s

$m = -\frac{4}{3} = \tan\alpha_2$ $\Rightarrow$ $\alpha_2 = 126{,}86°$

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 100{,}3°$ $\quad \alpha_s = 79{,}7°$ (Schnittwinkel)

Extremwertaufgabe:

Hauptbedingung: $h(x) = g(x) - f(x) \quad \to$ minimal

Nebenbedingung: g(x) ist Gerade durch S_1; S_2 $\quad g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$f(x) = \sqrt{3(x-1)}$

Zielfunktion: $h(x) = (\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}) - \sqrt{3(x-1)}$

$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3(x-1)}}$ $\quad$ notwendige Bedingung: $h'(x_E) = 0 \quad \underline{x_E = 4}$

$h''(x) = \frac{9}{4\sqrt{3(x-1)}}$ $\quad$ hinreichende Bedingung: $h''(x_E) \neq 0$

$h''(4) > 0 \Rightarrow$ minimal

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe W1	a)	b)
23 BE	10 BE	13 BE

Wahlaufgabe 2: Nichtrationale Funktionen

a) Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x_N) = 0$ $\quad$ da $x > 0$ existiert nur $x_N = e$ $\quad P_N(e \mid 0)$

Schnittpunkt mit y-Achse: $y = f(0)$ $\quad$ existiert nicht, da $x > 0$

lokale Extrempunkte: notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x_E) \neq 0$

$f'(x) = \ln(x) \qquad 0 = \ln(x_E) \qquad x_E = 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(1) = 1 > 0 \qquad \Rightarrow$ lokales Minimum (Tiefpunkt bei x = 1)

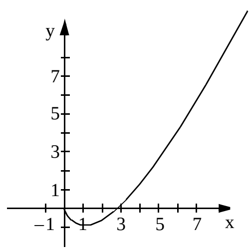
$P_T(1 \mid -1)$

Wendepunkte: notwendige Bedingung: $f''(x_w) = 0$

hinreichende Bedingung: $f'''(x_w) = 0$

$0 = \frac{1}{x_w}$ $\quad x_w$ ist nicht definiert $\quad \Rightarrow$ keine Wendepunkte

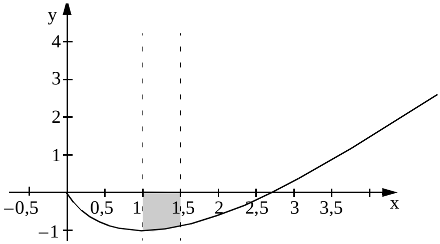
Skizze von $f(x) = x(\ln x - 1)$



(O(0; 0) ist kein Punkt des Graphen von f.)

b)

$A = \left| \int_1^{\sqrt{0}} x \cdot (\ln x - 1)dx \right|$



Stammfunktion mit partieller Integration finden

$f(x) \; = x(\ln x - 1) = x \ln x - x$

$m(x) = x \ln x \qquad u = \ln x \qquad v' = x$

$\qquad\qquad u' = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{1}{2}x^2$

$M(x) \; = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} x^2 dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2$

$h(x) \; = x \; H(x) = \frac{1}{2}x^2$

$F(x) \; = M(x) - H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$

$A = \left| \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} \right| = 0{,}6091$ FE

c) $g(x) = x^2(\ln x^2 - 2)$

Symmetrie: $f(-x) = (-x^2)\,(\ln(-x)^2 - 2) = x^2(\ln x^2 - 2) = f(x)$

$\Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse

Monotonie: $f'(x) > 0$ streng monoton wachsend

$f'(x) < 0$ streng monoton fallend

$f'(x) = 2x(\ln x^2 - 1)$

$x = 0$ nicht im Definitionsbereich

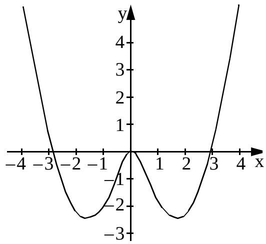
$f'(x) > 0$ für $x > 0$ und $(\ln x^2 - 1) > 0$ oder $x < 0$ und $(\ln x^2 - 1) < 0$

$\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ für $\sqrt{e} < x$ und $-\sqrt{e} < x < 0$ $\Rightarrow$ streng monoton wachsend

$f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $(\ln x^2 - 1) > 0$ oder $x > o$ und $(\ln x^2 - 1) < 0$

$\Rightarrow$ $f'(x) < 0$ für $x < -\sqrt{e}$ und $0 < x < \sqrt{e}$ $\Rightarrow$ streng monoton fallend)

Skizze: $f(x) = x^2(\ln x^2 - 2)$

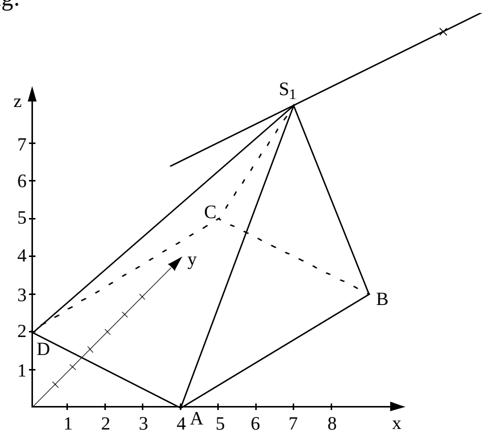


Bewertungsvorschlag:

Aufgabe W2	a)	b)	c)
23 BE	9 BE	5 BE	9 BE

Wahlaufgabe 3: Geometrie im Raum

a) Darstellung:



b) Parallelogramm: $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{DC}$ und $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$; $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$ und $k = 1$

$2 = 2\,k_1 \qquad k_1 = 1$

$6 = 6\,k_2 \qquad k_2 = 1 \qquad\qquad \Rightarrow\; k = 1$ Parallelogramm möglich

$\underline{0 = 0\,k_3} \qquad k_3 = \text{beliebig}$

$\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \neq s \cdot \overrightarrow{BC}$

$2 = -4\,s_1 \qquad s_1 = -\frac{1}{2}$

$6 = 0 \quad s_2 \qquad s_2 = \text{n. d.} \qquad\qquad \Rightarrow \; \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{BC}$ ABCD ein Parallelogramm

$0 = 2 \quad s_3 \qquad s_3 = 0$

M berechnen: $\quad g_{AC}\text{:} \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r \in \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad g_{BD}\text{:} \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad s \in \mathbb{R}$

$4 - 2r = 6 - 6s$
$0 - 6r = 6 - 6s$
$0 - 2r = 0 + 2s \qquad\qquad r = s \quad \Rightarrow \; r = s = 0{,}5 \qquad M(3 \,|\, 3 \,|\, 1) \qquad S_1(6 \,|\, 2 \,|\, 7)$

$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MS_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MS_1} = 0 \quad \Rightarrow \; \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MS_1}$

$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{MS_1} = 0 \quad \Rightarrow \; \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{MS_1}$

Volumenberechnung: Höhe der Pyramide $\left|\overrightarrow{MS_1}\right| = \sqrt{9 + 1 + 36} = \sqrt{46} = h$

Grundfläche: $\quad A_G = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{BC}^2 \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}\right)^2} = 27{,}1293$ FE

Volumen: $\qquad V_{P1} = \frac{1}{3} A_G h = 61{,}33$ VE

c) $\overrightarrow{OS'_1} = \overrightarrow{OS_1} + 2 \cdot \overrightarrow{S_1M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad S_1'(0 \,|\, 4 \,|\, -5)$

d) $D(0 \,|\, 0 \,|\, 2) \qquad S_r(8 - 2r;\, 6 - 4r,\, 7) \qquad \overrightarrow{DS_r} = \begin{pmatrix} 8 - 2r \\ 6 - 4r \\ 5 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{DS_r}\right| = \sqrt{(8 - 2r)^2 + (6 - 4r)^2 + 5^2} = \sqrt{125 - 80r + 20r^2}$

$\left|\overrightarrow{DS_r}\right|$ = wird minimal, wenn $f(r) = 20r^2 - 80r + 125$ minimal wird.

$f'(r) = 40r - 80 \qquad f'(r_E) = 0$ (notwendige Bedingung) $\qquad r_E = 2$
$f''(r) = 40 > 0$ (hinreichende Bedingung) $\quad \Rightarrow$ Minimum
P_r entartet, wenn $S_r \in E_{ABC}$

Ebenengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad s, r \in \mathbb{R}$

$8 - 2r = 4 + 2s - 2t$

$6 - 4r = 0 + 6s + 6t \qquad s = \frac{-15-4r}{6} \quad \Rightarrow \; r = 24$

$7 = 0 + 0 + 2t \qquad t = 3{,}5$

Für r = 24 ist die Pyramide P_r entartet.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe W2	a)	b)	c)	d)
23 BE	3 BE	8 BE	4 BE	8 BE

Mathematik

Abiturprüfung
Leistungskurs

1995/96

Gymnasium · Berlin

1. Vorschlag

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_p(x) = \frac{8}{x^2 + 3p^2}$; $p \in \mathbb{R}^+$.
Der Graph von f_p heißt G_p.

a) Untersuchen Sie die Funktionsschar f_p auf Definitionslücken, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
Auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung für die Wendepunkte wird verzichtet. Zeichnen Sie den zu p = 1 gehörenden Graphen G_p der Funktion f_p im Bereich $-3 \leq x \leq 3$! (1LE = 2 cm)

b) Wie lautet die Gleichung der Ortskurve K für die Wendepunkte W_{p1} mit positiver Abszisse, wenn p alle zugelassenen Werte durchläuft?
Welche Definitionsmenge hat die Funktion, deren Graph K ist?

c) Die Tangente und die Normale an den Graphen G_p im Wendepunkt mit positiver Abszisse aus Aufgabe a) schneiden die y-Achse in den Punkten A und B.
Wie groß ist die Länge $\overline{AB}$?
Man bestimme p so, daß das Verhältnis der Diagonalen im Drachenviereck AW_{p1} BW_{p2} also $\overline{AB} : \overline{W_{p1}W_{p2}}$, extremal wird. Von welcher Art ist das Extremum?

d) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches vom Graphen G_1 der Funktion f_1, von parallelen Geraden durch die Wendepunkte W_{11} und W_{12} und von der x-Achse begrenzt wird.
(Hinweis: Integration durch Substitution mit $\arctan t + C = \int \frac{1}{t^2 + 1}\,dt$)

Anmerkung: Normale an der Stelle x_0 ist die Gerade, die senkrecht zur Tangente an der Stelle x_0 verläuft.

Aufgabe 2:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei Ebenen gegeben durch

E_1: $8x - 4y + z - 81 = 0$

E_2: $2x + 2y - z - 9 = 0$

Außerdem ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Kugel K_a gegeben durch
K_a: $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 + z^2 - 81 = 0$.

a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen? Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden beider Ebenen.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der die Mittelpunkte aller

Kugeln K_a liegen. Begründen Sie, daß alle Kugeln K_a mit der x-y-Ebene gleichgroße Schnittkreise aufweisen. Für welche Werte von a hat die Kugel K_a mit der x-z-Ebene mehr als einen Punkt gemeinsam?

b) Welche der Kugeln K_a liegt dem Punkt $P(-3 \mid 14 \mid 8)$ am nächsten?
Wie groß ist der Mindestabstand des Punktes P von einem Punkt dieser Kugel?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Parameterwerten a_1 und a_2, wenn sich die zugehörigen Kugeln K_{a_1} und K_{a_2} in einem Kreis mit dem Radius $r = 6$ schneiden?

c) Auf der Kugel K_0 liegen die Punkte $B(8 \mid 4 \mid -1)$ und $C(4 \mid -4 \mid 7)$; der Kugelmittelpunkt sei M_0.
Ein kleines Modellflugzeug fliegt auf K_0 auf dem kürzesten Weg von B nach C, also auf dem Bogen eines Kreises mit dem Mittelpunkt M_0. Aufgrund seiner ständig wachsenden Geschwindigkeit hebt das Flugzeug in C von der Kugel ab und fliegt längs einer Kugeltangente genau in der Richtung weiter, in der es in C angekommen ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente.

Aufgabe 3:

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x + 2y + (3a-1)z &= 3a - 9 \\ (7+2a)x - y + 7z &= 16 \\ ax - y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

a) Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem
- genau eine Lösung
- beliebig viele Lösungen
- keine Lösungen?

b) Übertragen Sie die gefundenen Ergebnisse in Aussagen über die lineare Abhängigkeit von Spaltenvektoren.

c) In dieser Teilaufgabe wird nur der Fall — beliebig viele Lösungen — beachtet.
Geben Sie für diesen Fall eine Basisdarstellung der Lösungsmenge an.
Die drei Gleichungen können als Ebenen im affinen Raum aufgefaßt werden.
Welche relative Lage haben die drei Ebenen bzgl. der angegebenen Basisdarstellung zueinander?

Geben Sie ein Erzeugendensystem der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

d) Geben Sie ein inhomogenes LGS mit folgenden Eigenschaften an:

1. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

2. Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung des inhomogenen Systems.

zugelassene Hilfsmittel: nichtprogrammierbarer Taschenrechner

2. Vorschlag

Aufgabe 1:

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen G der Funktion f auf folgende Eigenschaften:
   – maximalen Definitionsbereich
   – Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches
   – Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
   – Symmetrie
   – Monotonieverhalten

   Was folgt aus der Monotonie der Funktion f für die Existenz von Extrempunkten?
   Zeichnen Sie den Graphen G im maximalen Definitionsbereich unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und einiger geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem (1LE = 1 cm)

b) Begründen Sie, weshalb f umkehrbar ist.
   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $\overline{f}$, den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion.
   Welche Aussagen können zu den Eigenschaften aus Teilaufgabe a) für die Umkehrfunktion getroffen werden?
   Zeichnen Sie den Graphen K der Funktion $\overline{f}$ im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a).

c) Die Graphen G und K beider Funktionen schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein.
   Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.
   Der Graph G der Funktion f schließt mit der positiven x-Achse und der Randgeraden des Definitionsbereiches eine Fläche ein. Gegen welchen Wert strebt die Maßzahl des Flächeninhaltes je geringer der Abstand zwischen dem Graphen G und der Randgeraden wird?

d) Der Graph K der Funktion $\overline{f}$ für $x > 0$ rotiere um die y-Achse. Dabei entsteht ein schalenförmiger Körper, der eine Höhe von $\sqrt{3}$ cm haben soll.
   Berechnen Sie das Fassungsvermögen der Schale.

Aufgabe 2:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ r \in \mathbb{R}$$

und die Punkte A(–2 | 1 | 1), B(–2 | 5 | 1) und S(–8 | 3 | 6) gegeben.

a) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels α, den die Gerade g und die Gerade [AB] einschließen.
Da nun die Größe des Winkels α bekannt ist, bietet sich eine einfache Möglichkeit an, mit Hilfe der Länge der Strecke $\overline{AB}$ den Abstand d des Punktes B von der Geraden g zu bestimmen.
Fertigen Sie eine Skizze an, und ermitteln Sie d.

b) Die Punkte A und B bilden mit dem Punkt C ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene ABC in Normalenform an, und bestimmen Sie den Abstand des Punktes S von dieser Ebene.
Zeigen Sie, daß der Fußpunkt F des Lotes von S auf die Ebene ABC ein Punkt der Symmetrieachse des Dreiecks ABC ist.

c) In einem Vektorraum V^2 sei definiert:
$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
Zeigen Sie, daß es sich um ein Skalarprodukt handelt.
Berechnen Sie die Menge der Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.
Bestimmen Sie zwei Vektoren so, daß sie mit $\vec{a}$ das Skalarprodukt 2 bilden.
Läßt sich zu jedem Vektor $\vec{v}$ ein orthogonaler Vektor finden, dessen erste Koordinate 1 ist?

Aufgabe 3:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1 | 2 | 3), B(5 | 0 | –1) und D(–1 | 6 | –1) gegeben.

a) Zeigen Sie, daß es einen Punkt C gibt, für den das Viereck ABCD ein Quadrat ist, und bestimmen Sie die Koordinaten von C.
Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Höhe 6; der Fußpunkt der Höhe ist der Mittelpunkt des Quadrates. Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Pyramidenspitzen S und S'.

b) Gegeben ist eine Ebene E: $10x + 4y - z = 51$, welche den Punkt B und C aus der Teilaufgabe a) enthält. Die Ebene zerschneidet die Pyramide ABCDS aus Teilaufgabe a) in zwei Teilkörper. Zeigen Sie, daß die Schnittfläche ein gleichschenkliges Trapez ist.
Berechnen Sie das Volumen des Teilkörpers mit der Spitze S.

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS aus der Teilaufgabe a).
Gegeben sind die Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, daß sich das Volumen der Pyramide nicht ändert, wenn ihre Spitze auf der Geraden g wandert.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S* auf der Geraden h so, daß das Volumen V* von jeder Pyramide ABCDS* doppelt so groß wird wie das Volumen der Pyramide ABCDS.

d) Die Pyramide ABCDS besitzt eine Innenkugel; diese berührt die Grundfläche und alle vier Seitenflächen der Pyramide.
Der Pyramide wird ein möglichst großer Kreiskegel mit der Spitze S eingeschrieben.
Begründen Sie, daß die Innenkugel der Pyramide sowohl den Mantel des Kegels als auch seine Grundfläche berührt.
Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, in denen die Innenkugel den Kegel berührt.

zugelassene Hilfsmittel: nichtprogrammierbarer Taschenrechner

1. Vorschlag

Aufgabe 1:

a)

keine Definitionslücken

keine Nullstellen

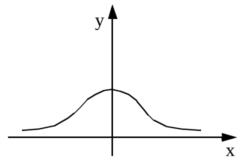
1. Ableitung: $f'(x) = \dfrac{-16x}{(x^2 + 3p^2)^2}$

2. Ableitung: $f''(x) = \dfrac{48x^2 - 48p^2}{(x^2 + 3p^2)^3}$

Maximum: $Max(0 \mid \frac{8}{3p^2})$

Wendepunkte: $Wp_1(p \mid \frac{2}{p^2})$ $\quad Wp_2(-p \mid \frac{2}{p^2})$

Skizze:



b) Gleichung der Ortskurve: $y = \frac{2}{x^2}$

Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R}^+$

c) Tangentengleichung: $f'_T(p) = -\frac{1}{p^3}$ $\qquad y_T = -\frac{1}{p^3}x + \frac{3}{p^2}$

Normalengleichung: $f'_N(p) = p^3$ $\qquad y_N = p^3x - p^4 + \frac{2}{p^2}$

Bestimmen von A und B: $A(0 \mid \frac{3}{p^2})$ $\qquad B(0 \mid -p^4 + \frac{2}{p^2})$

Länge $\overline{AB}$: $\left|\overline{AB}\right| = \frac{1}{p^2} + p^4$

Verhältnisgleichung: $f(p) = \dfrac{\frac{1}{p^2} + p^4}{2p}$

1. Ableitung: $f'(p) = \dfrac{-\frac{6}{p^2} + 6p^4}{4p^2}$

2. Ableitung: $f''(p) = \frac{24}{4p^5} + 3p$

Angabe von p und Art des Extremus: p = 1/Min

d) Integration durch Substitution

$$\int_{-1}^{1} \frac{8}{x^2 + 3}\,dx = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{3}} \; \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \qquad dx$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = t = \frac{8}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2 + 1}\,dt$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = 4{,}84$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich, Nullstellen; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Maximum; Wendepunkte, Skizze	17 BE
b)	Gleichung der Ortskurve; Definitionsmenge	2 BE
c)	Tangentengleichung; Normalengleichung; Bestimmen von A nach B; Länge $\overline{AB}$; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Angabe von p und Art des Extremums	21 BE
d)	Integration durch Substitution	7 BE
		47 BE

Aufgabe 2:

a) Angabe des Schnittwinkels: $\alpha = 74{,}9°$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{16-8-1}{9 \cdot 3} = \frac{7}{27}$$

Angabe der Geradengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ -99 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

E_1:	$8x - 4y + z = 81$	$x = t$
E_2:	$2x + 2y - z = 9$	$y = -45 + 5t$
$E_1 + E_2$:	$10x - 2y = 90$	$z = -99 + 12t$

Gerade der Mittelpunkte: φ_a: $\vec{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$

K_a hat M_a $(a \mid 2a \mid 0)$ und $r_a = 9$

Begründung für gleich große Schnittkreise:

- alle Mittelpunkte M_a liegen in der z-Ebene
- jede Kugel schneidet die x-y-Ebene in einem Kreis mit r = 9, da z = 0

Angeben der Einschätzung für a, damit Kugel und Ebene mehr als einen Punkt gemeinsam haben:

die Kugel K_a hat mit x-z-Ebene mehr als einen Punkt gemeinsam, wenn der Abstand M_a von der x-z-Ebene kleiner ist, als der Radius (y = 0)

$$|2a| < 9$$
$$-9 < 2a < 9$$
$$-4{,}5 < a < 4{,}5$$

b) Alle Kugeln K_a haben den gleichen Radius (r = 9). Diejenige Kugel liegt dem Punkt P am nächsten, für deren Mittelpunkt gilt: PM_a ist senkrecht zur Geraden g der Mittelpunkte.

$$0 = \overrightarrow{PM_a} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+3\\2a-14\\-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 5a - 25 \qquad a = 5$$

K_5 liegt dem Punkt P am nächsten.
Abstand von P und K mit a = 5: $d = \left|\overrightarrow{PM_5}\right| - r = \left\|\begin{bmatrix}8\\-4\\8\end{bmatrix}\right\| - 9 = 12 - 9 = 3LE$

d = Abstand (Punkt – Mittelpunkt) – Radius der Kugel

Abstand der Mittelpunkte der Kugeln K_{a_1} und K_{a_2}

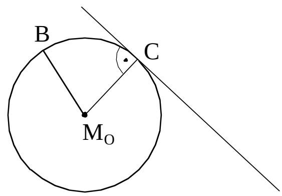
$$e = \left|\overrightarrow{M_{a_1}M_{a_2}}\right| = \left|\begin{pmatrix}a_2 - a_1\\2a_2 - 2a_1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5(a_2 - a_1)^2}$$

Zusammenhang von a_1 und a_2 mit Hilfe des Satzes des Pythagoras
K_{a_1} und K_{a_2} schneiden sich in einem Kreis mit dem Radius r = 6

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + r^2 = r_{a_1}^{\,2}$$

$$\frac{5}{4}(a_2 - a_1) + 36 = 81 \qquad |a_2 - a_1| = 6$$

c) Die Tangente t liegt in der Ebene M_OBC und steht senkrecht zu $\overrightarrow{M_OC}$.
Normalenvektor E (M_OBC)



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_OB} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_OC} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} = 0$$

Lösen des linearen Gleichungssystems; nichttriviale Lösung: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-4\end{pmatrix}$

Richtungsvektor $\vec{n}$ der Tangente t steht senkrecht zu $\vec{n}$ und zu $\overrightarrow{M_OC}$

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\-4\end{pmatrix} = 0 \qquad \vec{n} \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} = 0$$

Lösen des linearen Gleichungssystems; nichttriviale Lösung: $\vec{n} = \begin{pmatrix}-17\\-10\\4\end{pmatrix}$

$$t:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-17\\-10\\4\end{pmatrix};\ k \in \mathbb{R}$$

Bewertungsvorschlag:

a) Schnittwinkel; Geradengleichung; Gerade der Mittelpunkte; Begründung Schnittkreise; Abschätzung von a — 17 BE

b) Ermittlung von a; Abstand von P und K; Abstand M_{A1} und M_{A2}; Zusammenhang a_1 und a_2 — 13 BE

c) Lage von t; Normalvektor; Richtungsvektor der Tangente; Tangentengleichung — 13 BE

43 BE

Aufgabe 3:

a)

x	y	z	
5	2	$3a - 1$	$3a - 9$
0	$a + 7$	$a - 21$	-56
0	0	$3a(a^2 + 6a + 5)$	$3a(a^2 + 4a + 3)$

Untersuchung für a:
eine Lösung: $a \neq -1 \wedge a \neq -1$; beliebig viele Lösungen: $a = -1$;
keine Lösung: $a = -5$

b) eine Lösung: Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix linear unabhängig
beliebig viele Lösungen: alle Spaltenvektoren linear abhängig auch der erweiterten Koeffizientenmatrix
keine Lösung: Vektoren der Koeffizientenmatrix linear abhängig, der erweiterten Koeffizientenmatrix linear unabhängig (damit unterschiedliche Ränge)

c) Angeben der Basislösung $\vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -28 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebenen schneiden sich in einer Geraden
Angeben des Erzeugendensystems des homogenen linearen Gleichungssystems

d) Anwenden des Zusammenhanges zwischen den Lösungsmengen zueinandergehörigen homogenen und inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - 5x_4 = -19$
$x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1$

Bewertungsvorschlag:

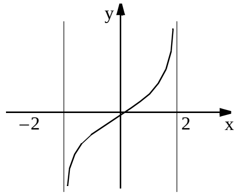
a)	Gauß Verfahren; Untersuchung für a	15 BE
b)	3 Aussagen	6 BE
c)	Basislösung; Erzeugendensystem	5 BE
d)	Anwenden des Zusammenhangs	4 BE
		30 BE

Vorschlag 2

Aufgabe 1:

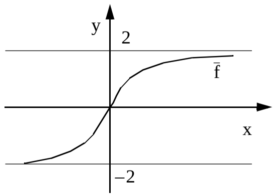
a) maximaler Definitionsbereich $|x| \leq 2$
für $x \to 2$ strebt $f(x) \to \infty$
für $x \to -2$ strebt $f(x) \to -\infty$
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen fallen zusammen $S(0\,|\,0)$
Nachweis der Punktsymmetrie bzgl. Ursprung
$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{4-(-x)^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = -f(x)$
1. Ableitung zur Monotonieüberprüfung
f streng monoton steigend
keine Extrempunkte

Skizze:



b) Begründung
Ermitteln von $\bar{f}$ $\bar{f}(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$
Angabe des DB/WB
für $x \to \infty$ strebt $f(x) \to 2$
für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to -2$
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen fallen zusammen $S(0\,|\,0)$
Punktsymmetrie zum Ursprung
f streng monoton wachsend

Skizze:



c) Schnittpunkte beider Graphen im 1. Quadranten ermitteln: $x = 0$ und $x = \sqrt{3}$.
Berechnung des Flächeninhaltes im Intervall mit Hilfe der Integration durch Substitution:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (\bar{f}(x) - f(x))\,dx = \underline{\underline{1FE}}$$

Berechnen des Grenzwertes für die Maßzahl des Flächeninhaltes:

$$\lim_{u \to 2} \int_0^u \frac{dx^{x} = 2}{\sqrt{4 - x^0}}$$

d) Integration mit Hilfe der Volumenformel unter Benutzung der Umkehrfunktion bei Beachtung der Intervallgrenzen
Integration mit Partialbruchzerlegung
V = 2, VE

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Limes; Schnittpunkte; Nachweis; Monotonie Extremwerte; Skizze	13 BE
b)	Begründung; Ermitteln von $\bar{f}$; Definitionsbereich; Wertebereich; Grenzwerte; Schnittpunkte; Symmetrie; Monotonie; Skizze	9 BE
c)	Schnittpunkte; Flächeninhaltsbegründung; Grenzwertberechnung	15 BE
d)	Integration mit Umkehrfunktion; Integration mit Partialbruchzerlegung	8 BE
		45 BE

Aufgabe 2:

a) Winkel berechnen $\alpha = 36{,}9°$

Skizze anfertigen

Anstand d mit Hilfe von Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck

$d = \overline{AB} * \sin\alpha$

$d = 2{,}4\,LE$

b) C = liegt auf g und kann allgemein angegeben werden

Bedingung $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$

$C(-3{,}5 \mid 3 \mid 1)$

Bestimmen des Normalenvektors der Ebene, der senkrecht zum Richtungsvektor von g und senkrecht zu AB steht; Angeben einer Gleichung für E E: $x_3 = 1$

Abstand $d(S \mid \text{Ebene}) = 5\,LE$

Lotgerade k von S auf die Ebene mit dem Normalenvektor der Ebene bilden

$F(-8 \mid 3 \mid 1)$

Zeigen, daß F auf Gerade durch MC liegt (M-Mittelpunkt von AB)

$g(MC)\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

c) Bedingung für Skalarprodukt überprüfen:

Verknüpfungstabelle:

	b_1	b_2
b_1	2 (p)	1 (q)
b_2	1 (r)	1 (s)

$q = r = 1$

$ps > q^2$

d.h. Skalarprodukt liegt vor (oder einzelne Eigenschaften des Skalarproduktes nachweisen)

$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \qquad 2x_1 \cdot 1 + x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 = 0 \qquad x_2 = -2x_1$

$\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};\quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{a} \cdot \vec{x} = 2 \qquad 2x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 = 2 \qquad x_2 = 2 - 2x_1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$

Beispiel angeben: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\x_2\end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0 \quad 2 \cdot 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + x_2 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 = 0 \qquad x_2(v_1 + v_2) = -2v_1 - v_2$

Rechnung führt zu einer Fallunterscheidung

1. Fall $\quad v_1 \neq -v_2 \qquad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-2v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\x_2\end{pmatrix}$

2. Fall $\quad v_1 = -v_2 \;\wedge\; v_2 \neq -2v_1 \qquad \vec{x}$ existiert nicht

3. Fall $\quad v_1 = -v_2 \;\wedge\; v_2 = -2v_1 \qquad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{0}$

Alle $\vec{x} \in v^2$ sind orthogonal zu $\vec{0}$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Winkel; Skizze; Abstand berechnen	8 BE
b)	C bestimmen; Gleichung der Ebene; Abstand des Punktes Nachweis zu Punkt F	16 BE
c)	Nachweis Skalarprodukt; Menge der Vektoren; Vektoren für Skalarprodukt; Vektor $\vec{v}$	15 BE
		30 BE

Aufgabe 3:

a) Dreieck ABD ist gleichschenklig rechtwinklig

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} = 6\text{LE}$

Punkt C ergänzt zu einem Quadrat, wenn $\overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{AD}$: $\quad C(3 \mid 4 \mid -5)$.

M = Mittelpunkt vom Quadrat $M(2 \mid 3 \mid -1)$

Ebene E konstruieren, in der das Quadrat ABCD liegt:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad 4n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \qquad -2n_1 + 4n_2 - 4n_3 = 0$

Ansatz für E: $\;2x + 2y + z = a$ und $B \in E \qquad E: 2x + 2y + z = 9$

Normaleneinheitsvektor der Quadratebene:

$\vec{n}_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Punkte ergeben sich aus der Linearkombination vom Normalenvektor und dem Ortsvektor von M:

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + 6 \cdot \vec{n}_0 \qquad S(6 \mid 7 \mid 1)$

$\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OM} - 6 \cdot \vec{n}_0 \qquad S'(-2 \mid -1 \mid -3)$

b) Die Ebene zerschneidet die Kanten AS und DS.

Schnitt von E mit AS = G $\qquad x = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\5\\-2\end{pmatrix}$

G(3,5 | 4,5 | 2)

Schnitt von E mit DS = H $\qquad x = \overrightarrow{OD} + t \cdot \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix}-1\\6\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix}$

H(2,5 | 6,5 | 0)

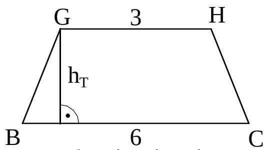
Nachweis der Trapezeigenschaft:

$$\left|\overrightarrow{BG}\right| = \left|\overrightarrow{CH}\right| = \left|\begin{pmatrix}1,5\\4,5\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{63}{2}} = \left|\begin{pmatrix}-0,5\\2,5\\5\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{GH}\right| \parallel \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$$

Viereck BCHG ist ein gleichschenkliges Trapez.

Volumenberechnung:



$$\left|\overrightarrow{BG}\right|^2 = h_T^2 + \left(\frac{\left|\overrightarrow{BC}\right| - \left|\overrightarrow{GH}\right|}{2}\right)^2$$

$$h_T = \frac{3}{2}\sqrt{13} \text{ LE}$$

$A_T = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{GH}\right|\right) \cdot h_T = \frac{27}{4}\sqrt{13}$ FE $\quad$ (Trapezfläche)

Höhe der Teilpyramide BCHGS:

$h_p = d(S; E) = \frac{1}{\sqrt{117}} \; |60 + 28 - 1 - 51| = \frac{36}{\sqrt{117}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$ LE

[E in Normalform: $\frac{1}{\sqrt{117}}(10x_1 + 4x_2 - x_3 - 51) = 0$]

$V_p = \frac{1}{3} \cdot A_T \cdot h_P = 27$ VE

c) $V = \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot h_0 = 72$ VE

Punkt S liegt auf der Geraden g für S = 0.

Wandert S auf g, so bleibt die Grundfläche konstant und das Volumen ändert sich nicht. Nachweis der Parallelität von g und der Ebene der quadratischen Grundfläche:

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 0$$

Das Volumen der Pyramide verdoppelt sich, wenn $h_0 = 6$ sich verdoppelt.

$d = 12 = d(S^*; E)$

Normalform von E: $\frac{1}{3}(2x + 2y + z - 9) = 0$

$d(S^*; E) = \frac{1}{3} \; |12 + 10t + 14 + 10t + 1 - 2t - 9| = 12$

$d(S^*; E) = |18t + 18| = 36$

$|t + 1| = 2 \qquad t + 1 = -2 \wedge t + 1 = 2$

$t_1 = -3$ und $t_2 = 1$

$S^*_1(-9|-8|7) \qquad S^*_2(11|12|-1)$

d) Mittelpunkt der Kugel liegt auf der Strecke MS
M (Mittelpunkt des Quadrates)
Innenkugel berührt M und die Seitenflächen in den Seitenflächenhöhen, die durch S gehen
Kreiskegel hat Grundfläche im Quadrat und berührt die Mittelpunkte der Grundkanten
Mittelpunkte der Grundkanten liegen auf den Seitenflächenhöhen
Mantellinie des Kegels berührt somit die Innenkugel; Grundfläche des Kegels berührt Innenkugel in M;
Zusammenfassung: Innenkugel und Kreiskegel berühren sich im Mittelpunkt des Quadrates und in einem Berührkreis, der orthogonal zu MS liegt und die Seitenflächenhöhen berührt

Bewertungsvorschlag:

a)	Bestimmen von C; Koordinaten von S und S'	9 BE
b)	Schnittflächennachweis; Volumenberechnung	18 BE
c)	Volumenberechnung; Nachweis; Bestimmen von S^*	11 BE
d)	Begründung zur Innenkugel; Beschreibung der Punktemenge	8 BE
		46 BE