Abiturprüfung Leistungskurs 1996 / 97

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen
Berlin
Brandenburg

PAETEC

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer bzw. die ausgewählten Schulen:
Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Göpfert (Sachsen-Anhalt)
Dr. Eva-Maria Westerhoff (Thüringen)
Marlies Eitemüller (Camille-Claudel-Gymnasium Berlin)
Ronald Müller (Rückert-Oberschule Berlin)
Michael Müller (Gesamtschule Bernau/Zepernick)

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

1. Auflage
1 5 4 3 2 1 | 2001 2000 99 98 97

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Redaktion: Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber
Satz und Layout: Matthias Nerling, Heiko Schlichting
Druck: Druckerei zu Altenburg

ISBN 3-89517-008-9

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die im Schuljahr 1996/97 in den zentralen Abiturprüfungen für Mathematik-Leistungskurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen gestellt wurden. Da es in Brandenburg und Berlin kein Zentralabitur für das Fach Mathematik gibt, wurden als Beispiele weiterhin Abiturprüfungsarbeiten von zwei Berliner und einer Brandenburger Schule (teilweise schon aus dem Schuljahr 1995/96) in das Heft aufgenommen.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren.

Der PAETEC Schulbuchverlag hofft, mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahres gewiß interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, Juli 1997

Abiturprüfung Leistungskurs

1996 / 97

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweis: Die Schüler hatten die
– Pflichtaufgaben P1 bis P4
sowie
– entweder zwei der Aufgaben A5, A6, A7
– oder zwei der Aufgaben B5, B6, B7
zu lösen.

Aufgabe P1: Geometrie im Raum

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(–3 | 2 | 3), B(1 | 0 | 5), C(3 | 6 | 1), E(–2 | –3 | –4)
und die Gerade h durch die Gleichung

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

a) Zeigen Sie, daß die Gerade g, die durch die Punkte A und B verläuft, und die Gerade h einander schneiden.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel.

b) Die Geraden g und h liegen in einer Ebene ε. Untersuchen Sie, ob der Punkt E in dieser Ebene ε liegt.

c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch den Punkt C parallel zur Geraden g verläuft.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von D so, daß A, B, C und D die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Aufgabe P2: Folgen

Über einer 8 cm langen Strecke wird ein Halbkreis gezeichnet. Sein Flächeninhalt sei A_1. Nun wird die Strecke halbiert und über jeder Teilstrecke jeweils ein Halbkreis gezeichnet. Die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Halbkreise sei A_2. Diese Teilstrecken werden wiederum halbiert und Halbkreise darüber gezeichnet. Die Summe der Flächeninhalte dieser vier Halbkreise sei A_3. Dieses Verfahren wird beliebig oft fortgesetzt. Die entstehende Folge sei (A_n).

a) Berechnen Sie die ersten sechs Glieder der Folge (A_n).

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von A_n an.

c) Ab welchem n wird A_n kleiner als $\frac{A_1}{1\,000}$?

Aufgabe P3: Funktionen

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$$y = f_a(x) = \frac{1 - ax}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0, a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

a) Berechnen Sie von G_a die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse und die der Extrempunkte.

b) Durch den Wendepunkt $W_2(\frac{3}{2} \mid -\frac{8}{9})$ von G_2 und durch den Schnittpunkt von G_2 mit der x-Achse verläuft eine Gerade g.
Der Graph G_2 und die Gerade g schließen eine Fläche vollständig ein. Skizzieren Sie diese Fläche und berechnen Sie deren Inhalt.

Aufgabe P4: Stochastik

In einer Region leiden 5% aller Einwohner an einer bestimmten Krankheit.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 15 zufällig ausgewählten Personen dieser Region
– höchstens drei,
– mehr als eine an dieser Krankheit leiden?
Die Anzahl der erkrankten Personen kann als binomialverteilt angesehen werden.

b) Um die Krankheit diagnostizieren zu können, wird eine medizinische Untersuchung durchgeführt. Bei dieser werden 80% aller Erkrankten, aber auch 10% aller Nichterkrankten als erkrankt eingestuft.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß eine zufällig ausgewählte Person als krank eingestuft wird.

c) Ein pharmazeutisches Unternehmen bietet zur Behandlung der Erkrankung ein Präparat an, welches angeblich bei mindestens 80% aller behandelten Personen zur Heilung führt. Bei einer Therapie mit diesen Präparat wurden von 100 behandelten Patienten nur 73 geheilt. Der Hersteller sprach daraufhin von einer zufälligen Abweichung. Diese Aussage gelte als „nicht glaubhaft“, wenn die Wahrscheinlichkeit für die Heilung von höchstens 73 Patienten kleiner als 5 % ist. Prüfen Sie, ob die Aussage des Herstellers unter diesem Aspekt als glaubhaft gelten kann.

Tabelle: Einzelwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0{,}8$:

k	p_k	k	p_k
0	0,0000	72	0,0141
1	0,0000	73	0,0217
⋮	⋮	74	0,0316
63	0,0000	75	0,0439
64	0,0001	76	0,0577
65	0,0002	77	0,0720
66	0,0004	78	0,0849
67	0,0008	79	0,0946
68	0,0016	80	0,0993
69	0,0029	81	0,0981
70	0,0052	82	0,0909
71	0,0088	⋮	⋮

Aufgabe A5: Funktionen

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$y = f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie für den Graphen G dieser Funktion f die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und der Extrem- und Wendepunkte.

b) Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion im Intervall $-2 \leq x \leq 8$.

c) Die Graphen der Funktionen $y = f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$ und $y = g(x) = x + 2$ schneiden einander.
Ermitteln Sie näherungsweise die Koordinaten des Schnittpunktes.

d) Gegeben ist eine Funktion g durch die Gleichung

$$y = g(x) = (x^2 + px + q)e^{-x}.$$

Der Graph dieser Funktion berührt die x-Achse an der Stelle $x = 1$. Bestimmen Sie p und q.

Aufgabe A6: Geometrie der Ebene - Analysis

Gegeben sind eine Schar von Kreisen K_a mit der Gleichung

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0,$$

eine Gerade mit der Gleichung $x - 2y = 0$
und eine Parabel p mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + 4$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte und die Radien der Kreisschar in Abhängigkeit von a.
Zeichnen Sie K_1, K_2 und K_3 in ein und dasselbe Koordinatensystem.

b) Die Gerade g schneidet die Kreisschar K_a im Koordinatenursprung und weiteren Punkten S_a.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte S_a.

c) In jedem Schnittpunkt S_a der Geraden g mit der Kreisschar K_a wird die Tangente an den Kreis gelegt.
Geben Sie die Gleichung der so entstehenden Tangentenschar an.

d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels α_a, unter dem die Gerade g den Kreis K_a schneidet.

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q der Parabel p, der von der Geraden g den kürzesten Abstand hat.

Aufgabe A7: Geometrie im Raum

Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S. Die Eckpunkte haben bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Koordinaten $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(6\,|\,6\,|\,0)$, $C(-2\,|\,8\,|\,2)$ und $S(2\,|\,3\,|\,11)$.

a) Zeichnen Sie die Pyramide.
Zeigen Sie, daß die Grundfläche ein dreiseitiges Dreieck ist, und berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

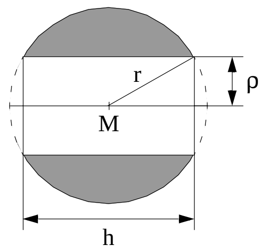
b) Geben Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene an, in der die Grundfläche ABC liegt.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

c) Berechnen sie a so, daß der Punkt $Q(a\,|\,a\,|\,0)$, der auf der Kante $\overline{AB}$ liegt, von der Spitze S den kleinsten Abstand hat.

d) Die Punkte B und C liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene ε. Stellen Sie eine Koordinatengleichung für ε auf.

Aufgabe B5: Analysis

Aus einer Kugel mit dem Radius r = 5 cm wurde eine Öffnung herausgebohrt. Die Achse der Bohrung geht durch den Kugelmittelpunkt.
Die nebenstehende Zeichnung zeigt einen Achsenschnitt durch den Restkörper. Der Schnitt wurde durch die Achse der Bohrung gelegt.
Radius des herausgebohrten Teils: ρ
Höhe des Restkörpers: h



a) Weisen Sie unter Verwendung der Integralrechnung nach, daß der Restkörper das Volumen $V = \frac{1}{6}\pi h^3$ besitzt.

b) Stellen Sie unter Verwendung der im Tafelwerk angegebenen Formeln für Teile einer Kugel eine Formel zur Berechnung des Oberflächeninhalts des Restkörpers auf.
Berechnen Sie für r = 5 cm und für ρ = 2 cm, 3 cm und 4 cm den Oberflächeninhalt des Restkörpers.
Wie groß muß der Radius ρ der Bohrung sein, damit dieser Restkörper einen möglichst großen Oberflächeninhalt besitzt? Auf den Nachweis des Extremums wird verzichtet.

Aufgabe B6: Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung

$$y = f_a(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right), \quad a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

a) Zeigen Sie, daß G_a symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

b) Berechnen Sie von G_a die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse und die der Extrempunkte.
Begründen Sie, daß kein Graph der Kurvenschar einen Wendepunkt hat.

c) Skizzieren Sie G_2 und G_4 in ein und dasselbe Koordinatensystem.

d) Berechnen Sie die Größe des Winkel α_a, unter dem der Graph G_a den positiven Teil der x-Achse schneidet.

e) Die Extrempunkte der Kurvenschar G_a liegen alle auf dem Graphen eine Funktion g.
Geben Sie eine Gleichung für g an.

Aufgabe B7: Geometrie im Raum

Gegeben sind die Punkte $A(5 \mid -3 \mid 1)$, $B(3 \mid 5 \mid -1)$ und $C_t(7-2t \mid 4-t \mid 9-2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Damit liegen die Punkte C_1 auf der Geraden g mit der Gleichung

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zu jedem t bestimmen die drei Punkte A, B, C_t eindeutig eine Ebene ε_t.

a) Zeigen Sie, daß A, B und die Gerade g nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.

b) Zeichen Sie die Dreiecke ABC_0 und ABC_3 sowie die Gerade g in ein und dasselbe Koordinatensystem ein.
Weisen Sie nach, daß jedes Dreieck ABC_t gleichschenklig ist.
Untersuchen Sie, ob es unter den Dreiecken ABC_t auch rechtwinklige Dreiecke gibt.

c) Genau eine Ebene ε_t wird von der Geraden g senkrecht geschnitten.
Geben Sie eine Gleichung für diese Ebene an.

d) Eine Gerade h verlaufe durch den Punkt $P(9 \mid 3 \mid 3)$ in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden h mit der Ebene ε_3.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1: Geometrie im Raum

a) g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{R}$), h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$) führt zu

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -3 + 4r = 3 - 2t \\ \text{(II)} & 2 - 2r = 6 - 2{,}5t \\ \text{(III)} & 3 + 2r = 1 + 1{,}5t \end{array}$$

Lösung: $t = 2$, $r = \frac{1}{2}$; die Geraden g und h schneiden also einander.
Probe durch Einsetzen von r und t in die Gleichungen (I), (II) und (III) führt zu wahren Aussagen.
Koordinaten des Schnittpunktes:

Aus g mit $r = \frac{1}{2}$ folgt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(Zur Kontrolle: Aus h mit t = 2 folgt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow S((-1 \mid 1 \mid 4)$

Schnittwinkel $\sphericalangle(g \mid h)$:

$$\cos \sphericalangle(g \mid h) = \left| \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4 + 6{,}25 + 2{,}25} \cdot \sqrt{16 + 4 + 4}} \right| = \left| \frac{-8 + 5 + 3}{\sqrt{12{,}25} \cdot \sqrt{24}} \right| = 0$$

Es gilt also $\sphericalangle(g \mid h) = 90°$, d.h. $g \perp h$.

b) Gleichung von ε, wobei $g \in \varepsilon$ und $h \in \varepsilon$:

ε: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t, r \in \mathbb{R}$

Einsetzen von E(–2 | –3 | –4) führt zu $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -2 = -3 - 2t + 4r \\ \text{(II)} & -3 = 2 - 2{,}5t - 2r \\ \text{(III)} & -4 = 3 + 1{,}5t + 2r \end{array}$$

(II) + (III): $-7 = 5 - t \quad \Rightarrow t = 12$

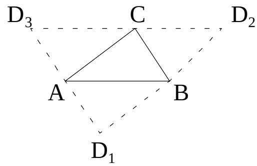
(I) + 2 · (II): $-8 = 1 - 7t \quad \Rightarrow t = \frac{9}{7}$, also Widerspruch, d.h. $E \notin \varepsilon$.

c) Gleichung für Gerade ℓ mit $g \parallel \ell$:

ℓ: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

d) Es gibt drei Möglichkeiten für die Bestimmung der Koordinaten von einem Punkt D, wenn die Bedingung „ABCD ist ein Parallelogramm“ erfüllt sein soll.

Skizze:



Koordinaten von D_1: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD_1}$

$$\begin{pmatrix}-6\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\7\end{pmatrix}, \text{ also: } D_1(-5\,|\,-4\,|\,7)$$

Koordinaten von D_2: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD_2}$

$$\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}, \text{ also: } D_2(7\,|\,4\,|\,3)$$

Koordinaten von D_3: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD_3}$

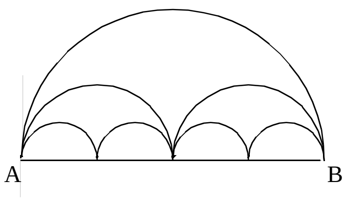
$$\begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\8\\-1\end{pmatrix}, \text{ also: } D_3(-1\,|\,8\,|\,-1)$$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe P1	a)	b)	c)	d)
19 BE	6 BE	5 BE	2 BE	6 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P2: Folgen

Skizze:



$\overline{AB} = 8$ cm

a) Glieder der Folge (A_n):

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi$ (FE) $\qquad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 4\pi$ (FE)

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 2\pi$ (FE) $\qquad A_4 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot 8 = \pi$ (FE)

$A_5 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot 16 = \frac{\pi}{2}$ (FE) $\qquad A_6 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{8})^2 \cdot 32 = \frac{\pi}{4}$ (FE)

b) Formel zur Berechnung von A_n (unter Verzicht auf die Angabe der Einheit):

$A_1 = 2^3 \cdot \pi$; $A_2 = 2^2 \cdot \pi$; $A_3 = 2^1 \cdot \pi$; $A_4 = 2^0 \cdot \pi$; $A_5 = 2^{-1} \cdot \pi$; $A_6 = 2^{-2} \cdot \pi$; …

explizite Formel: $A_n = 2^{4-n} \cdot \pi = \frac{\pi}{2^{n-4}}$

rekursive Formel: $A_1 = 8\pi$; $A_{n+1} = \frac{1}{2} A_n$

c) Ermitteln von n , so daß $A_n < \frac{A_1}{1\,000}$ für $A_1 = 8\pi$:

$\frac{\pi}{2^{n-4}} < \frac{8\pi}{1\,000} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-4}} < \frac{1}{125} \Rightarrow 2^{n-4} > 125$

Logarithmieren beider Seiten ergibt: $(n-4)\lg 2 > \lg 125$

$\Rightarrow n - 4 > \frac{\lg 125}{\lg 2} \approx 6{,}966 \Rightarrow n - 4 > 6{,}966 \Rightarrow n > 10{,}966.$

Für $n \geq 11$ gilt: $A_n < \frac{A_1}{1\,000}$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe P 2	a)	b)	c)
9 BE	3 BE	2 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P3: Funktionen

a) Schnittpunkte mit der x-Achse:

Es gilt: $0 = \frac{1-ax}{x^2} \Rightarrow 0 = 1 - ax$, also $x = \frac{1}{a}$, d.h., $S_x(\frac{1}{a} \mid 0)$.

Lokale Extrempunkte:

$f_a'(x) = \frac{-ax^2 - (1-ax) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-ax - (1-ax) \cdot 2}{x^3} = \frac{ax-2}{x^3}$

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{ax-2}{x^3} = 0$, also $ax - 2 = 0$ und damit $x = \frac{2}{a}$.

$f_a''(x) = \frac{ax^3 - (ax-2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-2ax + 6}{x^4}$; $f_a''(\frac{2}{a}) = \frac{-2a \cdot \frac{2}{a} + 6}{\left(\frac{2}{a}\right)^4} = \frac{2}{\left(\frac{2}{a}\right)^4} > 0$

$f_a(\frac{2}{a}) = \frac{1 - a \cdot \frac{2}{a}}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = -\frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = -\frac{a^2}{4}$, also $P_{Min}(\frac{2}{a} \mid -\frac{a^2}{4})$.

b) Schnittpunkt G_2 mit der x-Achse:

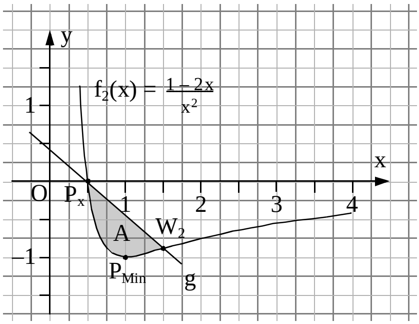
$0 = f_2(x) = \frac{1-2x}{x^2} \Rightarrow 0 = 1 - 2x$, also $x = \frac{1}{2}$, d.h., der Schnittpunkt ist $P_x(\frac{1}{2} \mid 0)$.

Gleichung für g durch die Punkte $W_2(\frac{3}{2} \mid -\frac{8}{9})$ und $P_x(\frac{1}{2} \mid 0)$:

Aus $y = mx + n$ folgt (I) $-\frac{8}{9} = m \cdot \frac{3}{2} + n$; (II) $0 = m \cdot \frac{1}{2} + n$, woraus man

$m = -\frac{8}{9}$ und $n = \frac{4}{9}$ erhält. Also gilt: g: $y = -\frac{8}{9}x + \frac{4}{9}$.

Skizze:



$P_x(\frac{1}{2} \mid 0)$

$P_{Min}(1 \mid -1)$

$W_2(\frac{3}{2} \mid -\frac{8}{9})$

$f_2(\frac{1}{4}) = 8$

$f_2(2) = -\frac{3}{4}$

$f_2(3) = -\frac{5}{9}$

$f_2(4) = -\frac{7}{16}$

Flächeninhalt:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{8}{9}x + \frac{4}{9} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx = \left[-\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 2 \cdot \ln 1{,}5 - \left(-\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + 2 + 2 \cdot \ln 0{,}5\right)$$

$\approx 0{,}419 \approx 0{,}42$, also $A = 0{,}42$ (FE)

oder:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-2x}{x^2}\right) dx - \frac{4}{9} = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) dx - \frac{4}{9} = -\left[-\frac{1}{x} - 2 \cdot \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}$$

$= -(-\frac{2}{3} - 2 \cdot \ln 1{,}5 + 2 + 2 \cdot \ln 0{,}5) - \frac{4}{9} \approx 0{,}419 \approx 0{,}42$, also $A = 0{,}42$ (FE).

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe P 3	a)	b)
16 BE	8 BE	8 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P4: Stochastik

a) $p = 0{,}05$; $1 - p = 0{,}95$

P(„höchstens drei“) $= P(x \leq 3)$

$= \binom{15}{0} 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{15} + \binom{15}{1} 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{14} + \binom{15}{2} 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{13}$

$\approx 0{,}995$, d.h. 99,5%

P(„mehr als eine“) $= P(x > 1) = 1 - P(x \leq 1)$

$= 1 - [\binom{15}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{14} + \binom{15}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{15}]$

$\approx 0{,}171$, d.h. 17,1%

b) 80% … 0,8; 10% … 0,1

P(„eine Person als krank eingestuft“) $= 0{,}8 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 = 0{,}135$, d.h. 13,5%

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig ausgewählte Person als krank eingestuft wird, ist 0,135.

c) $n = 100$; $p = 0{,}8$

P(„Heilung von höchstens 73 Personen“) $= P(x \leq 73) \approx 0{,}0558$, d.h. 5,58%.

Die Aussage gilt demzufolge als glaubhaft.

Ermittlung von $P(x \leq 73)$ (siehe Tabelle)

$$\begin{array}{r} 0{,}0001 \\ 0{,}0002 \\ 0{,}0004 \\ 0{,}0008 \\ 0{,}0016 \\ 0{,}0029 \\ 0{,}0052 \\ 0{,}0088 \\ 0{,}0141 \\ +\ 0{,}0217 \\ \hline 0{,}0558 \end{array}$$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe B7	a)	b)	c)
10 BE	4 BE	3 BE	3 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A5: Funktionen

a) Schnittpunkt mit der x-Achse:

Der Ansatz $0 = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = (x + 1)^2 \cdot e^x$ führt zu $x = -1$ (da $e^x \neq 0$) und damit zum Schnittpunkt $P_x(-1 \mid 0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$y = (0^2 + 2 \cdot 0 + 1) \cdot e^0 = 1$, d.h., der Schnittpunkt ist $P_y(0 \mid 1)$.

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} + (-1)(x^2 + 2x + 1)e^{-x} = e^{-x}(2x + 2 - x^2 - 2x - 1) = e^{-x}(1 - x^2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (1 - x^2) = 0$ (da $e^x \neq 0$)

Also gilt $x^2 = 1$, woraus $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ folgt.

$f''(x) = -e^{-x}(1 - x^2) + e^{-x} \cdot (-2x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$

$f''(1) = -\frac{2}{e} < 0$; $f(1) = \frac{4}{e} \Rightarrow P_{Max}(1 \mid \frac{4}{e})$ bzw. $P_{Max}(1 \mid 1{,}47)$

$f''(-1) = 2e > 0$; $f(-1) = 0 \Rightarrow P_{Min}(-1 \mid 0)$

Wendepunkte:

$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ (da $e^x \neq 0$)

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 1} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

$f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 2x - 1) + e^{-x}(2x - 2) = e^{-x}(4x - x^2 - 1) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$f(1 - \sqrt{2}) = \frac{(6 - 4\sqrt{2})}{e^{1-\sqrt{2}}} \approx 0{,}52 \Rightarrow W_1(1 - \sqrt{2} \mid \frac{(6 - 4\sqrt{2})}{e^{1-\sqrt{2}}})$ bzw. $W_1(-0{,}41 \mid 0{,}52)$

$f(1 + \sqrt{2}) = \frac{(6 + 4\sqrt{2})}{e^{1+\sqrt{2}}} \approx 1{,}04 \Rightarrow W_2(1 + \sqrt{2} \mid \frac{(6 + 4\sqrt{2})}{e^{1+\sqrt{2}}})$ bzw. $W_2(2{,}41 \mid 1{,}04)$

b) Graph der Funktion:

$P_{Min}(-1 \mid 0)$

$P_{Max}(1 \mid 1{,}47)$

$W_1(-0{,}41 \mid 0{,}52)$

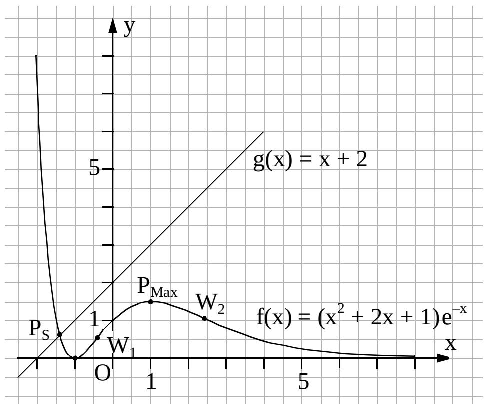
$W_2(2{,}41 \mid 1{,}04)$

$f(-2) = e^2 \approx 7{,}39$

$f(8) = \frac{81}{e^8} \approx 0{,}027$

$P_x(-1 \mid 0)$

$P_y(0 \mid 1)$



c) Koordinaten des Schnittpunktes:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)e^{-x} - x - 2 = 0$

Näherungsweises Ermitteln von x durch Probieren ergibt $x \approx -1{,}39$.

Also ist $P_S(-1{,}39 \mid 0{,}61)$ der gesuchte Schnittpunkt.

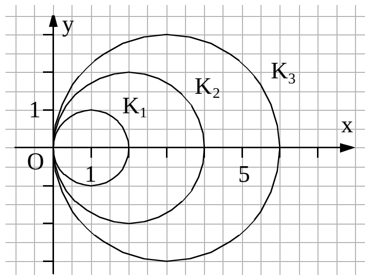
d) Bestimmung von p und q:
Mit P(1 | 0) ergibt sich für g: $0 = (1^2 + p + q)e^{-1}$. Daraus folgt $0 = 1 + p + q$ (da $e^{-1} \neq 0$), also $p = -(q + 1)$.
$g'(x) = (2x + p)e^{-x} + (-1)(x^2 + px + q)e^{-x} = e^{-x}(2x + p - x^2 - px - q)$
$g'(1) = \frac{1-q}{e}$; Da P(1 | 0) Extrempunkt von g ist, gilt $g'(1) = 0$.
Das ergibt $\frac{1-q}{e} = 0$ und somit $q = 1$, woraus $p = -2$ folgt. Die Funktion g hat also die Gleichung: $y = g(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe A5	a)	b)	c)	d)
23 BE	14 BE	2 BE	3 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A6: Geometrie der Ebene - Analysis

a) Mittelpunktkoordinaten und Radien der Kreise K_a:
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$
$\Leftrightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow M_a(a | 0),\ r_a = a$
Darstellung von K_1, K_2 und K_3:
K_1: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; $M_1(1 | 0)$; $r = 1$
K_2: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; $M_2(2 | 0)$; $r = 2$
K_3: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$; $M_3(3 | 0)$; $r = 3$



b) Koordinaten von S_a:
Aus $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ folgt mit $y = \frac{1}{2}x$: $x^2 - 2ax + \frac{1}{4}x^2 = 0$, also
$\frac{5}{4}x^2 - 2ax = x(\frac{5}{4}x - 2a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_a = \frac{8}{5}a,\ y_a = \frac{4}{5}a \Rightarrow S_a(\frac{8}{5}a \mid \frac{4}{5}a)$

c) Gleichung der Tangentenschar:
$S_a(\frac{8}{5}a \mid \frac{4}{5}a)$, $M_a(a | 0) \Rightarrow$ t: $(x - a)(\frac{8}{5}a - a) + (y - 0)(\frac{4}{5}a - 0) = a^2$, also
$\frac{8}{5}ax - \frac{8}{5}a^2 - ax + a^2 + \frac{4}{5}ay = a^2$, woraus $3x - 8a + 4y = 0$ bzw. $y = -\frac{3}{4}x + 2a$ folgt.

d) Winkel $\alpha_a = \sphericalangle(g \mid K_a)$:

$$g\colon y = \frac{1}{2}x;\ t\colon y = -\frac{3}{4}x + 2a \Rightarrow \tan\alpha_a = \frac{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = -2\text{, also } \alpha_a \approx 63{,}4°$$

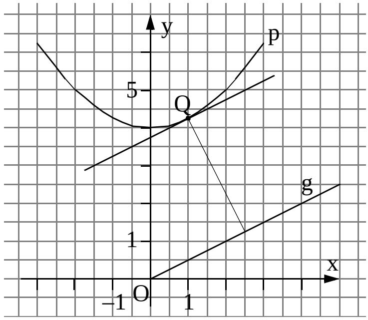
e) Koordinaten des Punktes Q:

$g\colon y = \frac{1}{2}x;\ p\colon y = \frac{1}{4}x^2 + 4$

Der kürzeste Abstand zwischen p und g entspricht dem Abstand zwischen g und der zu g parallelen Tangente an p. Daraus folgt:

$\frac{1}{2}x_Q = \frac{1}{2}$ bzw. $x_Q = 1$.

$y_Q = \frac{1}{4}1^2 + 4 = \frac{17}{4} \Rightarrow Q(1 \mid \frac{17}{4})$

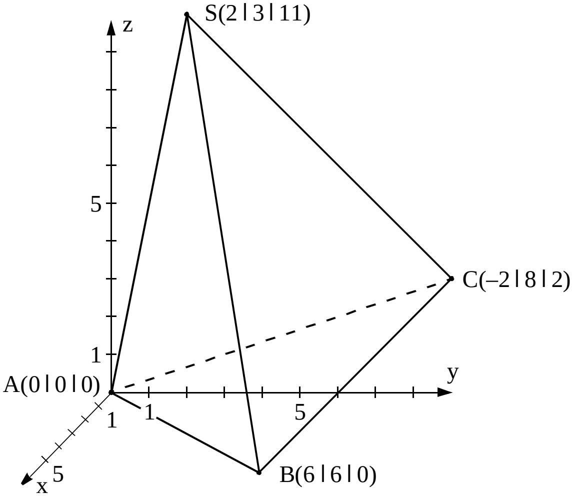


Bewertungsvorschlag:

Aufgabe A6	a)	b)	c)	d)	e)
23 BE	6 BE	4 BE	4 BE	4 BE	5 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A7: Geometrie im Raum:

a) Zeichnung:



Behauptung: Δ ABC ist gleichseitig

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2}\ \text{(LE)} = \sqrt{72} \\ |\overline{AC}| &= \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 2^2}\ \text{(LE)} = \sqrt{72} \\ |\overline{BC}| &= \sqrt{(-8)^2 + 2^2 + 2^2}\ \text{(LE)} = \sqrt{72} \end{aligned}\right\}$$

$|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ Also ist Δ ABC gleichseitig.

Flächeninhalt von Δ ABC:

Δ ABC ist gleichseitig, also: $A_{\Delta\,ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{72}\cdot\sqrt{72}\cdot\sin 60°$ (FE) $\approx$ 31,18 (FE).

b) Koordinatengleichung der Ebene σ mit A, B, C $\in \sigma$:
Parametergleichung:

$$\sigma\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\8\\2\end{pmatrix};\quad r, s \in \mathbb{R}$$

Koordinatengleichung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-12\\60\end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} \qquad \sigma\colon x - y + 5z = 0$$

Volumen der Pyramide:

Es gilt $V_P = \frac{1}{3} A_G \cdot h$, wobei A_G = 31,18 (FE); S(2 | 3 | 11); $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$. Weiterhin:

$$h = \left|\frac{\begin{pmatrix}2\\3\\11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+25}}\right| = \left|\frac{2-3+55}{\sqrt{27}}\right| = 6\sqrt{3}\ \text{(LE) und damit}$$

$V_P = \frac{1}{3}\cdot 31{,}18\cdot 6\sqrt{3}$ (VE) $\approx$ 108,01 (VE).

c) Berechnung von a:

$Q(a\,|\,a\,|\,0)$; $Q \in \overline{AB}$; S(2 | 3 | 11) $\Rightarrow \overrightarrow{SQ}\ \begin{pmatrix}a-2\\a-3\\-11\end{pmatrix}$

$|\overline{SQ}| = d(a) = \sqrt{(a-2)^2 + (a-3)^2 + (-11)^2} = \sqrt{2a^2 - 10a + 134}$

Untersuchung des Abstandes d auf lokales Minimum:

$d^2(a) = 2a^2 - 10a + 134$

Der Ansatz $(d^2(a))' = 4a - 10 = 0$ führt zur Lösung $a = \frac{5}{2}$.

Aus $(d^2(a))'' = 4 > 0$ folgt, daß a eine lokale Minimumstelle ist.

Der Punkt $Q(\frac{5}{2}\,|\,\frac{5}{2}\,|\,0)$ hat also den kürzesten Abstand ($d = \sqrt{121{,}5}$ (LE) $\approx$ 11,02 (LE)) zur Pyramidenspitze S.

d) Koordinatengleichung für ε:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-8\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix} \Rightarrow M(2\,|\,7\,|\,1)$$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix}x-2\\y-7\\z-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8\\2\\2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -8(x-2) + 2(y-7) + 2(z-1) = 0$$

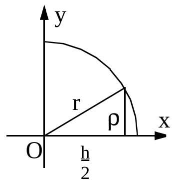
$$\Leftrightarrow -8x + 2y + 2z = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon: 4x - y - z = 0$$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe A7	a)	b)	c)	d)
23 BE	5 BE	7 BE	6 BE	5 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B5: Analysis



Kreisgleichung: $x^2 + r^2 = r^2$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

a) Behauptung: $V_{\text{Restkörper}} = \frac{1}{6}\pi h^3$

Beweis: $V_{\text{Restkörper}} = V_{\text{Teilkugel}} - V_{\text{Teilzylinder}}$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} (r^2 - x^2)\,dx - 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} \rho^2\,dx = 2\pi\left(\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{h}{2}} - \left[\rho^2 x\right]_0^{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= 2\pi\left(r^2 \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{8} - \rho^2 \cdot \frac{h}{2}\right) \quad \left(\text{mit } \rho^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{12}h^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$$

b) Oberflächeninhalt:

$A_{O\,\text{Restk.}} = A_{O\,\text{Kugel}} - 2 \cdot A_{M\,\text{Kappe}} + A_{M\,\text{Zylinder}}$

$$= 4\pi r^2 - 2 \cdot 2\pi r\left(r - \frac{h}{2}\right) + 2\pi\rho h = 4\pi r^2 - 4\pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi\rho h = 2\pi h(r + \rho)$$

Aus $\frac{h^2}{4} + \rho^2 = r^2$ mit $r = 5$ folgt $h = \sqrt{100 - 4\rho^2}$ und damit ergibt sich

$A_{O\,\text{Restk.}} = 2\pi\sqrt{100 - 4\rho^2}\,(5 + \rho)$.

Berechnung von $A_{O\,Restk.}$:

$\rho = 2$ cm: $A_{O\,Restk.} = 2\pi\sqrt{100-16}\,(5+2)\text{ cm}^2 \approx 402{,}9\text{ cm}^2$

$\rho = 3$ cm: $A_{O\,Restk.} = 2\pi\sqrt{100-36}\,(5+3)\text{ cm}^2 \approx 401{,}9\text{ cm}^2$

$\rho = 2$ cm: $A_{O\,Restk.} = 2\pi\sqrt{100-64}\,(5+4)\text{ cm}^2 \approx 339{,}1\text{ cm}^2$

Ermitteln von ρ für max. A_{ORestk}:

$$A'_{ORestk.}(\rho) = 2\pi\left(\frac{-8\rho}{2\sqrt{100-4\rho^2}}(5+\rho) + \sqrt{100-4\rho^2}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{-20\rho - 4\rho^2 + 100 - 4\rho^2}{\sqrt{100-4\rho^2}}\right) = -2\pi\,\frac{8\rho^2 + 20\rho - 100}{\sqrt{100-4\rho^2}}$$

$$A'_{ORestk.}(\rho) = 0 \Leftrightarrow -2\pi\,\frac{8\rho^2+20\rho-100}{\sqrt{100-4\rho^2}} = 0 \text{ bzw. } \frac{8\rho^2+20\rho-100}{\sqrt{100-4\rho^2}} = 0$$

Daraus folgt a) $8\rho^2 + 20\rho - 100 = 0$ sofern b) $\sqrt{100-4\rho^2} \neq 0$

zu a) $0 = \rho^2 + \frac{5}{2}\rho - \frac{25}{4}$ zu b) $\sqrt{100 - 4\cdot\frac{25}{4}} = \sqrt{75} \neq 0$

$$\rho_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{200}{16}}$$

$$\rho_1 = -\frac{5}{4} + \frac{15}{4} = \frac{5}{2} \quad \left(\rho_2 = -\frac{5}{4} - \frac{15}{4} < 0 \text{ entfällt}\right)$$

Für $\rho = 2{,}5$ cm hat der Restkörper maximalen Oberflächeninhalt.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe B5	a)	b)
23 BE	9 BE	14 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B6: Analysis

a) Symmetrie:

$f_a(-x) = -x \cdot \ln\left(\frac{(-x)^2}{a^2}\right) = -x\cdot\ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = -f_a(x)$

G_a ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

b) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = 0$ da $0 \notin D_{f_a}$

$\ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1$, also $x^2 = a^2$ und damit $x_1 = a$ und $x_2 = -a$, d.h., die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $P_1(a \mid 0)$ und $P_2(-a \mid 0)$.

Lokale Extrempunkte:

$f'_a(x) = 1 \cdot \ln(\frac{x^2}{a^2}) + x \cdot \frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{2x}{a^2} = \ln(\frac{x^2}{a^2}) + 2$

$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\frac{x^2}{a^2}) + 2 = 0$, also $\ln(\frac{x^2}{a^2}) = -2$ und damit $e^{-2} = \frac{x^2}{a^2}$ bzw.

$x_{E_1} = \frac{a}{e}$; $x_{E_2} = -\frac{a}{e}$.

$f''_a(x) = \frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{2x}{a^2} = \frac{2}{x}$

$f''_a(\frac{a}{e}) = \frac{2e}{a} > 0$ ($a > 0$ n. Vor); $f_a(\frac{a}{e}) = \frac{a}{e} \cdot \ln(\frac{1}{e^2}) = -\frac{2a}{e}$, also $P_{Min}(\frac{a}{e} \mid -\frac{2a}{e})$

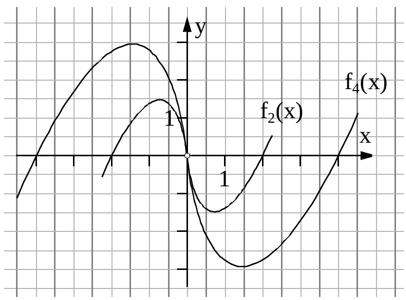
$f''_a(-\frac{a}{e}) = -\frac{2e}{a} < 0$; $f_a(-\frac{a}{e}) = -\frac{a}{e} \cdot \ln(\frac{1}{e^2}) = \frac{2a}{e}$, also $P_{Max}(-\frac{a}{e} \mid \frac{2a}{e})$

Wendepunkte:

$f''_a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 0$. Da $\frac{2}{x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, besitzt kein Graph der Kurvenschar G_a einen Wendepunkt.

Skizzen für G_2 und G_4:

	Nullstellen	Extrempunkte
$f_2(x) = x \cdot \ln(\frac{x^2}{4})$	$x_{N_1} = 2$	$P_{Min}(\frac{2}{e} \mid -\frac{4}{e}) \approx (0{,}74 \mid -1{,}48)$
	$x_{N_2} = -2$	$P_{Max}(-\frac{2}{e} \mid \frac{4}{e}) \approx (-0{,}74 \mid 1{,}48)$
$f_4(x) = x \cdot \ln(\frac{x^2}{16})$	$x_{N_1} = 4$	$P_{Min}(\frac{4}{e} \mid -\frac{8}{e}) \approx (1{,}48 \mid -2{,}95)$
	$x_{N_2} = -4$	$P_{Max}(-\frac{4}{e} \mid \frac{8}{e}) \approx (-1{,}48 \mid 2{,}95)$



Koordinatenursprung $\notin G_a$

d) Winkel α_a:

$f'_a(x) = \ln(\frac{x^2}{a^2}) + 2 \Rightarrow f'_a(a) = \ln 1 + 2 = 2$, also $\tan \alpha_a = 2$, d.h. $\alpha_a \approx 63{,}4°$

e) Gleichung für g:

$P_{Min}(\frac{a}{e} \mid -\frac{2a}{e})$; $x = \frac{a}{e}$, also $a = x \cdot e$ und weiter $g(x) = -\frac{2a}{e} = -\frac{2}{e} \cdot x \cdot e = -2x$.

$P_{Max}(-\frac{a}{e} \mid \frac{2a}{e})$; $x = -\frac{a}{e}$, also $a = -x \cdot e$ und dann $g(x) = \frac{2a}{e} = \frac{2}{e} \cdot (-x \cdot e) = -2x$.

Es ergibt sich für g die Gleichung $y = g(x) = -2x$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe B6	a)	b)	c)	d)	e)
23 BE	10 BE	2 BE	4 BE	4 BE	3 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B7: Geometrie im Raum

a) $\varepsilon_{A,C_t}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} s \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$; $t, r \in \mathbb{R}$

Überprüfung, ob $B(3 \mid 5 \mid -1) \in \varepsilon_{A,C_t}$

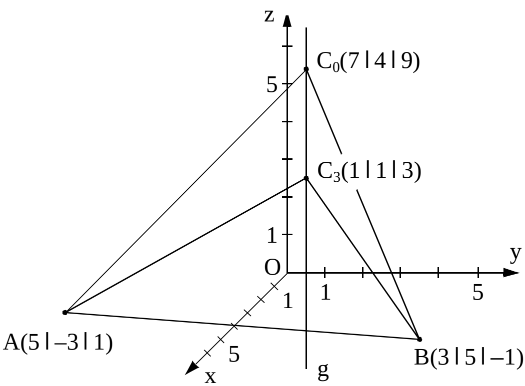
(I) $3 = 7 - 2t + 2r$
(II) $5 = 4 - t + 7r$
(III) $-1 = 9 - 2t + 8r$

Mit (I) – 2 · (II) erhält man $-7 = -1 - 12r$, also $12r = 6$ und somit $r = \frac{1}{2}$.

Aus (III) mit $r = \frac{1}{2}$ folgt $-1 = 9 - 2t + 4$, also $2t = 14$, woraus man $t = 7$ erhält.

Probe durch Einsetzen von r, t in I) liefert $3 = -6$, also eine falsche Aussage.
Also liegen A, B und die Gerade g nicht auf einer gemeinsamen Ebene.

b) Darstellung von ΔABC_0, ΔABC_3 und g:



Nachweis : ΔABC_t ist gleichschenklig:

$$|\overrightarrow{AC_t}| = \sqrt{(7-2t-5)^2+(4-t+3)^2+(9-2t-1)^2}$$
$$= \sqrt{(2-2t)^2+(7-t)^2+(8-2t)^2}$$
$$= \sqrt{9t^2-54t+117}$$
$$|\overrightarrow{BC_t}| = \sqrt{(7-2t-3)^2+(4-t-5)^2+(9-2t+1)^2}$$
$$= \sqrt{(4-2t)^2+(-1-t)^2+(10-2t)^2}$$
$$= \sqrt{9t^2-54t+117}$$

$\Rightarrow |\overline{AC_t}| = |\overline{BC_t}|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h.: ΔABC_t ist gleichschenklig.
Untersuchung: Gibt es ein t, für das ΔABC_t rechtwinklig ist?

Wegen $|\overline{AC_t}| = |\overline{BC_t}|$ könnte nur $\sphericalangle(\overrightarrow{AC_t} \mid \overrightarrow{BC_t})$ ein rechter Winkel sein.

$\sphericalangle(\overrightarrow{AC_t} \mid \overrightarrow{BC_t}) = 90° \Leftrightarrow \overrightarrow{AC_t} \cdot \overrightarrow{BC_t} = 0$, d.h. $\begin{pmatrix}2-2t\\7-t\\8-2t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4-2t\\-1-t\\10-2t\end{pmatrix} = 0.$

$$8-8t-4t+4t^2-7+t-7t+t^2+80-20t-16t+4t^2=0$$
$$9t^2-54t+81=0$$
$$(3t-9)^2=0$$

Das heißt: Für t = 3 ist ΔABC_t rechtwinklig.

c) Gleichung für ε_t:

ε_t: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + p\,\overrightarrow{AB} + q\,\overrightarrow{AC_t}$, also

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2-2t\\7-t\\8-2t\end{pmatrix}; \quad p, q, t \in \mathbb{R}$$

g: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\varepsilon_t \perp g \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2-2t\\7-t\\8-2t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} = 0$

Es ergibt sich $-4+4t-7+t-16+4t=0$, also $9t-27=0$, woraus t = 3 folgt.

$\Rightarrow \varepsilon_3$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}; \quad p, q \in \mathbb{R}$

d) Koordinaten des Schnittpunktes $h \cap \varepsilon_3$:

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 9 - 3r = 5 - 2p - 4q \\ \text{(II)} & 3 - r = -3 + 8p + 4q \\ \text{(III)} & 3 - r = 1 - 2p + 2q \\ \hline \text{(I) + (II)} & 12 - 4r = 2 + 6p \\ \text{(I)} + 2 \cdot \text{(III)} & 15 - 5r = 7 - 6p \\ \hline \end{array}$$

Addieren der beiden unteren Gleichungen ergibt $27 - 9r = 9$, also $r = 2$ und weiter $p = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{1}{3}$.

Probe durch Einsetzen von r, p, q in die Gleichungen liefert wahre Aussagen.

Koordinaten des Schnittpunktes:

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \\ -3 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} \\ 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h und die Ebene ε_3 schneiden einander in $S(3 \mid 1 \mid 1)$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe B7	a)	b)	c)	d)
23 BE	5 BE	8 BE	5 BE	5 BE

Abiturprüfung Leistungskurs

1996 / 97

Gymnasium

Sachsen

Hinweis: Ab Schuljahr 1996/97 gilt für das Fach Mathematik folgender Modus der schriftlichen Abiturprüfung:
- *Jeder Schüler bearbeitet je eine Pflichtaufgabe aus den Teilen A (Analysis), B (Analytische Geometrie und lineare Algebra) und C (Stochastik). Außerdem bearbeitet er eine von zwei Wahlaufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad. Dabei entscheidet er sich im Leistungskurs entweder für die Wahlaufgabe zur Geometrie / Algebra oder für die Wahlaufgabe zur Stochastik.*
- *Die Wahlaufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad sind jeweils die 2. Aufgabe der Teile B (Geometrie / Algebra) und C (Stochastik).*

Aufgabe A1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{4x - 4}$ $(x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an, und ermitteln Sie für den Graphen der Funktion f die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
Bestimmen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie die Art der Extrema, und untersuchen Sie den Graph der Funktion f auf die Existenz von Wendepunkten.
Hinweis: Es gilt: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq 1)$.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Umgebung der Polstelle.
Ermitteln Sie eine Gleichung der linearen Funktion, deren Graph Asymptote an den Graph der Funktion f ist.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-4 \leq x \leq 6$.

b) An den Graph der Funktion f existieren Tangenten, welche durch den Koordinatenursprung verlaufen.
Ermitteln Sie rechnerisch für jede dieser Tangenten je eine Gleichung.

c) Der Graph der Funktion f und die Geraden mit den Gleichungen
$$y = \tfrac{1}{4}(x + 3) \quad (x \in \mathbb{R}),\ x = 3 \text{ und } x = z \quad (z \in \mathbb{R}, z > 3)$$
begrenzen für jeden Wert z jeweils eine Fläche A(z) vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A(z).
Berechnen den Wert z, für den der Inhalt dieser Fläche 1 beträgt.
Ermitteln Sie $\lim_{z \to \infty} A(z)$.

d) Für jedes u $(u \in \mathbb{R}, u > 1)$ wird durch die Punkte A(0; 0), B(u; 0) und C(u; f(u)) ein Dreieck bestimmt.
Ermitteln Sie den Wert u, für den das zugehörige Dreieck den kleinsten Flächeninhalt aller so gebildeten Dreiecke hat.

Aufgabe B1: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein schiefes Prisma ABCDEFGH mit der Grundfläche ABCD durch die Eckpunkte $A(4; -2; -3)$, $B(8; 2; -1)$, $C(6; 3; 1)$, $D(2; -1; -1)$ und $H(1; 0; 5)$ gegeben.
Die Punkte D und H gehören zu ein und derselben Körperkante.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte des Prismas.
Zeichnen Sie dieses Prisma in ein Koordinatensystem.

b) Stellen Sie für die Ebene, in der die Grundfläche ABCD liegt, eine Gleichung in parameterfreier Form auf.

c) Weisen Sie nach, daß die Grundfläche ABCD ein Rechteck ist.
Berechnen Sie das Volumen des Prismas ABCDEFGH.

d) Es existieren genau zwei Kugeln mit dem Radius $\frac{3}{2}\sqrt{30}$, auf denen die Punkte A, B, C, und D liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes einer dieser Kugeln.

Aufgabe B2: Geometrie / Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0; -1; 2)$, $B(3; 3; 2)$, $D(-4; 2; 2)$ und $E(0; -1; 7)$ sowie die Ebenen ε_t durch
$(2t + 9)x + (-4t + 26)y + (10t - 21)z = 44t \quad (t \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, daß ein Punkt C existiert, so daß das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.

b) Der Körper ABCDEFGH ist ein Würfel.
Jede Ebene ε_t $(t \neq \frac{21}{10})$ schneidet die Ebene, in der die Seitenfläche BCGF des Würfels liegt, in ein und derselben Geraden.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

c) Dem Würfel ABCDEFGH ist eine Kugel einbeschrieben, die jede Seitenfläche des Würfels berührt.
Die Ebene ε_1 schneidet diese Kugel in einen Kreis.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius dieses Schnittkreises.

Aufgabe C 1: Stochastik

Bei einem Sportfest wird eine Schule durch sechs Schüler der Klasse 8, acht Schüler der Klasse 9 und vier Schüler der Klasse 10 vertreten.

a) Vor der Eröffnung werden zwei Schüler dieser Schule ausgelost, die die Sportgeräte auf die Wettkampfstätten zu verteilen haben.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
Ereignis A: Beide Schüler sind Schüler der Klasse 8.
Ereignis B: Ein Schüler ist aus Klasse 9, und ein Schüler ist aus Klasse 10.

b) Zur Eröffnung des Sportfestes stellen sich alle Teilnehmer dieser Schule in einer Linie auf.
Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es, wenn nur die Zugehörigkeit zu den Klassen interessiert?
Wie groß ist bei zufälliger Anordnung der Teilnehmer in der Linie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die vier Schüler der Klasse 10 nebeneinander stehen?

Ein Wettbewerb ist der Ballzielwurf. Peters Trefferwahrscheinlichkeit sei bei jedem Wurf 0,3.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Peter bei 10 Würfen genau 5 Treffer erzielt.
Wie oft muß Peter mindestens werfen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er wenigstens einmal trifft, mindestens 0,95 beträgt?

Ein weiterer Wettbewerb ist der Weitsprung.

d) Ein Sportlehrer behauptet, er könne beim Anlauf eines Schülers schon vier Meter vor dem Erreichen des Absprungbalkens in mindestens 90% aller Fälle voraussagen, ob der Schüler übertritt oder nicht.
Die Hypothese des Sportlehrers wird bei einem Sportfest getestet, bei dem 50 Sprünge durchgeführt werden.
Wie oft muß der Sportlehrer die richtige Voraussage treffen, damit bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% seine Hypothese nicht abgelehnt werden kann?

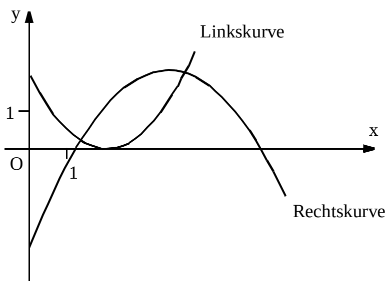
Aufgabe C 2: Stochastik (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Bei einem Flugsimulator wird ein Flugverlauf durch einen Computer simuliert. Für die Festlegung der Flugroute wird das gedachte Übungsgebiet mit einem x-y-Koordinatensystem unterlegt. Der Beginn des „Fluges“ ist stets auf der y-Achse.
Die möglichen Flugrouten werden durch die Graphen der Funktionen f_a mit
$y = f_a(x) = \frac{1}{a}x^2 - ax + a$ $\left(a \in \{-3; \frac{1}{2}; 2; 3\},\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\right)$ beschrieben.

Der Parameter a wird vor jedem simulierten Flug neu und unabhängig vom vorangegangenen Flug durch den Computer mit folgenden Wahrscheinlichkeiten ermittelt: $P(a = -3) = 0{,}3$; $P(a = \frac{1}{2}) = 0{,}1$; $P(a = 2) = 0{,}4$ und $P(a = 3) = 0{,}2$.

a) Vier Personen absolvieren nacheinander je genau drei „Flüge" am Flugsimulator.
Wie viele verschiedene Reihenfolgen von Flugrouten sind dabei möglich?

b) In der Skizze sind mögliche Flugrouten mit einer Rechtskurve und einer Linkskurve dargestellt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, daß bei 12 simulierten Flügen höchstens zwei Rechskurven durchflogen werden.



c) Schneidet bzw. berührt eine Flugroute die x-Achse, wird durch den Computer eine Sonderaktion (z.B. Ausfall eines Triebwerkes) simuliert.
Wie viele Sonderaktionen sind durchschnittlich bei 12 simulierten Flügen zu erwarten?

d) Bei einer Veränderung des Computerprogramms werden auch die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten des Parameters a verändert.
Herr Meyer behauptet, die Wahrscheinlichkeit, eine Rechtskurve zu „durchfliegen", sei mindestens 0,5.
Bei einem Test tritt in 6 von 20 Versuchen eine Flugroute mit einer Rechtskurve auf. Herr Meyer verwirft deshalb seine Behauptung.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art bei diesem Test.

Erwartungsbild zu Aufgabe A1: Analysis

a) Definitionsbereich: $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 1\}$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse: $S_x(-1;\ 0)$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse: $S_y(0;\ -\frac{1}{4})$
Lokale Extrema:

$f'(x) = \frac{4x^2 - 8x - 12}{(4x-4)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$; $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{E_1} = -1;\ x_{E_2} = 3$

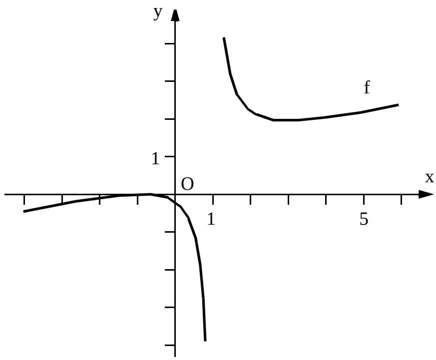
$f''(-1) = -0{,}25 \Rightarrow$ lokales Maximum;
$f''(3) = 0{,}25 \Rightarrow$ lokales Minimum
Koordinaten der lokalen Extrempunkte: $P_{Max}(-1;\ 0)$; $P_{Min}(3;\ 2)$
Wendepunkte:
Da $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in D_f$ gilt, besitzt der Graph der Funktion f keine Wendepunkte.

Polstelle: $x_P = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \infty$

Asymptote: $(x^2 + 2x + 1) : (4x - 4) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{4}{4x-4}$

$\Rightarrow$ Gleichung der Asymptote a: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Graph:



b) Gleichung der Tangenten: $y = mx$ (Geraden durch den Koordinatenursprung) (1)

$$m = f'(x) = \frac{4x^2 - 8x - 12}{(4x-4)^2} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt für die Abszisse des Berührungspunktes:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{4x - 4} = \frac{4x^2 - 8x - 12}{(4x-4)^2} \cdot x \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{3}$$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow$ Tangente t_1: $y = 0$; $f'(\frac{1}{3}) = -2 \Rightarrow$ Tangente t_2: $y = -2x$

c) $A(z) = \int_3^z \left(\frac{x^2+2x+1}{4x-4} - \frac{1}{4}(x+3)\right) dx = \int_3^z \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4x-4} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) dx$

$= [\ln|4x-4|]_3^z = \ln|4z-4| - \ln 8 = \ln\frac{4z-4}{8} = \ln\frac{z-1}{2}$

$\ln\frac{z-1}{2} = 1 \Rightarrow e^1 = \frac{z-1}{2}$ und damit $z = 2e + 1$

$\lim\limits_{z\to\infty} A(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \ln\frac{z-1}{2} = \infty$

d) $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = \frac{u^3+2u^2+u}{8u-8}$ $(u \in \mathbb{R}, u > 1)$; $A'(u) = \frac{2u^3-u^2-4u-1}{8(u-1)^2}$

$0 = 2u^3 - u^2 - 4u - 1 \Rightarrow u_1 = -1$ (entfällt) und wegen

$(2u^3 - u^2 - 4u - 1) : (u + 1) = 2u^2 - 3u - 1$ gilt: $0 = 2u^2 - 3u - 1$ mit

$u_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4} = 1{,}7808$ (trifft zu) und $u_3 = \frac{3-\sqrt{17}}{4} = -0{,}2808$ (entfällt).

Nachweis des lokalen Minimums:

$A''(u) = \frac{2u^3-6u^2+6u+6}{8(u-1)^3}$; $A''(u_2) = 2{,}35$; d.h. : lokales Minimum

Das lokale Minimum ist auch globales Minimum, da $\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ u>1}} f(u) = \infty$ und $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = \infty$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse; Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse; 1. Ableitung; Extremstellen; Art der Extrema; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Nachweis der Nichtexistenz von Nullstellen; Verhalten an der Polstelle; Ansatz für Gleichung der Asymptote; Gleichung der Asymptote; Graph	12 BE
b)	Ansatz; quadrat. Gleichung; Lösungen der quadrat. Gleichung; Gleichung einer Tangente, Gleichungen beider Tangenten	5 BE
c)	Ansatz für Flächeninhalt A(z); Stammfunktion; Flächeninhalt A(z); Ansatz für z; Wert für z; Grenzwert	6 BE
d)	Ansatz für Zielfunktion; 1. Ableitung; eine Lösung der kubischen Gleichung; quadrat. Gleichung; Lösungen der quadrat. Gleichung; Wert für u; Nachweis des lokalen Minimums	7 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B1: Geometrie / Algebra

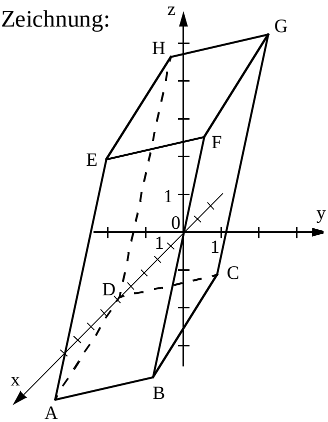
a) $\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DH} \Rightarrow E(3; -1; 3)$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DH} \Rightarrow F(7; 3; 5)$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DH} \Rightarrow G(5; 4; 7)$

Zeichnung:



b) Ebene ε_{ABC}: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(r, s \in \mathbb{R})$

Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ergibt sich wegen $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$:

(I) $4x + 4y + 2z = 0$ und (II) $2x + 5y + 4z = 0$. Daraus folgt mit $x = 1$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow x - 2y + 2z = k$ und mit $A(4; -2; -3)$: $x - 2y + 2z = 2$

ε_{ABC}: $x - 2y + 2z = 2$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d.h.: ABCD ist ein Parallelogramm.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 0$, d.h. : ABCD ist ein Recht-eck.

Volumen: $V = A_G \cdot h$

$$A_G = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6; \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \Rightarrow A_G = 18 \text{ (FE)}$$

$$h = |(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{n}_0|;\; h = \left|\begin{pmatrix}-3\\2\\8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\right| = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

$$V = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot h = 6 \cdot 3 \cdot 3 \text{ (VE)} = 54 \text{ (VE)}$$

d) Mittelpunkt der Grundfläche: $P_0(5; \frac{1}{2}; -1)$

Gerade durch P_0 senkrecht zur Ebene ε_{ABC}:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0{,}5\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow M\begin{pmatrix}5 + t_0\\0{,}5 - 2t_0\\-1 + 2t_0\end{pmatrix}$$

Abstand des Kugelmittelpunktes M zum Punkt A:

$$|\overline{AM}| = \sqrt{(1 + t_0)^2 + (2{,}5 - 2t_0)^2 + (2 + 2t_0)^2} = 1{,}5 \cdot \sqrt{30}$$

$$(1 + t_0)^2 + (2{,}5 - 2t_0)^2 + (2 + 2t_0)^2 = 67{,}5 \Rightarrow t_{0_1;0_2} = \pm\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow M_1(\tfrac{15}{2}; -\tfrac{9}{2}; 4) \text{ bzw. } M_2(\tfrac{5}{2}; \tfrac{11}{2}; -6)$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten der Eckpunkte; Zeichnung	2 BE
b)	Ansatz; Gleichung in parameterfreier Form	2 BE
c)	Nachweis, daß ABCD Parallelogramm ist; Nachweis, daß ABCD Rechteck ist; Volumen des Prismas	3 BE
d)	Gleichung der Geraden, auf der die Mittelpunkte der beiden Kugeln liegen; Parameterwert für einen Mittelpunkt; Koordinaten eines Mittelpunktes	3 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B2: Geometrie / Algebra
(erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16 + 9 + 0} = 5;\; |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 9 + 0} = 5 \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}|$ (1)

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -12 + 12 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt: Es existiert ein Punkt C, so daß das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(-1; 6; 2)$

b) Ebene ε^* durch BCGF: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$

Gleichung der Ebene ε^*: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$ $(u, s \in \mathbb{R})$ bzw. $3x + 4y = 21$

Mit $t = 0$ erhält man ε_0: $9x + 26y - 21z = 0$

$$\varepsilon^* \cap \varepsilon_0: \quad \begin{array}{rl} \text{(I)} & 3x + 4y = 21 \\ \text{(II)} & 9x + 26y - 21z = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$-3 \cdot \text{(I)} + \text{(II)} \qquad 14y - 21z = -63 \Rightarrow z = 3 + \tfrac{2}{3}y$$

Mit $y = s$ gilt dann $z = \frac{2}{3}s + 3$; $x = -\frac{4}{3}s + 7$

Gleichung der Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$ $(s' \in \mathbb{R})$

c) Der Mittelpunkt M der Kugel K ist Mittelpunkt jeder Raumdiagonalen des Würfels, z.B. der Diagonalen $\overline{CE}$.

$M(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{9}{2})$

Die Länge des Radius r der Kugel entspricht der Hälfte einer Seitenkante des Würfels.

$r = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 9} = \frac{5}{2}$

Gleichung der Kugel K: $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 + (z - \frac{9}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$

Schnittkreis der Ebene ε_1 mit der Kugel K:

Gleichung der Ebene ε_1: $11x + 22y - 11z = 44$ bzw. $x + 2y - z = 4$

Der Mittelpunkt M' des Schnittkreises k liegt auf einer Geraden ℓ, die senkrecht zur Ebene ε_1 liegt und durch den Kugelmittelpunkt M verläuft,

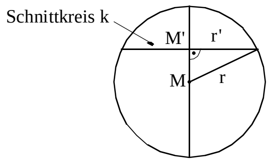
Gleichung der Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $(t' \in \mathbb{R})$

Schnittpunkt der Geraden ℓ und der Ebene ε_1:

$(-\frac{1}{2} + t')x + 2(\frac{5}{2} + 2t')y - (\frac{9}{2} - t')z = 4 \Rightarrow 6t' = 4 \Rightarrow t' = \frac{2}{3}$

Einsetzen in Gleichung der Gerade ℓ ergibt : $M'(\frac{1}{6}; \frac{23}{6}; \frac{23}{6})$

Radius r' des Schnittkreises:
Nach Satz des Pythagoras gilt:



$r' = \sqrt{r^2 - (d(M;M'))^2}$ (s. Skizze)

$d(M;M') = \sqrt{\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{8}{6}\right)^2 + \left(-\frac{4}{6}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

$r' = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{43}{12}} = \frac{1}{6}\sqrt{129}$

Bewertungsvorschlag:

a) Orthogonalitätsnachweis und Nachweis der gleichen Seitenlängen; Schlußfolgerung für Existenz des Punktes C; Koordinaten des Punktes C — 3 BE

b) Gleichung der Ebene durch BCGF; Ansatz für Gleichung der Schnittgeraden; Lösung des Gleichungssystems; Gleichung der Schnittgeraden — 4 BE

c) Koordinaten des Mittelpunktes und Radius der Kugel ; Koordinaten des Mittelpunktes des Schnittkreises; Radius des Schnittkreises — 3 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 1: Stochastik

a) $P(A) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{30}{306} = 0{,}0980$

$P(B) = \frac{8}{18} \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{18} \cdot \frac{8}{17} = 2(\frac{8}{18} \cdot \frac{4}{17}) = 0{,}2092$

b) Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten: $\frac{18!}{6! \cdot 8! \cdot 4!} = 9\,189\,180$

Der erste Schüler der Klasse 10 kann an 1., 2., …, 15. Stelle stehen.
Es gibt also 15 Möglichkeiten, die Gruppe der vier Schüler zu plazieren.

Für die restlichen Schüler verbleiben $\binom{14}{8}$ verschiedene Anordnungsmöglichkeiten, wenn nur die Zugehörigkeit zu Klassen interessiert.

C sei das Ereignis: Alle Schüler der Klasse 10 stehen nebeneinander.

$|C| = 15 \cdot \binom{14}{8} = 45\,045$

Zu C gehören 45 045 verschiedene Ergebnisse.

$P(C) = \frac{45\,045}{9\,189\,180} = 0{,}0049$

c) X … Anzahl der Treffer bei 10 Würfen.
X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,3.

$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}1029$

E_n sei das Ereignis: Wenigstens ein Treffer bei n Würfen.

$P(E_n) = 1 - P(\overline{E_n}) = 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}95$

$\Rightarrow 0{,}05 \geq 0{,}7^n$, also $\lg 0{,}05 \geq n \cdot \lg 0{,}7$ bzw. $\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}7} \leq n$ (wegen $\lg 0{,}7 < 0$)

$\Rightarrow n \geq 8{,}4$

Peter muß mindestens 9 mal werfen.

d) H_0: $p \geq 0{,}9$
Anzahl n der Versuchsdurchführungen: n = 50
Y…Anzahl der richtigen Vorhersagen des Sportlehrers
Y ist im Grenzfall binomialverteilt mit n = 50 und p = 0,9.
Einseitiger Test: (H_0 wird für kleine Werte von Y abgelehnt.)
Kritischer Bereich: K = {0; 1; …; g}
$P(Y < g) \leq 0{,}05$ (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$); $P(Y \geq g) > 0{,}95$
Ablesen aus Tafel ergibt: g = 40. Daraus folgt: Mindestens 41mal muß der Sportlehrer die richtige Voraussage treffen.

Bewertungsvorschlag:

a)	Wahrscheinlichkeit P(A); Wahrscheinlichkeit P(B)	2 BE
b)	Anzahl; Anzahl der günstigen Ergebnisse; Wahrscheinlichkeit	3 BE
c)	Wahrscheinlichkeit; Ansatz; Bestimmung der Mindestanzahl der Würfe	3 BE
d)	Ansatz; Ergebnis	2 BE
		10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe C 2: Stochastik
(erhöhter Schwierigkeitsgrad)

a) Möglichkeiten für einen Flugschüler: $4^3 = 64$

Möglichkeiten für vier Flugschüler: $64^4 = 16\,777\,216$

Lösungsvariante: zwölfmaliges Ziehen aus vier Elementen mit Zurücklegen

$4^{12} = 16\,777\,216$

b) Analyse des Zufallsversuches: Die Flugrouten entsprechen den Parabeln

$f_{-3}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 3$; $f_{0,5}(x) = 2x^2 - 0{,}5x + 0{,}5$; $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$f_3(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 3$

Nur für $a = -3$ ist der Graph der Funktion f_a eine nach unten geöffnete Parabel, d.h., nur in diesem Fall entspricht die Flugroute einer Rechtskurve. Die Wahrscheinlichkeit für eine Rechtskurve beträgt also 0,3 (da $P(a = -3) = 0{,}3$).

Y … Anzahl der Rechtskurven bei zwölf simulierten Flügen
Y ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = 0{,}3$.

$$P(Y \le 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$$
$$= 0{,}7^{12} + 12 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{10} \approx 0{,}2528$$

c) Analyse des Zufallsversuches: Die Anzahl der Sonderaktionen entspricht der Anzahl der Nullstellen des betreffenden Graphen.

$$\frac{1}{a}x^2 - ax + a = 0 \Rightarrow x_{1;2} = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{4a^2}{4}}$$

f_a hat genau zwei Nullstellen für $|a| > 2$ (trifft zu für $a = -3$ und für $a = 3$), genau eine Nullstelle für $|a| = 2$ (trifft zu für $a = 2$) und keine Nullstelle für $|a| < 2$ (trifft zu für $a = 0{,}5$).
Dies ergibt also genau zwei Sonderaktionen für $a = -3$ und $a = 3$, genau eine Sonderaktion für $a = 2$ und keine Sonderaktion für $a = 0{,}5$.

X … Anzahl der Sonderaktionen je Flug
Die Zufallsgröße X ist wie folgt verteilt:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,5

Erwartungswert $E(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}4$
Die erwartete Anzahl der Sonderaktionen beträgt $1{,}4 \cdot 12 = 16{,}8$.

d) H_0: $p \geq 0{,}5$
Z … Anzahl der Rechtskurven bei 20 simulierten Flügen
Bei wahrer Nullhypothese ist Z im Grenzfall binomialverteilt mit $p = 0{,}5$ und $n = 20$.
Kritischer Bereich: $K = \{0; 1; \ldots; 6\}$; $\alpha = P(Z \leq 6) = 0{,}0577$
Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art beträgt 0,0577.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ergebnis	1 BE
b)	Wahrscheinlichkeit für das „Durchfliegen“ einer Rechtskurve; Ansatz mit Binomialverteilung; Wahrscheinlichkeit	3 BE
c)	Ansatz; Anzahl der Sonderaktionen in Abhängigkeit von a; Verteilung der Zufallsgröße; Ergebnis	4 BE
d)	Ansatz; Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art	2 BE
		10 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1996 / 97

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis: Die Lehrkraft wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten L1, L2 und L3 für den Kurs zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1: Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch

$y = f_a(x) = (\ln x)^2 - a \cdot \ln x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, x > 0, a \in \mathbb{R}, a > 0.$

Die Graphen der Funktionen der Schar in einem kartesischen Koordinatensystem seien mit G_a bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f_2.
Ermitteln Sie Art und Lage des lokalen Extrempunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen G_2. [Ergebnis zur Kontrolle: $W(e^2 \mid 1)$]
Zeichnen Sie den Graphen G_2 für $0 < x \leq 12$.

b) Die Parallele zur x-Achse durch den Punkt W (siehe Aufgabe a) schneidet den Graphen G_2 in einem weiteren Punkt P.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes.

An den Graphen G_2 wird im Punkt P die Tangente t_1 und im Wendepunkt W die Tangente t_2 gelegt. Die beiden Tangenten t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt S. Zeigen Sie, daß das Dreieck WPS stumpfwinklig ist.

Am Graphen G_2 existiert eine Tangente t_3, deren Anstieg die Hälfte des Anstiegs der Tangente t_2 beträgt. Der Berührungspunkt dieser Tangente t_3 am Graphen G_2 sei der Punkt Q.
Die Abszisse des Punktes Q soll mit dem allgemeinen Iterationsverfahren berechnet werden. Leiten Sie dafür die nachfolgend genannte Iterationsvorschrift her, und berechnen Sie die Abszisse auf Hundertstel genau.

$x_{n+1} = e^{\frac{1}{2e^2}x_n + 1}$ (Das Konvergenzverhalten ist nicht nachzuweisen.)

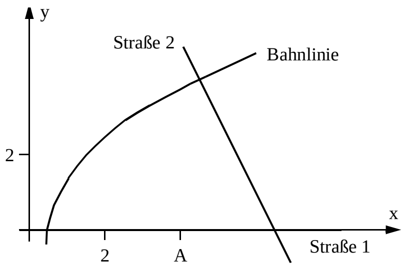
c) Untersuchen Sie die Funktionen der Schar f_a auf die Existenz von Nullstellen.

Der Graph G_2, jeder weitere Graph G_a und die Gerade mit der Gleichung $x = e^2$ schließen jeweils eine Fläche vollständig ein.
Ermitteln Sie die Werte des Parameters a für den Fall, daß die Maßzahl des Flächeninhalts $A = e^2 + 1$ ist.

(Hinweis: $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + c$)

Aufgabe 1.2: Analysis

Ein in ebenem Gelände liegender Freizeitpark wird durch zwei geradlinig verlaufende Straßen und eine Bahnlinie vollständig begrenzt.
Die Lagebeschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, in dem eine Einheit 100 m im Gelände entspricht. Die Breite der Straßen und der Bahnlinie bleibt dabei unberücksichtigt (siehe Skizze).



Die Straße 1 verläuft auf der Abszissenachse. Die Straße 2 kreuzt die Bahnlinie im Punkt S(4,5 | 4) rechtwinklig und schneidet die Straße 1 im Punkt P(6,5 | 0). Die Bahnlinie wird im Bereich des Freizeitparkes durch die Gleichung einer Funktion der Form $y = f(x) = \sqrt{ax + b}$ beschrieben.

a) Ermitteln Sie je eine Gleichung für die Funktion, die den Verlauf der Straße 2 bzw. der Bahnlinie im Bereich des Freizeitparkes beschreibt.
[Teilergebnis zur Kontrolle: $y = f(x) = \sqrt{4x - 2}$]
Bestimmen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Straßen 1 und 2.

b) Die Bahnlinie erhält einen Haltepunkt B, dessen Entfernung zum Punkt A(4 | 0) minimal ist.
Berechnen Sie diese Entfernung.

Ein geradliniger Zugangsweg zum Haltepunkt B von der Straße 2 soll tangential zur Bahnlinie angelegt werden.
Stellen Sie eine Gleichung der Funktion auf, die den Verlauf des Weges beschreibt.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Freizeitparkes in Hektar.

Der Freizeitpark soll durch einen rechtwinklig zur Straße 1 verlaufenden, geradlinigen Weg in zwei flächengleiche Stücke geteilt werden.
Berechnen Sie für diesen Fall die Koordinaten des Punktes Z, in dem der Weg in die Straße 1 mündet.

Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die
Punkte $A(1 \mid 2 \mid 3)$, $B(3 \mid 4 \mid 4)$, $C(-1 \mid 3 \mid 5)$ und $D(3 \mid 6 \mid 9)$ sowie die
Ebene E_1: $8x_1 - 19x_2 + 13x_3 - 18 = 0$
gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen die Ebene E_2.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene E_2.
[Ergebnis zur Kontrolle: z.B. $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$]
Weisen Sie nach, daß der Punkt D nicht in der Ebene E_2 liegt.

Die Fläche des Dreiecks ABC ist die Grundfläche eines Prismas ABCDEF.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte E und F für den Fall, daß $\overline{AD}$ eine Seitenkante dieses Prismas ist.
Zeigen Sie, daß das Prisma ABCDEF ein schiefes Prisma ist.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Prismas.

b) Zeigen Sie, daß die Kante $\overline{EF}$ des Prismas ABCDEF (siehe Aufgabe a) in der Ebene E_1 liegt.

Die Seitenkante $\overline{AD}$ des Prismas wird von der Ebene E_1 im Punkt G geschnitten.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G.

Bei dem Schnitt des Prismas durch die Ebene E_1 entstehen zwei Körper.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Volumina dieser Körper.

c) Die Fläche des Dreiecks ABC soll nun Grundfläche eines geraden Prismas ABCPQR sein, das volumengleich mit dem schiefen Prisma ABCDEF (siehe Aufgabe a) ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte P, Q und R für ein solches Prisma.

Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie

In einem ebenen kartesischen x_1x_2-Koordinatensystem sind die Punkte $A(2 \mid 6)$, $B(-1 \mid -3)$, $C(6 \mid -2)$ gegeben.

a) Die Punkte A und C bestimmen eine Gerade g.
Ermitteln Sie die Normalform der Gleichung der Geraden g und den Betrag des Abstandes des Punktes B von der Geraden g.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und die Maßzahl des Radius des Umkreises k des Dreiecks ABC.
[Teilergebnis zur Kontrolle: $M(2 \mid 1)$]

b) Das bisher benutzte Koordinatensystem wird zu einem räumlichen kartesischen $x_1x_2x_3$-Koordinatensystem erweitert.
In diesem Koordinatensystem ist eine Kugel K_1 durch
$$K_1: (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 16$$
gegeben.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g (siehe Aufgabe a) in diesem Koordinatensystem an.
Zeigen Sie, daß die Gerade g die Kugel K_1 nicht durchstößt.

Der Kreis k (siehe Aufgabe a) sei ein Kreis einer Kugel K_2. Der Kreis und die Kugel haben denselben Mittelpunkt.
Geben Sie eine Gleichung der Kugel K_2 an.
Zeigen Sie, daß die Kugeln K_1 und K_2 einander schneiden.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene, in der der Schnittkreis der Kugeln K_1 und K_2 liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Schnittkreises der Kugeln K_1 und K_2.

Aufgabe 3.1: Wahrscheinlichkeitsrechnung

In einer Studie zu den Auswirkungen überlauter Musik in Diskotheken wird die Aussage getroffen, daß 20% der Jugendlichen zwischen 16 und 18 Jahren Hörschäden aufweisen. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß diese Aussage zutrifft.

a) In der Kursstufe eines Gymnasiums lernen 100 Schüler dieser Altersgruppe.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß höchstens 20 Schüler Hörschäden aufweisen.

b) Eine Diskothek wird von 500 Jugendlichen besucht.
Ermitteln Sie, wie viele Jugendliche höchstens Hörschäden mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60% aufweisen.
(Hinweis: Approximieren Sie die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung.)

c) Die Aussage der o.g. Studie wird angezweifelt, und es wird davon ausgegangen, daß höchstens 10% der Jugendlichen Hörschäden aufweisen. Dazu soll nunmehr eine Gruppe von 50 Jugendlichen untersucht werden.
Ermitteln Sie zu der Hypothese: “Höchstens 10% der Jugendlichen weisen Hörschäden auf.“ einen möglichst großen Ablehnungsbereich auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$.

Aufgabe 3.2: Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch

$$y = f_a(x) = \frac{2x + a}{e^{2x}}, \quad x, a \in \mathbb{R}, a > 0$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen der Schar f_a mit den Koordinatenachsen.

Jeder Graph der Funktionen der Schar f_a hat genau einen lokalen Hochpunkt. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes in Abhängigkeit von a.

b) Jeder Graph der Funktionen der Schar f_a und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche in Abhängigkeit von a.
[Ergebnis zur Kontrolle: $0{,}5 \cdot (e^a - a - 1)$]

Die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche beträgt nun 10.
Berechnen Sie den dazugehörigen Wert des Parameters a nach dem Newton-Verfahren auf drei Stellen nach dem Komma genau.

Aufgabe 3.3: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Kurvenschar K_c durch die Gleichung

$$(*)\ c^2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + \left(\frac{1}{2} - c\right)x_2^2 = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Für $c = \frac{1}{4}$ erhält man die Ellipse E.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes, der Brennpunkte und der Scheitelpunkte der Ellipse E. [Teilergebnis zur Kontrolle: $e = 2\sqrt{3}$]
Zeichen Sie die Ellipse E. Konstruieren Sie dazu mindestens sechzehn Punkte der Ellipse E.

b) Ermitteln Sie die Art des Kegelschnittes, der durch die Gleichung (*) für c = 0 beschrieben wird, und charakterisieren Sie dessen Lage im Koordinatensystem.
Ermitteln Sie die Werte des Parameters c für folgende Fälle:
(1) Die Kurven sind Ellipsen.
(2) Die Kurven sind Kreise.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1: Analysis

Funktionenschar f_a: $y = f_a(x) = (\ln x)^2 - a \cdot \ln x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, x > 0, a \in \mathbb{R}, a > 0.$

a) Nullstellen der Funktion f_2:

Funktion f_2: $y = f_2(x) = (\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 1$

$0 = (\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 1 = (\ln x - 1)^2$, also $0 = \ln x - 1$ und damit $\ln x = 1$,

woraus $x_0 = e^1$ folgt.

Ableitungen von f_2:

$f_2'(x) = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x - 1)$

$f_2''(x) = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2}(\ln x - 1) + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}(\ln x - 1) + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2} \cdot (2 - \ln x)$

$f_2'''(x) = 2 \cdot (-2) \cdot x^{-3}(2 - \ln x) + \frac{2}{x^2} \cdot (-\frac{1}{x})$

$= -\frac{4}{x^3}(2 - \ln x) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(2\ln x - 4 - 1) = \frac{2}{x^3}(2\ln x - 5)$

Lokale Extrempunkte des Graphen von f_2:

$f_2'(x) = 0$: $2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x - 1) = 0 \Rightarrow$ (wegen $x > 0$): $0 = \ln x - 1$, also $x_E = e$

$f_2''(e) = \frac{2}{e^2} \cdot (2 - \ln e) = \frac{2}{e^2} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(e \mid f_2(e)) = T(e \mid 0)$

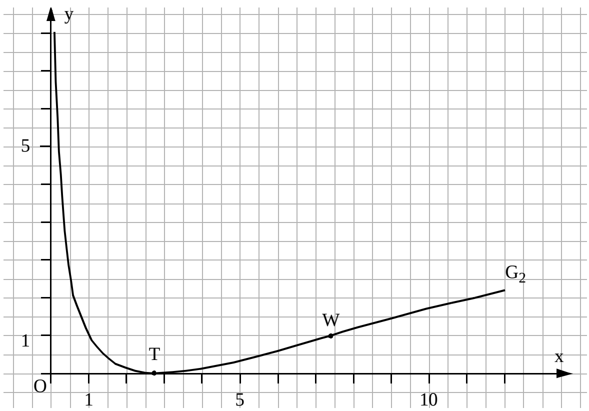
Koordinaten des Wendepunktes W der Funktion $f_2(x)$:

$f_2''(x) = 0$: $\frac{2}{x^2} \cdot (2 - \ln x) = 0 \Rightarrow$ (wegen $x > 0$): $0 = 2 - \ln x$, also $x_W = e^2$

$f_2'''(e^2) = \frac{2}{(e^2)^3} \cdot (2\ln e^2 - 5) = \frac{2}{e^6} \cdot (-1) \neq 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkt $W(e^2 \mid f_2(e^2)) = W(e^2 \mid 1)$

Graph der Funktion $f_2(x)$ für $0 < x \leq 12$:



b) Schnittpunkt zwischen G_2 und der Parallelen zur x-Achse durch W:

$f_2(x) = (\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 1$; $W(e^2 \mid 1)$

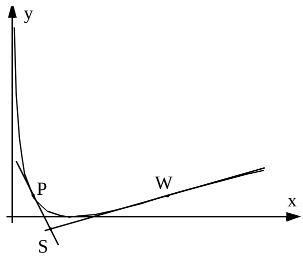
Gerade g ∥ x-Achse mit $W \in g$: $y = 1$, d.h.: $1 = (\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 1$, also

$0 = (\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x = \ln x \cdot (\ln x - 2)$

$\Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 1; x_2 = e^2 = x_W, y_2 = 1 = y_W$: Der Schnittpunkt ist $P(1 \mid 1)$

Nachweis, daß ein durch P, W und den Tangentenschnittpunkt S entstandenes Dreieck PWS stumpfwinklig ist:

$P(1 \mid 1)$; $W(e^2 \mid 1)$; $f_2'(x) = \frac{2}{x}(\ln x - 1)$



$f_2'(1) = -2$; $f_2'(e^2) = \frac{2}{e^2}$

$t_P = t_1$: $\frac{y-1}{x-1} = -2$; $t_W = t_2$: $\frac{y-1}{x-e^2} = \frac{2}{e^2}$

Schnittwinkel zweier Geraden:

$\alpha = \tan \measuredangle(t_1, t_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$

$\tan\alpha = \frac{-2 - \frac{2}{e^2}}{1 + (-2) \cdot \frac{2}{e^2}} \approx -4{,}95 \Rightarrow \alpha = 101°$

Das Dreieck WPS besitzt einen stumpfen Winkel im Tangentenschnittpunkt.
Weiterer Lösungsweg: Über die Anstiege der Geraden die Innen-/Außenwinkel ermitteln.

Koordinaten des Punktes Q:

Tangente t_3 mit $m_3 = \frac{1}{2} m_2 = \frac{1}{e^2}$

Q ist Berührungspunkt von t_3 am Graphen G_2, d.h:

$m_3 = \frac{1}{e^2} = f_2'(x_Q) = \frac{2}{x_Q}(\ln x_Q - 1) \Rightarrow \frac{1}{2e^2} x_Q = \ln x_Q - 1$, also $\frac{1}{2e^2} x_Q + 1 = \ln x_Q$

und damit $x_Q = e^{\frac{1}{2e^2} x_Q + 1}$

Näherungswerte für x_Q:
Startwert zwischen $x_0 = e$ und $x_W = e^2$

x_i	$e^{\frac{1}{2e^2} x_i + 1}$	x_{i+1}
3	3,330	3,330
3,330	3,405	3,405
3,405	3,422	3,422
3,422	3,426	3,426

$x_Q \approx 3{,}426$

c) Nullstellen der Schar f_a:

$f_a(x) = (\ln x)^2 - a \cdot \ln x + 1$ mit $a > 0$

Bedingung: $f_a(x) = 0$

Substitution: $\ln x = z$; $(\ln x)^2 = z^2$

$0 = z^2 - az + 1 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{4}{4}}$

Wegen $a > 0$ existiert/existieren

– für $a = 2$ genau eine Nullstelle,

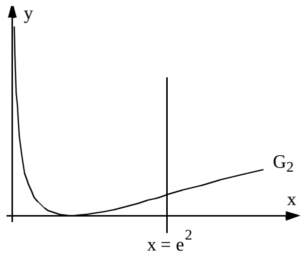
– für $a^2 - 4 > 0$, d.h. für $a > 2$ genau zwei Nullstellen und

– für $a^2 - 4 < 0$, d.h. für $a < 2$ keine Nullstelle.

Werte für den Parameter a:

$$f_2(x) = f_a(x)$$
$$(\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 1 = (\ln x)^2 - a \cdot \ln x + 1$$
$$2\ln x = a \cdot \ln x$$
$$0 = (a - 2) \cdot \ln x$$
$$\Rightarrow x_S = 1$$

d.h., die Graphen von $f_a(x)$ und $f_2(x)$ schneiden einander an der Stelle 1.



$A_{\text{gesuchte Fläche}} = e^2 + 1$

$$A = \left| \int_1^{e^2} (f_2(x) - f_a(x))\, dx \right|$$

$$e^2 + 1 = \left| \int_1^{e^2} [(\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 1 - ((\ln x)^2 - a \cdot \ln x + 1)]\, dx \right|$$

$$= \left| \int_1^{e^2} (a \cdot \ln x - 2 \cdot \ln x)\, dx \right| = \left| (a-2) \int_1^{e^2} \ln x\, dx \right|$$

$$= |a - 2| \cdot |x\ln x - x|\Big|_1^{e^2} = |a-2| \cdot |e^2 \ln e^2 - e^2 - 1 \cdot \ln 1 + 1|$$

$$= |a - 2| \cdot |e^2 + 1|$$

$\Rightarrow |a - 2| = 1$, d.h., $a_1 = 3$; $a_2 = 1$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nullstelle	3 BE
	Art und Lage des lokalen Extrempunktes; Koordinaten des Punktes W	11 BE
	Graph	4 BE

b)	Koordinaten des Punktes P	2 BE
	Beweis, daß Dreieck WPS stumpfwinklig ist	5 BE
	Herleitung der Iterationsvorschrift; Berechnung der Abszisse	6 BE
c)	Existenz von Nullstellen	5 BE
	Werte des Parameters a	9 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2: Analysis

a) Gleichung für Funktion „Straße 2“:

g(x): $\frac{y-4}{x-4,5}$ $\quad \frac{0-4}{6,5-4,5}$ $\quad \frac{4}{2}$

$y-4=-2(x-4,5)$, also g(x): $y=-2x+13$

Gleichung für Funktion „Bahnlinie“:

$y=f(x)=\sqrt{ax+b}$ durch S(4,5 | 4)

(I) $4=f(4,5)=\sqrt{a\cdot 4,5+b}$

y = f(x) schneidet „Straße 2“ in S rechtwinklig, d.h., $f'(4,5)\cdot g'(x)=-1$

Wegen $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{ax+b}}\cdot a$ und $g'(x)=-2$ folgt:

(II) $\frac{1}{2\sqrt{a\cdot 4,5+b}}\cdot a\cdot(-2)=-1$

(I) in (II) einsetzen: $\frac{1}{2\cdot 4}\cdot a\cdot(-2)=-1 \Rightarrow a=4;\ b=-2$, also:

$y=f(x)=\sqrt{4x-2}$

Gradmaß des Schnittwinkels der Straßen 1 und 2:

$m_1=0;\ m_2=-2$

$\tan\alpha=\frac{-2-0}{1+(-2)\cdot 0}=-2 \Rightarrow \alpha=63,4°$

b) Ermitteln von Punkt B:

B(x | f(x)); A(4 | 0); Entfernung s(x)

$$s(x)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{4x-2}-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-8x+16+4x-2}=\sqrt{x^2-4x+14}$$

Entfernung ist zu minimieren, d.h., $s'(x)=0$

$s'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+14}}$, also $0=2x-4 \Rightarrow x_E=2$

Prüfen auf Minimumeigenschaft mit x-Werten aus der Umgebung von x_E (über s"(x) aufwendig):

x	f(x)
1	$\sqrt{11}$
2	$\sqrt{10}$
3	$\sqrt{11}$

Prüfen der Funktionswerte an den Intervallgrenzen im Hinblick auf globales Minimum:
$s(4{,}5) = \sqrt{16{,}26}$; $s(0{,}5) = \sqrt{12{,}25}$ $s(2) \approx 3{,}16$
d.h., die Entfernung vom Haltepunkt B nach A ist mit einer Strecke von 316 m minimal.

Weg von B tangential zur Straße 2:

$f(x) = \sqrt{4x-2}$; $f'(x) = \frac{1 \cdot 4}{2\sqrt{4x-2}}$; $f'(2) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = m_W$

Weg y: $y - f(2) = m_W \cdot (x-2)$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,(x-2) + \sqrt{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,x + \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

c) Flächeninhalt des Freizeitparkes in ha:

$$A_{ges.} = \int_{x_0}^{x_S} f(x)\,dx + A_\Delta;\ x_0 = \frac{1}{2};\ x_S = 4{,}5$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} h \cdot \Delta x = \frac{1}{2} y_S \cdot (x_P - x_S) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (6{,}5 - 4{,}5) = 4$$

$$A_{ges.} = \int_{0,5}^{4,5} \sqrt{4x-2}\,dx + 4 = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4x-2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{0,5}^{4,5} + 4$$

$$= \frac{1}{6}\,(4x-2)^{\frac{3}{2}}\,]\Big|_{0,5}^{4,5} + 4 \approx 14{,}67$$

Das Gelände hat einen Flächeninhalt von etwa 14,67 ha.

Koordinaten des Punktes Z:

$$A_{Teil} = \int_{0,5}^{x_Z} f(x)\,dx = 7{,}33$$

$$7{,}33 = \frac{1}{6}\,(4x-2)^{\frac{3}{2}}\,\Big|_{0,5}^{x_Z}$$

$$44 = (4x-2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0,5}^{x_Z} = \sqrt{(4x_z-2)^3} - 0$$

$1936 = (4x_Z - 2)^3$, also $12{,}46 = 4x_Z - 2 \Rightarrow x_Z \approx 3{,}62$; $y_Z = 0$; $Z(3{,}62 \mid 0)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Gleichungen für Straße 2 und Bahnlinie	10 BE
	Schnittwinkel	2 BE
b)	Minimale Entfernung von Haltepunkt B zu Punkt A	11 BE
	Gleichung für Verlauf des Weges	4 BE
c)	Flächeninhalt des Freizeitparkes	10 BE
	Koordinaten des Punktes Z	8 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie

a) Koordinatengleichung der Ebene E_2:

$$E_2: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \text{ mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

über $\overrightarrow{n_{E_2}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ $\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} + 4\vec{k} - \vec{i} - 4\vec{j}$

$$= \begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

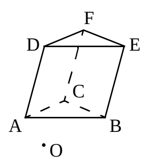
Normalform: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-2\\x_3-3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - 1 - 2x_2 + 4 + 2x_3 - 6 = 0, \text{ also } x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3$$

Nachweis, daß der Punkt D nicht in E_2 liegt:
Punktprobe für D in Koordinatenform von E_2:
$3 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 9 \neq 3 \Rightarrow D \notin E_2$

Koordinaten der Punkte E und F:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}; \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}5\\8\\10\end{pmatrix}$$



$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow E(5 \,|\, 8 \,|\, 10);\ F(1 \,|\, 7 \,|\, 11)$

Nachweis, daß ABCDEF ein schiefes Prisma ist:

Es ist zu zeigen: $\overrightarrow{AD}$ steht nicht senkrecht auf der Grundfläche ABC,

also z.B. $\overrightarrow{AD} \neq k\,\overrightarrow{n_{E_2}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $k_1 = -2$; $k_2 = -2$; $k_3 = 3$

Es gibt also kein eindeutig bestimmbares k.

Weiterer Lösungsweg: Es wird gezeigt: Seitenfläche - z.B. ABED - ist kein Rechteck, d.h., Orthogonalität $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

Maßzahl des Volumens des Prismas (in VE):

$V = \left| \frac{1}{2} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$; $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$; $\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$V = \left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 6 - 24 + 36 \right| = 9$

Weiterer Lösungsweg: $V = A_G \cdot h$ mit $A_G = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC} \right|$ und

$h = d(D; E_2)$ (Abstand Punkt – Ebene).

b) Nachweis, daß $\overline{EF}$ in E_1 liegt:

Beispielsweise über Punktprobe E, F in E_1:

$E(5 \,|\, 8 \,|\, 10);\ F(1 \,|\, 7 \,|\, 11)$

E_1: $8x_1 - 19x_2 + 13x_3 - 18 = 0$

E: $40 - 152 + 130 - 18 = 0 \Rightarrow E \in E_1$

F: $8 - 133 + 143 - 18 = 0 \Rightarrow F \in E_1$

$\Rightarrow$ Kante $\overline{EF}$ liegt in der Ebene E_1.

Weiterer Lösungsweg: $\overrightarrow{EF}$ muß orthogonal zum Normalenvektor der Ebene E_1 liegen, also $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{n_{E_1}} = 0$.

Koordinaten des Punktes G:

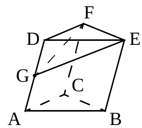
E_1: $8x_1 - 19x_2 + 13x_3 - 18 = 0$

$\overrightarrow{AD}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq 1$

$8(1 + 2r) - 19(2 + 4r) + 13(3 + 6r) - 18 = 0$, also $18r - 9 = 0$ und damit $r = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow G(2 \,|\, 4 \,|\, 6)$

Verhältnis der Volumina:
Wegen $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ gilt:



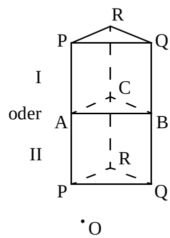
$V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$ mit

$\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \left| -3 + 12 - 18 \right| = \frac{3}{2}$; $V_{Restkörper} = 9 - \frac{3}{2} = 7{,}5$

$V_{Pyramide} : V_{Restkörper} = 1{,}5 : 7{,}5 = 1 : 5$

c) Koordinaten der Punkte P, Q und R:
Wegen der Volumenbedingung muß gelten:



$V = \frac{1}{2} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$

$9 = \frac{1}{2} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$

$\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_P - 1 \\ y_P - 2 \\ z_P - 3 \end{pmatrix}$;

wobei $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{n_{E_2}}$

$9 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$, also $18 = 27 |r|$ und damit $|r| = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ $P(\frac{5}{3} \mid \frac{2}{3} \mid \frac{13}{3})$ für $r = +\frac{2}{3}$ oder $P(\frac{1}{3} \mid \frac{10}{3} \mid \frac{5}{3})$ für $r = -\frac{2}{3}$

Damit gilt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AP}$, also $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - 1 \\ \frac{2}{3} - 2 \\ \frac{13}{3} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$ und somit

$Q(\frac{11}{3} \mid \frac{8}{3} \mid \frac{16}{3})$; $R(-\frac{1}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{19}{3})$ (für $r = +\frac{2}{3}$.)

Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinatengleichung für E_2	5 BE
	Nachweis, daß D nicht in E_2 liegt	1 BE
	Koordinaten des Punktes E	3 BE
	Nachweis, daß ABCDEF schiefes Prisma ist	3 BE
	Volumen des Prismas	6 BE

b)	Nachweis, daß $\overline{EF}$ in ε_1 liegt	2 BE
	Koordinaten des Punktes G	4 BE
	Verhältnis der Volumina	6 BE
c)	Koordinaten der Punkte P, Q und R	5 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie

a) Normalform der Gleichung von g:

Aus Zweipunkteform:

$$\frac{y-6}{x-2} = \frac{-2-6}{6-2} = -2, \text{ also: } y = -2(x-2) + 6 = -2x + 10$$

Betrag des Abstandes des Punktes B von g:
(z.B. über senkrechte Hilfsgerade durch B)

$m_g = -2$, damit orthogonale Hilfsgerade h zu g: $m_h = -\frac{1}{m_g} = \frac{1}{2}$

h: $y + 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$, also $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Schnittpunkt von g und h:

$-2x + 10 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, also $5x = 25$ und damit $x_S = 5$; $y_S = 0 \Rightarrow S(5 \mid 0)$

Abstand B – g ist somit $|\overline{BS}|$

$$|\overline{BS}| = \sqrt{(5+1)^2 + (0+3)^2} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$$

Weiterer Lösungsweg: Abstandsermittlung über Hessesche Normalform von g.

Mittelpunkt M des Umkreises k:

Kreis k allgemein: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

A: (I) $(2 - x_M)^2 + (6 - y_M)^2 = r^2$

B: (II) $(-1 - x_M)^2 + (-3 - y_M)^2 = r^2$

C: (III) $(6 - x_M)^2 + (-2 - y_M)^2 = r^2$

(I) – (II) = (IV) $3 - 6x_M + 27 - 18y_M = 0$

(I) – (III) = (V) $-32 + 8x_M + 32 - 16y_M = 0$

daraus folgt

(IV) $5 - x_M - 3y_M = 0$

(V) $x_M - 2y_M = 0$

mit der Lösung $y_M = 1$; $x_M = 2 \Rightarrow M(2 \mid 1)$.

Weiterer Lösungsweg: Berechnung des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten der Sehnen.

Radius des Umkreises k:

$r = |\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}|$,

z.B $r = |\overline{MA}| = \sqrt{(2-2)^2 + (6-1)^2} = 5$

b) Gleichung für Gerade g im räumlichen Koordinatensystem:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $m = \frac{a_y}{a_x} = -2$, also ergibt sich z.B.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nachweis, daß die Gerade g die Kugel K_1 nicht durchstößt:
Es ist zu zeigen, daß g und K_1 keine gemeinsamen Punkte haben.
Komponentenweises Einsetzen von g in K_1:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

K_1: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 16$

$(2 + r - 1)^2 + (6 - 2r + 1)^2 + (0 - 2)^2 = 16$

$5r^2 - 26r + 38 = 0$

$r_{1,2} = \frac{13}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 - \frac{38}{5}}$

Es gibt keine reellen Lösungen für r, d.h., g und K_1 haben keine gemeinsamen Punkte. Also durchstößt die Gerade g die Kugel K_1 nicht.
Weiterer Lösungsweg: Abstand des Mittelpunktes M von g ermitteln.

Gleichung der Kugel K_2:
Mittelpunkt M des Kreises: M(2 | 1 | 0);
wegen desselben Mittelpunktes auch derselbe Radius, also r = 5.
K_2: $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 0)^2 = 25$

Nachweis, daß die Kugeln K_1 und K_2 einander schneiden:
Die Kugeln schneiden einander, wenn $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2$ und
$|r_2 - r_1| < \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ mit $M_1(1 | -1 | 2)$, $r_1 = 4$ sowie $M_2(2 | 1 | 0)$, $r_2 = 5$.

Da $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (1+1)^2 + (0-2)^2} = 3$ und $|5 - 4| < 3 < 5 + 4$
schneiden die Kugeln K_1 und K_2 einander.

Gleichung für die Ebene, in welcher der Schnittkreis der Kugeln K_1 und K_2 liegt:
K_1: (I) $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 16$

K_2: (II) $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 0)^2 = 25$
$\Rightarrow \quad 2x_1 - 3 + 4x_2 - 4x_3 + 4 = -9$
bzw. $\quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5$
Punkte, die diese Gleichungen erfüllen, liegen auf beiden Kugeln.
E_s: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5$
ist die Gleichung der Ebene, in der auch der Schnittkreis liegt.

Koordinaten des Mittelpunktes des Schnittkreises:
Die Gerade $h(M_1;M_2)$ schneidet die Schnittkreisebene im gesuchten Mittelpunkt M_S.

$$h(M_1;M_2)\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1-2\\-1-1\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

E_s: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5$
Komponentenweises Einsetzen der Geradengleichung h in die Ebene E_s:
$(2 - r) + 2(1 - 2r) - 2(2r) = -5$, also $-9r = -9$; $r = 1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM_S} \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow M(1\,|\,-1\,|\,2)$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Normalform für g; Abstand von B zu g	5 BE
	Koordinaten von M, Radius des Umkreises k	9 BE
b)	Gleichung für g	3 BE
	Nachweis, daß g die Kugel K_1 nicht durchstößt	4 BE
	Gleichung für K_2	3 BE
	Nachweis, daß K_1 und K_2 einander schneiden	3 BE
	Gleichung der Schnittkreisebene	4 BE
	Koordinaten des Mittelpunktes des Schnittkreises	4 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1: Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) Wahrscheinlichkeit, daß höchstens 20 von 100 Schülern Hörschäden aufweisen:
Zufallsgröße X: Anzahl der hörgeschädigten Jugendlichen
Wahrscheinlichkeit für einen Hörschaden bei einem Jugendlichen: $p = 0{,}2$
Anzahl der untersuchten Jugendlichen: $n = 100$
$P = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 20)$ mit

$P(X = 0) = 0{,}8^{100}$
$P(X = 1) = 0{,}8^{99} \cdot 0{,}2^{1} \cdot 100$
$P(X = 2) = 0{,}8^{98} \cdot 0{,}2^{2} \cdot 4950$
$\vdots$
$P(X = 20) = \ldots$

$$P = \sum_{i=0}^{20} P(X = i) = 0{,}5595 \quad \text{(siehe Tabelle)}$$

Hinweis: Steht eine Tabelle der aufsummierten binomialen Wahrscheinlichkeiten zur Verfügung, so läßt sich $P(X \le 20) = B_{100;0,2}(\{0; \ldots; 20\})$ sofort ablesen.

b) Ermitteln der maximalen Anzahl von Jugendlichen mit Hörschäden
$n = 500$; $p = 0{,}2$
Wegen $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ ist die Näherungsformel von LAPLACE und DE MOIVRE anwendbar.
Zufallsgröße Y: Anzahl der hörgeschädigten Jugendlichen
Es soll gelten: $P(Y \le k) \ge 0{,}6$, wobei k die gesuchte maximale Anzahl Jugendlicher ist.
Es gilt: $\mu = E(Y) = 100 = n \cdot p$ Erwartungswert
$\sigma^2 = V(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 80$ Varianz
Dann gilt für die binomialverteilte Zufallsgröße Y:

$$P(Y \le k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \ge 0{,}6$$
$$\approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - 100}{\sqrt{80}}\right) \ge 0{,}6$$
$$\frac{k + 0{,}5 - 100}{\sqrt{80}} \ge 0{,}26 \ \text{(laut Tabelle)} \Rightarrow k \ge 101{,}8$$

Maximale Anzahl von Jugendlichen, die die Bedingung erfüllen: 101.

c) Ermitteln eines möglichst großen Ablehnungsbereiches auf einem vorgegebenen Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$
Hypothese H_0: $p \le 0{,}1$ für Hörschaden; Stichprobe mit $n = 50$.
Ablehnungsbereich so, daß mit maximal 5%iger Wahrscheinlichkeit H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 wahr ist (Fehler 1. Art).
Zufallsgröße Z: Anzahl der hörgeschädigten Jugendlichen bei $n = 50$ ist binomialverteilt.
Ablehnungsbereich: $Z \ge g$ mit g so, daß
$P(Z \ge g) = 1 - P(Z < g) = 1 - B_{50;\,0,10}(\{0; 1; \ldots; g - 1\}) \le 0{,}05$, also
$B_{50;\,0,10}(\{0; 1; \ldots; g - 1\}) \ge 0{,}95$
Daraus folgt nach Tabelle: $g - 1 \ge 9$, d.h. $g \ge 10$.

Der Ablehnungsbereich ist also $\overline{A} = \{10; \ldots; 50\}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnung der Wahrscheinlichkeit	3 BE
b)	Anzahl der Jugendlichen	7 BE
c)	Berechnung des Ablehnungsbereichs	10 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2: Analysis

a) Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkt mit der y-Achse: $y = f_a(0) = \frac{2 \cdot 0 + a}{e^{2 \cdot 0}} = a \Rightarrow S_y(0 \mid a)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$0 = f_a(x) = \frac{2x + a}{e^{2x}} \Rightarrow$ (wegen $e^{2x} \neq 0$) $0 = 2x + a$, also $x_0 = -\frac{a}{2}$; $y_0 = 0$; $S_x(-\frac{a}{2} \mid 0)$

Ableitungen:

$f_a(x) = (2x + a) \cdot e^{-2x}$

$f_a'(x) = 2 \cdot e^{-2x} + (2x + a) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \cdot (2 - 4x - 2a)$

$f_a''(x) = -2 \cdot e^{-2x} \cdot (2 - 4x - 2a) + e^{-2x} \cdot (-4)$

$\quad = e^{-2x} \cdot (-4 + 8x + 4a - 4) = e^{-2x} \cdot (4a + 8x - 8)$

Lokaler Hochpunkt:

$f_a'(x_E) = 0$:

$0 = e^{-2x} \cdot (2 - 4x - 2a) \Rightarrow$ (wegen $e^{-2x} \neq 0$) $0 = 2 - 4x - 2a$, also $x_E = \frac{1}{2}(-a + 1)$

$$y_E = f(x_E) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(-a+1) + a}{e^{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-a+1)}} = e^{a-1}$$

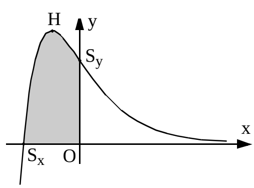
$$f_a''(x_E) = e^{-2 \cdot \frac{1}{2}(-a+1)} \cdot [4a + 8 \cdot \tfrac{1}{2}(-a + 1) - 8] = e^{a-1} \cdot (-4) < 0$$

$\Rightarrow$ An der Stelle x_E besitzen die Graphen von f_a einen Hochpunkt.

x_E ist einzige Extremstelle $\Rightarrow H(\frac{1}{2}(1 - a) \mid e^{a-1})$

b) Maßzahl des Flächeninhaltes:

$$A(a) = \int_{x_0}^{0} f_a(x)\, dx$$



$$A(a) = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} (2x + a) \cdot e^{-2x}\,dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} 2xe^{-2x}\,dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{0} a \cdot e^{-2x}\,dx$$

Nebenrechnung: $\int xe^{-2x}\,dx$ mit $u = x$, $u' = 1$; $v' = e^{-2x}$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\int xe^{-2x}\,dx = x \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x} - \int\left(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\tfrac{1}{2}xe^{-2x} - \tfrac{1}{4}e^{-2x}$$

$$A(a) = \left[2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}xe^{-2x} - \tfrac{1}{4}e^{-2x}\right) + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot ae^{-2x}\right]\Big|_{-\frac{a}{2}}^{0} = -\tfrac{1}{2}xe^{-2x} \cdot [2x + 1 + a]_{-\frac{a}{2}}^{0}$$

$$= -\tfrac{1}{2}(1 + a) - \left[e^{a} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot (-a + 1 + a)\right] = -\tfrac{1}{2}(1 + a) + \tfrac{1}{2}e^{a}$$

$$A(a) = \tfrac{1}{2}\left(e^{a} - a - 1\right)$$

Bedingung für den Parameter a:

$A(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - a - 1) = 10 \Rightarrow e^{a} - a - 21 = 0$

Näherungsweise Bestimmung einer Lösung für a mit Hilfe des Newtonverfahrens:

Ausgangswerte: $h(a) = e^{a} - a - 21$; $h'(a) = e^{a} - 1$

a_i	$a_{i+1} = a_i - \frac{h(a_i)}{h'(a_i)}$
4	3,4478…
3,4478	3,2183…
3,2183	3,1863…
3,1863	3,1857…
3,1857	3,1857…

$\Rightarrow a \approx 3{,}1857$

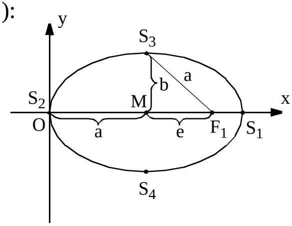
Bewertungsvorschlag:

a)	Koordinaten der Schnittpunkte	2 BE
	Koordinaten der Hochpunkte	4 BE
b)	Flächeninhalt	8 BE
	Berechnung des Parameters a	6 BE
		20 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3: Analytische Geometrie

a) Koordinaten des Mittelpunktes der Ellipse E:

$$(*)\ c^2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + (\frac{1}{2} - c)x_2^2 = 0 \Rightarrow \text{(für } c = \frac{1}{4}\text{):}$$



$$\frac{1}{16}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})x_2^2 = 0$$

$$\frac{1}{16}x_1^2 - \frac{8}{16}x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 = 0$$

$$\frac{1}{16}(x_1 - 4)^2 - \frac{16}{16} + \frac{1}{4}(x_2 - 0)^2 = 0$$

$$\frac{(x_1 - 4)^2}{16} + \frac{(x_2 - 0)^2}{4} = \frac{16}{16} = 1$$

$\Rightarrow$ M(4 | 0) ist der Mittelpunkt

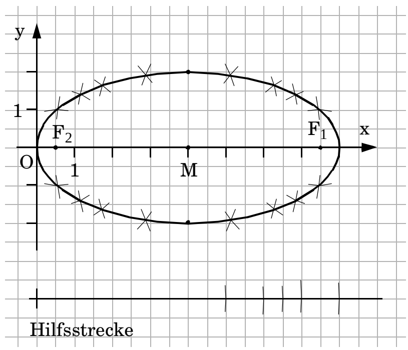
Koordinaten der Brennpunkte und Scheitelpunkte der Ellipse:

Wegen a = 4 und b= 2 folgt mit M(4 | 0):

$S_1(8 | 0)$, $S_2(0 | 0)$, $S_3(4 | 2)$, $S_4(4 | -2)$ sind Scheitelpunkte.

Wegen $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ gilt für die Brennpunkte: $F_1(4 + 2\sqrt{3} | 0)$, $F_2(4 - 2\sqrt{3} | 0)$.

Zeichnung der Ellipse über 16 Hilfspunkte:



b) Art des Kegelschnittes für c = 0:

$$0x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + (\frac{1}{2} - 0)x_2^2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \text{ also } x_2^2 = x_1 \quad (y^2 = x)$$

Das ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel S(0 | 0) und dem Parameter $p = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Brennpunkt: $F(\frac{1}{4} | 0)$

Werte des Parameters c für spezielle Fälle:
(1) Die Kurven sind Ellipsen.
(2) Die Kurven sind Kreise.

$$c^2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + (\frac{1}{2} - c)x_2^2 = 0$$

$$c^2(x_1^2 - \frac{1}{2c^2}x_1) + (\frac{1}{2} - c)x_2^2 = 0$$

$$c^2(x_1 - \frac{1}{4c^2})^2 - c^2(\frac{1}{4c^2})^2 + (\frac{1}{2} - c)x_2^2 = 0$$

$$c^2(x_1 - \frac{1}{4c^2})^2 + (\frac{1}{2} - c)x_2^2 = \frac{c^2}{16c^4}$$

$$16c^4(x_1 - \frac{1}{4c^2})^2 + 16c^2(\frac{1}{2} - c)x_2^2 = 1$$

Diese Gleichung liefert (wegen $16c^4 > 0$ und $16c^2 > 0$) für $(\frac{1}{2} - c) > 0$ eine

Ellipse $\Rightarrow c < \frac{1}{2}, c \neq 0$

Die Gleichung liefert für $16c^4 = 16c^2(\frac{1}{2} - c)$ einen Kreis, d.h.,

$c^2 = \frac{1}{2} - c \Rightarrow 0 = c^2 + c - \frac{1}{2}$

$c_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Bewertungsvorschlag:

a)	Mittelpunkt, Brennpunkte, Scheitelpunkte der Ellipse	7 BE
	Zeichnung	4 BE
b)	Art des Kegelschnittes; Lage im Koordinatensystem	3 BE
	Berechnung des Parameters c für beide Fälle	6 BE
		20 BE

Abiturprüfung Leistungskurs

1996 / 97

Gymnasium

Thüringen

Hinweis:
Der Prüfungsteilnehmer hatte von den Aufgaben 1.1 und 1.2 ***eine*** *und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3* ***zwei*** *zur Bearbeitung auszuwählen.*

Aufgabe 1.1

Für jede reelle Zahl t (t > 0) ist eine Funktion f_t gegeben durch

$y = f_t(x) = \frac{x \cdot \ln x + t}{x} \quad (x > 0).$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Extrem- und Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 im Intervall $0 < x \leq 6$!

b) Auf dem Graphen von f_2 liegt der Punkt $Q(q;\, f_2(q))$. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch Q begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck.
Für welches q hat der Umfang dieses Rechtecks ein lokales Extremum?
Berechnen Sie für diesen Fall den Umfang, und geben Sie die Art des Extremums an!

c) Der Graph von f_t und die Geraden mit den Gleichungen $x = t$, $x = 2t$ und $y = 0$ begrenzen ein Flächenstück.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von t!
(Es darf ohne Nachweis verwendet werden: $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + c$.)

d) An den Graphen von f_t wird eine Tangente h so gelegt, daß sie die Koordinatenachsen in $A(a;\, 0)$ und $B(0;\, a)$, $a > 0$, schneidet.
Wie muß der Parameter t gewählt werden, damit diese Tangente den Graphen von f_t im Punkt $(2;\, f_t(2))$ berührt?
Wie groß ist in diesem Fall die Fläche des Dreiecks ΔOAB?
(O bezeichnet den Koordinatenursprung.)

e) Weisen Sie nach, daß für die n-te Ableitung der Funktion f_t gilt:
$f_t^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \left(t - \frac{x}{n}\right); \quad (n \in \mathbb{N};\, n \geq 1)$!

Aufgabe 1.2

Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$y = f_a(x) = \frac{x^2 - 9 + a}{x + 3}$ $\quad (x \in \mathbb{R};\ x \neq -3)$.

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen von f_a mit der y-Achse!
Untersuchen Sie, wie die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen von f_a mit der x-Achse vom Parameter a abhängt!
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an!
Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf lokale Extrempunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten!

b) Die lokalen Minimumpunkte der Graphen aller Funktionen f_a liegen auf einer Kurve. Geben Sie die Gleichung dieser Kurve an!

c) Skizzieren Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse die Asymptoten und den Graphen der Funktion f_5 im Intervall $-10 \leq x \leq 6$ in ein Koordinatensystem!

d) Für welche Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $\quad f_5(x) \in \mathbb{Z}$?
($\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen.)

e) Betrachtet wird nun die Funktion F_5. F_5 sei eine Stammfunktion der Funktion f_5 mit $x > -3$.
Geben Sie, ohne eine Gleichung der Funktion F_5 zu verwenden, die möglichen Abszissen der Extrempunkte und des Wendepunktes des Graphen von F_5 an!
Begründen Sie Ihre Aussagen!

f) Zeigen Sie <u>durch Integration</u>, daß $F_5(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot \ln(x + 3)$ eine Stammfunktion von f_5 ist! Der Graph der Funktion f_5 und die Geraden mit den Gleichungen $y = x - 3$, $x = 0$ und $x = k$ $(k \in \mathbb{R};\ k > 0)$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie k so, daß der Inhalt dieser Fläche 5 FE beträgt!

g) Der Graph der Funktion f_a und die x-Achse begrenzen für $a < 9$ eine Fläche A vollständig. Zeigen Sie, daß für den Inhalt dieser Fläche A gilt:
$A = 6\sqrt{9 - a} - a \cdot \ln\left[\frac{(\sqrt{9 - a} + 3)^2}{a}\right]$!

Aufgabe 2.1

a) Gegeben sind die beiden Ebenen: η_1: $5x + 6y - 7z = -17$ und
η_2: $-x - y + z = 3$.
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen η_1 und η_2!
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g von η_1 und η_2!
Zeigen Sie, daß der Punkt P(–2; 0; 1) auf der Schnittgeraden g liegt!

b) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ sei der Punkt $Q_r(1 - 2r; -2r; 4 + 2r)$ gegeben.
Durch die Punkte P, Q_r und Q_{r+1} wird für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein Dreieck bestimmt.
Zeigen Sie, daß alle diese Dreiecke in der Länge einer Seite übereinstimmen!
Geben Sie diese Länge an!
Bestimmen Sie ferner r so, daß die beiden anderen Seiten zueinander gleich lang sind!

Durch die Gleichung $(t + 1)x + y + (t - 1)z + t + 3 = 0$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Ebene ε_t gegeben.

c) Weisen Sie nach, daß für jedes t die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, in ε_t liegt!

d) Welche Bedingung müssen die beiden Parameter t_1 und t_2 erfüllen, damit die Ebenen ε_{t_1} und ε_{t_2} aufeinander senkrecht stehen?

e) Für welche Werte von t hat die Ebene ε_t vom Ursprung den Abstand $\sqrt{2}$?

Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(–1; 22; 18), B(–13; 13; 24) und C(4; 7; 0) sowie eine Geradenschar g_a durch

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, t \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

a) Zeigen Sie, daß C auf der Geraden g_0 liegt!
Eine Gerade h verläuft durch die Punkte A und B.
Für welchen Wert a existiert ein Schnittpunkt S der Geraden g_a und h?
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Punktes S!

b) Begründen Sie, daß h und g_0 windschief sind, und berechnen Sie den Abstand dieser Geraden!

c) Die Geraden g_a bilden eine Ebene ε.
Geben Sie eine parameterfreie Gleichung für ε an!

d) Durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene ε (aus Teilaufgabe c)) entsteht der Punkt A'.
Bestimmen Sie seine Koordinaten!

e) Der Punkt Q ist Durchstoßpunkt der Geraden g_5 durch die x-y-Ebene. Die Punkte C, Q und S(–5; 19; 20) sind Eckpunkte eines Dreiecks in ε.
Das Dreieck ΔCQS wird von der Geraden $g_{5/2}$ in zwei Teilflächen mit den Inhalten A_1 und A_2 zerlegt.
Berechnen Sie das Verhältnis $A_1 : A_2$!

Aufgabe 2.3

Im Mittelalter wurden Goldmünzen als Zahlungsmittel verwendet. Von der Gesamtmenge war 1% Falschgeld im Umlauf. Falsche Münzen konnte man verbiegen. Äußerlich waren echte und falsche Goldmünzen nicht zu unterscheiden.

a) Der Schatzmeister des Landes Stochastika bewahrte die Goldmünzen in Kästen zu je 100 Stück auf. Dabei interessierten ihn folgende Ereignisse:
A := „In einem Kasten waren genau 2 falsche Münzen."
B := „In einem Kasten waren mehr als 2 und höchstens 4 falsche Münzen."
Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten!

b) Aus einem Kasten mit 1% Falschgeld griff der Schatzmeister zufällig und nacheinander mit Zurücklegen 3 Münzen heraus. Dabei interessierten ihn folgende Ereignisse:
C := „Mindestens eine falsche Münze war darunter."
D := „Die zweite Münze war die erste falsche Münze."
E := „Frühestens die letzte Münze war eine falsche Münze."
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse!

c) Wieviele Münzen mußte der Schatzmeister einem Kasten mit 1% Falschgeld zufällig und nacheinander ohne Zurücklegen mindestens entnehmen, damit die Wahrscheinlichkeit, daß die falsche Münze unter den entnommenen war, größer als 90% war?

d) Um die Echtheit irgendeiner Münze zu prüfen, ging der Schatzmeister wie folgt vor. Er entnahm eine Münze zufällig aus einem Kasten und versuchte, sie mit den Zähnen zu verbiegen. Leider konnte er bei diesem Verfahren nur 90% der falschen Münzen als falsch bestimmen. 20% der echten Münzen wurden irrtümlich als falsch eingeordnet. Jetzt interessierten ihn folgende Ereignisse:

F := „Die bei diesem Vorgehen als falsch eingestufte Münze war tatsächlich falsch.“
G := „Die Münze wurde bei diesem Vorgehen richtig beurteilt.“
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse!

e) Der König des Schatzmeisters nahm an, daß sich in seiner Schatzkammer mindestens 11 falsche Goldmünzen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 52% befanden. Aus dieser Annahme berechnete sein Hofmathematiker die Anzahl der mit Goldmünzen gefüllten Kästen.
Wie viele waren es mindestens?

Anmerkung:
Den Aufgaben war eine auf 5 Nachkommastellen genaue Tabelle der Dichtefunktionswerte $\varphi(x)$ und der Funktionswerte $\Phi(x)$ der Normalverteilung für $0 \leq x \leq 4{,}76$ beigefügt.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

$y = f_t(x) = \frac{x \cdot \ln x + t}{x} = \ln x + \frac{t}{x}$ $(x > 0,\ t \in \mathbb{R},\ t > 0)$

a) $f_t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}$; $\quad f_t''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2t}{x^3}$; $\quad f_t'''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6t}{x^4}$

Extrema:

$f_t'(x) = 0 = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}$ $\quad\Rightarrow\quad x = t$

$f_t''(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2t}{t^3} = \frac{1}{t^2} > 0$, da $t > 0$ $\quad\Rightarrow\quad x_1 = t$ ist lokale Minimumstelle.

$f_t(t) = \ln t + 1$ $\quad\Rightarrow\quad$ Min$(t; \ln t + 1)$

Wendestellen:

$f_t''(x) = 0 = -\frac{1}{x^2} + \frac{2t}{x^3}$

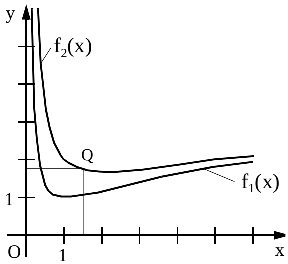
$\Rightarrow\quad x = 2t$

$f_t'''(2t) = -\frac{1}{8t^3} \neq 0$

$\Rightarrow\quad x_2 = 2t$ ist Wendestelle.

$f_t(2t) = \ln 2t + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad W(2t; \ln 2t + \frac{1}{2})$



b) $Q(q; f_2(q))$ $\quad (q > 0)$

$u(q) = 2(q + f_2(q)) = 2q + 2\ln q + \frac{4}{q}$; $\quad u'(q) = 2 + \frac{2}{q} - \frac{4}{q^4}$; $\quad u''(q) = -\frac{2}{q^2} + \frac{8}{q^3}$

$u'(q) = 0 = 2 + \frac{2}{q} - \frac{4}{q^4}$, also $q^2 + q - 2 = 0$ $\quad\Rightarrow\quad q_1 = -2 \notin D_u$; $\quad q_2 = 1$

$u''(1) = -2 + 8 = 6 > 0$ $\quad\Rightarrow\quad q_2 = 1$ ist lokale Minimumstelle.

$u(1) = 2 + 2\ln 1 + 4 = 6$ $\quad\Rightarrow\quad$ Minimaler Umfang beträgt 6 LE.

c) $A = \int_t^{2t} (\ln x + \frac{t}{x})\,dx = [x(\ln x - 1) + t\ln x]_t^{2t}$

$= 2t(\ln 2t - 1) + t\ln 2t - t(\ln t - 1) - t\ln t = 3t\ln 2t - 2t\ln t - t$

$= t(3\ln 2 + \ln t - 1)$

d) Tangente h durch A(a; 0) und B(0; a) $(a > 0) \quad \Rightarrow \quad m_h = -1$

Berührung im Punkt $P(2; f_t(2)) \quad \Rightarrow \quad f_t'(2) = -1$

$f_t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}$; $\quad f_t'(2) = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} = -1 \quad \Rightarrow \quad t = 6$

$f_6(2) = \ln 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad P(2;\ 3 + \ln 2)$

h: $\quad y - 3 - \ln 2 = -1(x - 2)$, also $y = -x + 5 + \ln 2 \quad \Rightarrow \quad a = 5 + \ln 2$

$A_{\Delta OAB} = \frac{a^2}{2} = \frac{(5 + \ln 2)^2}{2} \approx 16{,}21$ FE

e) $f_t^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}\left(t - \frac{x}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang: $\quad n = 1$

$f_t^{(1)}(x) = (-1)^1 \cdot \frac{1!}{x^2}(t - x) = -\frac{t}{x^2} + \frac{1}{x} = f_t'(x)$ (vgl. a))

2. Induktionsschritt:

– Induktionsvoraussetzung: $\quad n = k$

$f_t^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}}\left(t - \frac{x}{k}\right) = (-1)^k \cdot \left[\frac{k!t}{x^{k+1}} - \frac{k!x}{kx^{k+1}}\right] = (-1)^k \cdot \left[\frac{k!t}{x^{k+1}} - \frac{k!}{kx^k}\right]$

– Induktionsbehauptung: $\quad n = k + 1$

$f_t^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k+1)!}{x^{k+2}}\left(t - \frac{x}{k+1}\right)$

– Induktionsbeweis:

$f_t^{(k+1)}(x) = [f_t^{(k)}(x)]' = (-1)^k \cdot \left[\frac{k!t \cdot (-1)(k+1)}{x^{k+2}} - \frac{k!(-1)k}{kx^{k+1}}\right]$

$= (-1)^{k+1} \cdot \left[\frac{(k+1)! \cdot t}{x^{k+2}} - \frac{k!}{x^{k+1}}\right] = (-1)^{k+1} \cdot \left[\frac{(k+1)! \cdot t}{x^{k+2}} - \frac{k!(k+1)x}{x^{k+1}x(k+1)}\right]$

$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k+1)!}{x^{k+2}}\left(t - \frac{x}{k+1}\right)$ w. z. b. w.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

$y = f_a(x) = \frac{x^2 - 9 + a}{x + 3} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq -3, a \in \mathbb{R}, a > 0)$

a) $f_a(0) = \frac{-9 + a}{3} = \frac{a}{3} - 3 \quad \Rightarrow \quad P_y\left(0;\ \frac{a}{3} - 3\right)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$x^2 - 9 + a = 0$, also $x^2 = 9 - a$ $\qquad$ $a < 9$: 2 Schnittpunkte
$a = 9$: 1 Schnittpunkt
$a > 9$: keine Schnittpunkte

senkrechte Asymptote: $\quad x = -3$

weitere Asymptote: $\quad f_a(x) = \frac{(x-3)(x+3) + a}{x + 3} = x - 3 + \frac{a}{x + 3} \quad \Rightarrow \quad y = x - 3$

Extrema:

$f_a'(x) = \frac{x^2 + 6x + 9 - a}{(x+3)^2} = 1 - \frac{a}{(x+3)^2}$; $f_a''(x) = \frac{2a}{(x+3)^3}$

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - a = 0 \Rightarrow x_1 = -3 + \sqrt{a}$; $x_2 = -3 - \sqrt{a}$

$f_a''(x_1) = \frac{2a}{(-3 + \sqrt{a} + 3)^3} = \frac{2}{\sqrt{a}} > 0 \Rightarrow x_1$ ist lokale Minimumstelle

$f_a''(x_2) = \frac{2a}{(-3 - \sqrt{a} + 3)^3} = -\frac{2}{\sqrt{a}} < 0 \Rightarrow x_2$ ist lokale Maximumstelle

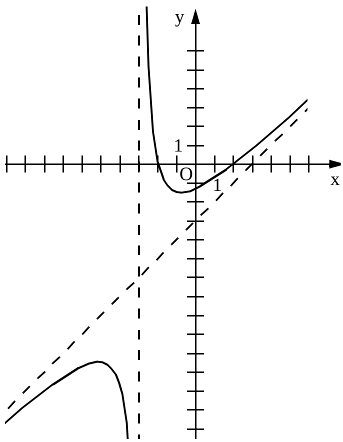
$f_a(x_1) = -6 + 2\sqrt{a}$; $f_a(x_2) = -6 - 2\sqrt{a}$

$Max(-3 - \sqrt{a}\,;\, -6 - 2\sqrt{a})$; $Min(-3 + \sqrt{a}\,;\, -6 + 2\sqrt{a})$

b) $y_{Min} = -6 + 2\sqrt{a} = 2x_{Min}$

Gleichung: $y = 2x$

c)



d) $f_5(x) = x - 3 + \frac{5}{x+3}$

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$; $x_4 = -8$

e) F_5 sei Stammfunktion von f_5 mit $x > -3$. Die Nullstellen von f_5 sind mögliche Extremstellen von F_5. Wegen $F_5' = f_5$ ist also $x_{E_1} = -2$, $x_{E_2} = 2$. Die Extremstellen von f_5 sind mögliche Wendestellen von F_5. Wegen $F_5'' = f_5'$ ist also $x_W = -3 + \sqrt{5}$ ($x = -3 - \sqrt{5}$ liegt nicht im Definitionsbereich von F_5).

f) $\int f_5(x)dx = \int (x - 3 + \frac{5}{x+3})dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 5\ln|x+3| + c$

$F_5(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln(x+3)$ ist Stammfunktion von $f_5(x)$ für $x > -3$.

$A = \int_0^k (f_5(x) - (x-3))dx = \int_0^k \frac{5}{x+3}dx = [5\ln(x+3)]_0^k$

$= 5\ln(k+3) - 5\ln 3 = 5$

Es folgt $\ln\frac{k+3}{3} = 1$, also $\frac{k+3}{3} = e$ und damit $k = 3e - 3$.

g) $a < 9 \quad \Rightarrow$ Der Graph von f_a hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.
Integrationgrenzen $-\sqrt{9-a}$, $+\sqrt{9-a}$;
Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse.

$$A = \left|\int_{-\sqrt{9-a}}^{+\sqrt{9-a}} \left(x - 3 + \frac{a}{x+3}\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + a\ln(x+3)\right]_{-\sqrt{9-a}}^{+\sqrt{9-a}}\right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(9-a) - 3\sqrt{9-a} + a\ln(\sqrt{9-a}+3) - \frac{1}{2}(9-a) + (-3\sqrt{9-a}) - a\ln(-\sqrt{9-a}+3) \right|$$

$$= \left|-6\sqrt{9-a} + a[\ln(\sqrt{9-a}+3) - \ln(-\sqrt{9-a}+3)]\right|$$

$$= \left|-6\sqrt{9-a} + a\ln\frac{\sqrt{9-a}+3}{-\sqrt{9-a}+3}\right|$$

$$= \left|-6\sqrt{9-a} + a\ln\left(\frac{(\sqrt{9-a}+3)}{(-\sqrt{9-a}+3)} \cdot \frac{(\sqrt{9-a}+3)}{(\sqrt{9-a}+3)}\right)\right|$$

$$= \left|-6\sqrt{9-a} + a\ln\frac{(\sqrt{9-a}+3)^2}{a}\right| = 6\sqrt{9-a} - a\ln\frac{(\sqrt{9-a}+3)^2}{a}$$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

η_1: $5x + 6y - 7z = -17$; $\quad \eta_2$: $-x - y + z = 3$

a) Schnittwinkel: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\sphericalangle(\eta_1, \eta_2) = \cos\sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right| = \left|\frac{-5-6-7}{\sqrt{110}\sqrt{3}}\right| = \frac{18}{\sqrt{330}}$$

$\Rightarrow \quad \sphericalangle(\eta_1, \eta_2) \approx 7{,}75°$

Schnittgerade:

g: (I) $\quad 5x + 6y - 7z = -17$

(II) $\quad -x - y + z = 3 \quad \Rightarrow \quad x = -y + z - 3$

(I) + 5 · (II): $\quad y - 2z = -2 \quad \Rightarrow \quad y = 2z - 2$

Mit $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, erhält man $\quad y = 2t - 2$; $\quad x = -2t + 2 + t - 3 = -t - 1$

$$\Rightarrow \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P(–2; 0; 1): $\quad -2 = -1 - t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

$$0 = -2 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$
$$1 = t \quad \Rightarrow \quad t = 1, \quad \text{also} \quad P \in g$$

b) $Q_r = (1 - 2r; -2r; 4 + 2r) \quad (r \in \mathbb{R})$;
$Q_{r+1} = (-1 - 2r; -2r - 2; 6 + 2r)$; $P(-2; 0; 1)$

$\overrightarrow{Q_rQ_{r+1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ von r unabhängig; $\overline{Q_rQ_{r+1}} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{PQ_r} = \begin{pmatrix} 3-2r \\ -2r \\ 3+2r \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PQ_{r+1}} = \begin{pmatrix} 1-2r \\ -2r-2 \\ 5+2r \end{pmatrix}$

Damit $|\overline{PQ_r}| = |\overline{PQ_{r+1}}|$ ist, muß gelten
$\sqrt{9 - 12r + 4r^2 + 4r^2 + 9 + 12r + 4r^2}$
$= \sqrt{1 - 4r + 4r^2 + 4r^2 + 8r + 4 + 25 + 20r + 4r^2}$,
also $12r^2 + 18 = 12r^2 + 24r + 30 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{2}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
soll in der Ebene $(t + 1)x + y + (t - 1)z + t + 3 = 0$ $(t \in \mathbb{R})$ liegen.
Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung ergibt:
$0 = (t + 1)(-s) - 4 + 2s + (t - 1)(-1 + s) + t + 3$
$= -ts - s - 4 + 2s - t + ts + 1 - s + t + 3 = 0$
$\Rightarrow$ $0 = 0$ (wahre Aussage) für beliebige t
Also liegt die Gerade immer in der Ebene.

d) $\vec{n}_1$ von ε_{t_1}: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} t_1+1 \\ 1 \\ t_1-1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2$ von ε_{t_2}: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} t_2+1 \\ 1 \\ t_2-1 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_{t_1} \perp \varepsilon_{t_2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (t_1 + 1)(t_2 + 1) + 1 + (t_1 - 1)(t_2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 \cdot t_2 = -\frac{3}{2}$

e) Hessesche Normalform von ε_t: $\dfrac{(t+1)x + y + (t-1)z + t + 3}{\sqrt{(t+1)^2 + 1 + (t-1)^2}} = 0$

Mit O(0; 0; 0) soll gelten: $d = \sqrt{2} = \left|\dfrac{t+3}{\sqrt{2t^2+3}}\right|$.

Es folgt $t^2 + 6t + 9 = 4t^2 + t$ und damit $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) g_0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(4;\, 7;\, 0) \in g_0$ (für $t = 0$)

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von g_a und h:

$$\begin{aligned} 4 - 3t &= -1 - 4s \\ 7 + 4t &= 22 - 3s \\ a + 5t &= 18 + 2s \quad \Rightarrow \quad s = 1; \quad t = 3; \quad a = 5 \end{aligned}$$

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$; $\quad S(-5;\, 19;\, 20)$

b) h schneidet g_a nur für $a = 5$ (vgl. a)), schneidet also nicht g_0.

$\vec{a}_{g_0} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}_h \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad g_0$ und h sind nicht parallel.

g_0 ist also windschief zu h.

$$d = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ -14 \\ 25 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 23 \\ -14 \\ 25 \end{pmatrix} \right|} = \frac{125}{\sqrt{1\,350}} \approx 3{,}4$$

c) Alle Geraden g_a sind parallel, da sie denselben Richtungsvektor besitzen. Dieser entspricht einem Spannvektor der gesuchten Ebene.

g_0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\quad g_1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ zweiter Spannvektor: $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ε: $\quad 4x + 3y = D$

$D = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 37$ und damit ε: $\quad 4x + 3y = 37$

d) A' sei der Spiegelpunkt von A an ε. Die Gerade l durch A mit dem Richtungsvektor $\vec{n}_\varepsilon$ schneidet ε im Mittelpunkt M von $\overline{AA'}$.

l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneide ε im Punkt M.

$4(-1 + 4r) + 3(22 + 3r) = 37 \quad \Rightarrow \quad r = -1,$ also M(–5; 19; 18)

$\vec{x}_{A'} = 2\vec{x}_M - \vec{x}_A = 2\begin{pmatrix} -5 \\ 19 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ A'(–9; 16; 18)

e) g_5: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Für Q gilt z = 0, also $5 + 5t = 0$. Es folgt $t = -1$ und damit Q(7; 3; 0).

$Q \in g_5$ und $S \in g_5$ (vgl. a)) $\Rightarrow$ $SQ = g_5$

$g_{5/2} \parallel g_5 = SQ \quad \Rightarrow \quad g_{5/2}$ zerlegt ΔQCS in ein Trapez und ein Dreieck.

QC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $g_{5/2}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

P_1 sei der Schnittpunkt von QC und $g_{5/2}$.

$$P_1: \quad \begin{aligned} 4 + 3s &= 4 - 3t \\ 7 - 4s &= 7 + 4t \\ 0 &= \tfrac{5}{2} + 5t \quad \Rightarrow \quad t = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{also} \quad P_1(\tfrac{11}{2}; 5; 0) \end{aligned}$$

P_1 ist der Mittelpunkt von $\overline{QC}$. Aus den Strahlensätzen bzw. den Gesetzen der zentrischen Streckung folgt $A_1 = \frac{1}{4} A_{\Delta QCS}$ bzw. $A_1 : A_2 = 1 : 3$.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3

a) n = 100; p = 0,01; Binomialverteilung

A: $P(X = 2) = \binom{100}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{98} \approx 0{,}1849$

B: $P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{100}{3} \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}99^{97} + \binom{100}{4} \cdot 0{,}01^4 \cdot 0{,}99^{96}$

$\approx 0{,}0759$

b) n = 3; p = 0,01

C: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^3 \approx 0{,}0297$

D: $P(D) = 0{,}99 \cdot 0{,}01 = 0{,}0099$

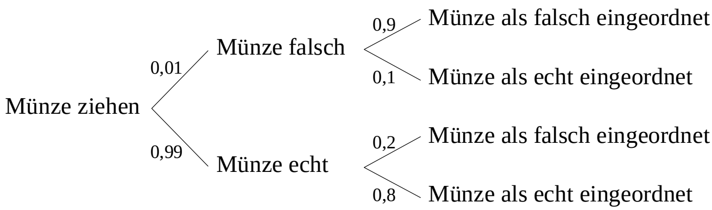
E: $P(E) = 0{,}99^2 \cdot 0{,}01 + 0{,}99^3 = 0{,}9801$ (oder $P(E) = 0{,}99^2$)

c) Ziehen ohne Zurücklegen; n Münzen; eine von 100 Münzen ist falsch.

$$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{99}{n-1}}{\binom{100}{n}} > 0{,}9 \quad\Rightarrow\quad \frac{99!\,n!\,(100-n)!}{(n-1)!\,(99-n+1)!\,100!} = \frac{n(100-n)!}{(100-n)!\,100} > 0{,}9$$

$\Rightarrow$ $n > 90$; Mindestens 91 Münzen sind zu ziehen.

d)



$$P(F) = \frac{P(\text{Münze falsch und als falsch eingeordnet})}{P(\text{Münze als falsch eingeordnet})} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}9}{0{,}01\cdot 0{,}9 + 0{,}99\cdot 0{,}2} \approx 0{,}0435$$

$P(G) = 0{,}01 \cdot 0{,}9 + 0{,}99 \cdot 0{,}8 = 0{,}801$

e) Binomialverteilung; n; $p = 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad \mu = 0{,}01n$; $\sigma^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}99n$

$$0{,}52 \le P(X \ge 11) = 1 - P(X \le 10) = 1 - \phi\left(\frac{10 - 0{,}01n + 0{,}5}{\sqrt{0{,}0099n}}\right)$$

Mit $-z = \frac{10 - 0{,}01n + 0{,}5}{\sqrt{0{,}0099n}}$ folgt $1 - \phi(-z) = \phi(z) \ge 0{,}52$.

Nach Tabelle folgt $z = 0{,}06$, also $\frac{10 - 0{,}01n + 0{,}5}{\sqrt{0{,}0099n}} = -0{,}06$ (*).

$\Rightarrow$ $n^2 - 2\,100{,}3564n + 1\,102\,500 = 0$

$\Rightarrow$ $n_1 = 1\,069{,}52$; $n_2 = 1\,030{,}83$ erfüllt (*) nicht

$n \approx 1\,070$, d. h., es waren mindestens 11 Kästen.

Bewertungsvorschlag

Aufgabe	Teilaufgabe						
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
1.1	11	5	3	6	5		
1.2	12	2	3	2	4	4	3
2.1	4	4	2	2	3		
2.2	4	3	2	2	4		
2.3	2	3	2	4	4		

Abiturprüfung
Leistungskurs

1995 / 96

Gymnasium

Camille-Claudel-Gymnasium Berlin

Aufgabe 1:

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Ebene E durch

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad \text{gegeben.}$$

a) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.
(Ergebnis zur Kontrolle: $2x + 2y - z = 12$.)
Ermitteln Sie die Koordinaten der Spurpunkte S_x, S_y, S_z der Ebene E.
Die Punkte S_x, S_y, S_z und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte einer Pyramide.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Oberfläche dieser Pyramide.

b) In der Ebene E liegt der Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ mit $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ und $p_3 < 0$, der von den drei Koordinatenebenen den gleichen Abstand hat.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P.

c) Berechnen Sie den Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung.

d) Gegeben ist eine Ebenenschar E_a durch:

$$E_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a, r, s \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß keine Ebene der Ebenenschar E_a den Ursprung enthält.
Untersuchen Sie, ob es unter allen Ebenen der Ebenenschar E_a eine Ebene gibt, die parallel zu einer der Koordinatenebenen liegt.
Ermitteln Sie den Wert des Parameters a, für den eine Ebene der Ebenenschar E_a parallel zur z-Achse liegt.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = (x^2 - 1) \cdot 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$, ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
(Wendepunkte ohne Nachweis der hinreichenden Bedingung)
Zeichnen Sie den Graphen im Intervall $I = [-6; 1{,}5]$ in ein Koordinatensystem.

b) Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes dieser Fläche.

c) An die Funktion f wird im Punkt $(1 \mid 0)$ eine Tangente gelegt.
Geben Sie die Gleichung der Tangente t an.

Die Tangente t bildet mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Diesem Dreieck soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden, dessen einer Eckpunkt im Koordinatenursprung liegt.
Ermitteln Sie die Maßzahlen der Rechteckseiten und des Flächeninhalts.

Aufgabe 3:

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie, Nullstellen und sein Verhalten für $x \to \pm\infty$.

b) Weisen Sie nach, daß der Graph der Funktion f keine Hoch- und Tiefpunkte hat und daß der Punkt $(0 \mid 0)$ ein Sattelpunkt ist.
Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $I = [-2{,}5;\ 2{,}5]$ in ein Koordinatensystem.

c) Weisen Sie nach, daß die Funktion f eine Umkehrfunktion $\bar{f}$ besitzt, und zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion im Intervall $[-2{,}5;\ 2{,}5]$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe b).

d) Die Graphen der Funktionen f und $\bar{f}$ schließen eine Fläche A ein.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von A.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1:

a) Koordinatengleichung: $E\colon\ 2x + 2y - z = 12$
Spurpunkte: $S_x(6\,|\,0\,|\,0)$; $S_y(0\,|\,6\,|\,0)$; $S_z(0\,|\,0\,|\,-12)$
Oberflächeninhalt der Pyramide (in FE):

ΔS_xOS_z: $A_1 = 36$; ΔS_yOS_z: $A_2 = 36$; ΔS_xOS_y: $A_3 = 18$;
$\Delta S_xS_yS_z$ ist gleichschenklig: $a = \sqrt{72}$; $h = \sqrt{162}$ (in LE)
$\Rightarrow\ A_4 = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 9\sqrt{2} = 54$;
$\Rightarrow\ A_{\text{Pyramide}} = 144$

b) Koordinaten von P:
$p_1 = p_2 = -p_3 \Rightarrow 2p_1 + 2p_1 + p_1 - 12 = 0$, also $p_1 = 2{,}4 \Rightarrow P(2{,}4\,|\,2{,}4\,|\,-2{,}4)$

c) Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung: $d = \left|\frac{-12}{\sqrt{9}}\right| = 4$ (LE)

d) Keine Ebene enthält den Koordinatenursprung:
Annahme: $(0\,|\,0\,|\,0) \in E_a \Rightarrow$ LGS:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - ar + 2s \quad (1)\\ 0 &= 2 - s \quad (2)\\ 0 &= -4 - 2r + 2s \quad (3)\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow s = 2$; (3) mit $s = 2 \Rightarrow r = 0$; (1) mit $r = 0 \Rightarrow s = 4$
Widerspruch, da $2 \neq 4$. $\Rightarrow (0\,|\,0\,|\,0) \notin E_a$.

Untersuchen auf Parallelität:

Normalenvektor $\vec{n}_a$: $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a\\ 0\\ -2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -ax - 2z = 0$

$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 2z = 0$

$z = a \Rightarrow x = -2$; $y = -4 + 2a$, also $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} -2\\ -4+2a\\ a\end{pmatrix}$

Wenn $E_a \parallel$ xy-Ebene, dann: $\begin{pmatrix} -2\\ -4+2a\\ a\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow -2 = 0$

Widerspruch $\Rightarrow$ Keine Ebene aus E_a ist parallel zur xy-Ebene.

Wenn $E_a \parallel$ yz-Ebene, dann: $\begin{pmatrix} -2\\ -4+2a\\ a\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow -4 = 0$

Widerspruch $\Rightarrow$ Keine Ebene aus E_a ist parallel zur yz-Ebene.

Wenn $E_a \parallel$ xz-Ebene, dann: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4+2a \\ a \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -2 = 0$

Widerspruch $\Rightarrow$ Keine Ebene aus E_a ist parallel zur xz-Ebene.
Parallelität zur z-Achse:

Wenn $E_a \parallel$ z-Achse, dann gilt: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4+2a \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2:

a) Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
$S_{x_1}(1 \mid 0); \quad S_{x_2}(-1 \mid 0); \quad S_y(0 \mid -1)$

Hoch- und Tiefpunkte:

$f'(x) = 2^x(2x + x^2\ln 2 - \ln 2)$

$f''(x) = 2 \cdot 2^x + 2x \cdot 2^x \cdot \ln 2 + \ln 2(2x \cdot 2^x + (x^2 - 1) \cdot 2^x \cdot \ln 2)$

$x_{1/2} = -\frac{1}{\ln 2} \pm [(\frac{1}{\ln 2})^2 + 1]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0{,}31; \quad x_2 \approx -3{,}2$

$f''(0{,}31) = 3{,}007 > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt $(0{,}31 \mid -1{,}12)$

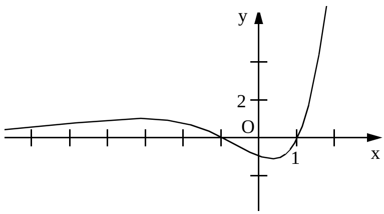
$f''(-3{,}2) = -0{,}26 < 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt $(-3{,}2 \mid 1{,}005)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{4}{\ln 2}x - 1 + \frac{2}{(\ln 2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = -\frac{2}{\ln 2} \pm \sqrt{\frac{2}{(\ln 2)^2} + 1}$

$x_3 \approx -0{,}61; \quad x_4 \approx -5{,}16 \quad \Rightarrow \quad W_1(-0{,}61 \mid -0{,}41); \quad W_2(-5{,}16 \mid 0{,}72)$

Graph:



b) Maßzahl des Flächeninhalts:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)2^x dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} x^2 2^x dx - \int_{-1}^{1} 2^x dx \right|$$

$$\left|\int_{-1}^{1} 2^x dx\right| = \frac{3}{2\ln 2} \approx 2{,}164; \quad \left|\int_{-1}^{1} x^2 2^x dx\right| = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{5}{(\ln 2)^2} + \frac{3}{(\ln 2)^3} \approx 0{,}7655$$

(zweifache partielle Integration)

$A = |\ 0{,}7655 - 2{,}16\ | = 1{,}394 \approx 1{,}4$

c) Tangente t(x): $f'(x) = 2^x(2x + x^2\ln 2 - \ln 2)$

$f'(1) = 4; \quad 0 = 4 \cdot 1 + n \quad \Rightarrow \quad n = -4 \quad \Rightarrow \quad t(x) = 4x - 4$

Rechteck mit maximalem Flächeninhalt:

$A(x) = x(-4x + 4) = -4x^2 + 4x$

$A'(x) = -8x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}; \quad A''(x) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum

Eine Rechteckseite ist 2, die andere 0,5 (LE). Der Flächeninhalt beträgt 1 (FE).

Erwartungsbild zu Aufgabe 3:

a) Symmetrie $f(-x) = \frac{-x^3}{\sqrt{9 + x^2}} = -f(x)$ f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Nullstellen: $x_0 = 0$

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) Hoch- und Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{3x^2(9 + x^2)^{1/2} - x^3 \cdot \frac{1}{2}(9 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x}{9 + x^2} = \frac{27x^2 + 2x^4}{(9 + x^2)^{3/2}}$$

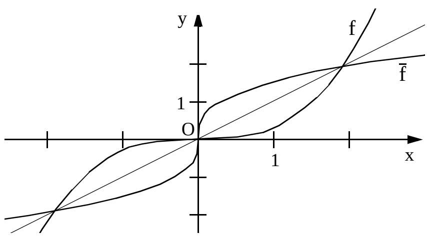
$f'(x) = 0$ für $x^2(27 + 2x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \sqrt{-\frac{27}{2}} \notin \mathbb{R}$

$$f''(x) = \frac{(54x + 8x^3)(9 + x^2)^{3/2} - (27x^2 + 2x^4) \cdot \frac{3}{2}(9 + x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(9 + x^2)^3} = \frac{2x^5 + 45x^3 + 486x}{(9 + x^2)^{5/2}}$$

$f''(0) = 0; \quad f''(-1) = -\frac{533}{\sqrt{105}} < 0; \quad f''(1) = \frac{533}{\sqrt{105}} > 0$

Also ist $(0\,|\,0)$ ein Sattelpunkt, und es gibt keine Hoch- und Tiefpunkte.

Graph:



c) Umkehrfunktion $\bar{f}$:

$f'(x) = \frac{27x^2 + 2x^4}{(9 + x^2)^{3/2}} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f ist streng monoton steigend für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und besitzt damit die Umkehrfunktion $\bar{f}$, deren Graph man durch Spiegelung des Graphen von f an $y = x$ erhält.

d) Berechnung von A:

Die Schnittpunkte der Graphen von f und $\bar{f}$ sind identisch mit den Schnittpunkten von f mit $y = x$.

$\frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{x^6}{9 + x^2} = x^2$, also $\quad x^2 (x^4 - x^2 - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$ bzw.

$x^4 - x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2)_{1/2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 9}$

$(x^2)_1 = \frac{1 + \sqrt{37}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 1{,}88;\ x_2 \approx -1{,}88; \quad (x^2)_2 = \frac{1 - \sqrt{37}}{2} < 0$ entfällt

A besteht aus 4 kongruenten Teilflächen A'.

$$A' = \int_0^{1,88} x\,dx - \int_0^{1,88} \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}}\,dx; \qquad \int_0^{1,88} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1,88} \approx 1{,}7672$$

$$\int_0^{1,88} \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}}\,dx = \int_0^{12,5344} \frac{(z - 9)\sqrt{z - 9}}{\sqrt{z} \cdot 2 \cdot \sqrt{z - 9}}\,dz$$

(Substitution $z = 9 + x^2$; $x = \sqrt{z - 9}$

$\frac{dz}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x} = \frac{dz}{2\sqrt{z - 9}}$)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{12,5344} \left(\sqrt{z} - \frac{9}{\sqrt{z}}\right)dz = \frac{1}{2}\left[\frac{2z\sqrt{z}}{3} - 18\sqrt{z}\right]_0^{12,5344} \approx 0{,}9287$$

$A' = 1{,}7672 - 0{,}9287 = 0{,}8385 \quad \Rightarrow \quad A = 4A' = 3{,}354$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe	Anforderungsbereiche			gesamt
	1	2	3	
1	14	18	0	32
2	12	18	10	40
3	14	14	0	28
	40	50	10	100

Abiturprüfung
Leistungskurs

1996 / 97

Gymnasium

Rückert-Oberschule Berlin

Aufgabe 1: Analytische Geometrie

Gegeben seien die Geradenscharen (g_k) und (h_k) mit

$$g_k: x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}, \; h_k: x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2k \\ -2 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

a) Die Geradenscharen liegen in zwei Ebenen ε_g und ε_h.
Bestimmen Sie Gleichungen von ε_g und ε_h in Parameterform.
Zeigen Sie, daß ε_g und ε_h einander schneiden. (ohne Bestimmung der Schnittgeraden)

b) Die Geraden g_3 und h_3 sind windschief.
Bestimmen Sie den Abstand $d(g_3, h_3)$ von g_3 und h_3.
(Mit Angabe der Punkte $G \in g_3$ und $H \in h_3$, für die gilt $d(G,H) = d(g_3,h_3)$).

c) Untersuchen Sie, für welche(s) $k \in \mathbb{R}$ die Geraden g_k und h_k einander schneiden.
(ohne Schnittpunktbestimmung)

d) Bestimmen Sie die zu g_k orthogonale Gerade g_l.
(Angabe von *l* in Abhängigkeit von k)
Welche Einschränkung gilt dabei für k?
Inwiefern folgt aus dieser Einschränkung sofort, daß nicht jeder Punkt der Ebene ε_g zu einer Geraden g_k gehören kann?

Aufgabe 2: Abbildungsmatrizen

Gegeben sei die Matrizenmenge $S = \{ \begin{pmatrix} k & r \\ 0 & k \end{pmatrix} \mid k, r \in \mathbb{R}, k \neq 0 \}$.

a) Zeigen Sie, daß S bez. der Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe bildet.
Bestimmen Sie dabei auch die Inverse der Matrix $M = \begin{pmatrix} k & r \\ 0 & k \end{pmatrix}$.
Zur Assoziativität: Ein ausführlicher Nachweis ist hier nicht erforderlich. Begründen Sie dies.

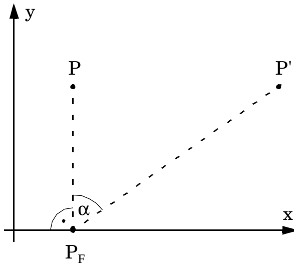
b) Gegeben sei das Dreieck ABC mit $A(1 \mid 0)$, $B(6 \mid 0)$ und $C(3 \mid 5)$.
Bilden Sie das Dreieck ABC mit Hilfe der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ ab.
Zeichnen Sie Urbild- und Bilddreieck in ein und dasselbe Koordinatensystem. (1 LE $\triangleq$ 1 cm)
Bemerkung: Hierbei darf ohne Beweis vorausgesetzt werden, daß eine Strecke $\overline{PQ}$ bei Abbildung durch eine Matrix aus S auf die Strecke $\overline{P'Q'}$ abgebildet wird.

c) Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie das Bild der Geraden g: $y = 2x - 1$ bei Abbildung durch M.

d) Der Punkt $P(a \mid b)$ $(a, b > 0)$ werde mit Hilfe der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r > 0$, auf den Punkt P' abgebildet.

(d1) Zeigen Sie, daß dann die Strecke $\overline{PP'}$ parallel zur x-Achse verläuft.

(d2) Zeigen Sie, daß der Winkel $\alpha = \measuredangle PP_FP'$ nur von r, nicht aber von den Koordinaten von P abhängt.
Dabei sei P_F der Fußpunkt des Lotes von P auf die x-Achse.
(siehe nebenstehende Abbildung)



Aufgabe 3: Wurzelfunktionen

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}_0^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ definierten Funktionen
$f_k\colon x \rightarrow x \cdot (k - \sqrt{x}\,)$, $k > 0$.

Der Graph von f_k ist G_k.

a) Bestimmen Sie die beiden Nullstellen von G_k.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an G_k in den Nullstellen.

b) In welchen Abschnitten des Definitionsbereichs ist G_k streng monoton steigend, in welchen streng monoton fallend?
Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunktes von G_k.

c) Zeichnen Sie G_3 im Bereich $0 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse. (Nullstellen mit Tangenten, Monotonie-Abschnitte, Extrempunkt; 1 LE $\triangleq$ 1 cm)

d) Das Kurvenstück von G_3 zwischen den Nullstellen kommt dem Bogen einer Parabel 2. Ordnung offenbar sehr nahe.
Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Parabel 2. Ordnung, die durch den Extrempunkt und die beiden Nullstellen von G_3 verläuft.

e) Begründen Sie, weshalb für kein $k > 0$ das Kurvenstück von G_k zwischen den Nullstellen *genau* dem Bogen einer Parabel 2. Ordnung entsprechen kann.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1: Analytische Geometrie

a) Bestimmung von Gleichungen für ε_g und ε_h in Parameterform:
Für $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ mit $k_1 \neq k_2$ erhält man jeweils nicht-kollineare Richtungsvektoren, so daß man die entsprechenden Vektoren für die Punktrichtungsform der Ebenengleichung verwenden kann. Damit gilt z.B. ($k_1 = 0$, $k_2 = 1$):

$$\varepsilon_g\text{: } x = \begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};\ \varepsilon_h\text{: } x = \begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Nachweis des Schnittes von ε_g und ε_h:
Gleichsetzung von ε_g und ε_h und Aufstellung eines LGS führt nach Umformung mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus auf folgendes LGS:

(I) $\quad s_1 + s_2 + 3t_1 + 3t_2 = 0$

(II) $\quad 6t_1 + 4t_2 = 5$

(III) $\quad s_2 + 2t_1 + 2t_2 = -6$

Aus Gleichung (II) wird bereits deutlich, daß man eine freie Variable (z.B. t_1) wählen kann, woraus folgt, daß die beiden Ebenen einander schneiden.
Alternative:
Bestimmung der Normalenvektoren n_g und n_h von ε_g und ε_h:

$$n_g = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad n_h = \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-4\\0\\-6\end{pmatrix}$$

Die Normalenvektoren sind offenbar nicht kollinear, also müssen sich die beiden Ebenen schneiden.

b)
$$g_3\text{: } x = \begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\quad h_3\text{: } x = \begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}$$

Bestimmung der Punkte G und H:
Wenn G und H die Punkte sind, für die g_3 und h_3 minimalen Abstand haben, dann muß der Verbindungsvektor von G und H sowohl senkrecht auf g_3 als auch senkrecht auf h_3 (bzw. auf den entsprechenden Richtungsvektoren r_g und r_h) stehen, d.h., es muß gelten:
$(x_G - x_H) \cdot r_g = 0$ bzw. $(x_G - x_H) \cdot r_h = 0$ (x_G, x_H Ortsvektoren von G und H)
Der hieraus resultierende Ansatz

$$\left(\begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = 0 \text{ und}$$

$$\left(\begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix} = 0$$

führt über das LGS

(I) $\quad 28 + 14s + 21t = 0$
(II) $-42 - 21s - 49t = 0$
auf die Lösungen $s = -2$, $t = 0$.
Einsetzen von s in g_3 und t in h_3 ergibt die Lösungen $G(1 \mid 5 \mid 5)$ und $H(3 \mid 6 \mid 5)$.
Bestimmung des Abstandes $d(g_3,h_3)$:

$$d(g_3,h_3) = d(G,H) = \sqrt{(1-3)^2 + (5-6)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{5}$$

c) Gleichsetzung von g_k und h_k führt auf folgendes LGS:
(I) $\quad s + 3t = 0 \quad \Leftrightarrow s = -3t$
(II) $\quad -2s - 2kt = 5$
(III) $\quad ks + 2t = -6$
Einsetzung von (I) $s = -3t$ in (II) und (III) führt auf

II) $\quad 6t - 2kt = 5 \quad \Leftrightarrow t = \frac{5}{6-2k} \quad (k \neq 3)$

III) $\quad -3kt + 2t = -6 \quad \Leftrightarrow t = -\frac{6}{-3k+2} \quad (k \neq \frac{2}{3})$.

Gleichsetzung von (II) und (III) $\frac{5}{6-2k} = -\frac{6}{-3k+2}$ ergibt $k = \frac{46}{27}$.

d) g_k ist genau dann orthogonal zu g_l, wenn die dazugehörigen Richtungsvektoren orthogonal sind:

$g_k \perp g_l \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\l\end{pmatrix} = 0$, also $1 + 4 + k \cdot l = 0$ und damit $l = -\frac{5}{k}$.

Orthogonal sind also jeweils die Geraden g_k und $g_{-\frac{5}{k}}$; dabei muß gelten: $k \neq 0$.

Da es zu g_0 keine orthogonale Gerade in (g_k), wohl aber in ε_g gibt, kann die Geradenschar (g_k) nicht die gesamter Ebene ε_g bilden. Es muß also Punkte in ε_g geben, die zu keiner Geraden g_k gehören.

Bewertungsvorschlag:

a)	Aufstellung der Ebenengleichungen;	2 BE
	Gleichsetzung; Aufstellung des LGS; Feststellung, daß das LGS eine freie Variable hat und daß sich die Ebenen aufgrund dessen schneiden	4 BE
b)	Bestimmung von G und H;	8 BE
	Bestimmung des Abstandes	1 BE
c)	Gleichsetzung von g_k und h_k; Aufstellung eines LGS	2 BE
	Lösung eines LGS und Angabe der Einschränkungen für k	8 BE
d)	Herleitung der Bedingung $g_k \perp g_l \Leftrightarrow l = -\frac{5}{k}$ $(k \neq 0)$;	3 BE
	Angabe der richtigen Folgerung aus der Einschränkung $k \neq 0$	3 BE
		31 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2: Abbildungsmatrizen

a) Nachweis der Abgeschlossenheit von S:

$\begin{pmatrix} k & r \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l & s \\ 0 & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kl & ks + lr \\ 0 & kl \end{pmatrix} \in S \Rightarrow$ S ist abgeschlossen.

Nachweis der Assoziativität von S:
Da die Matrizenmultiplikation allgemein assoziativ ist, gilt die Assoziativität insbesondere in S.

Nachweis der Existenz eines neutralen Elementes in S:
Neutrales Element der 2×2-Matrizen ist die Einheitsmatrix $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Offensichtlich gilt: $E_2 \in S$.

Nachweis der Existenz der inversen Elemente in S:

Der Ansatz $\begin{pmatrix} k & r \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
führt auf das LGS

(I) $ka + rc = 1$
(II) $kb + rd = 0$
(III) $kc = 0 \Rightarrow c = 0$ (wegen $k \neq 0$)
(IV) $kd = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{k}$ $(k \neq 0)$.

$c = 0$ und $d = \frac{1}{k}$ in (I) und (II) führt auf $a = \frac{1}{k}$ und $b = -\frac{r}{k^2}$. Hieraus folgt, daß

$\begin{pmatrix} k & r \\ 0 & k \end{pmatrix}$ die Inverse $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{r}{k^2} \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \in S$ hat. Also hat jede Matrix $M \in S$ eine Inverse $M^{-1} \in S$.

Nachweis der Kommutativität von S:

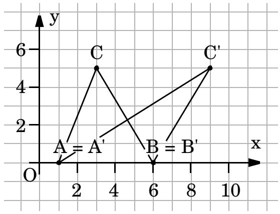
$\begin{pmatrix} k & r \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l & s \\ 0 & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kl & ks + lr \\ 0 & kl \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} l & s \\ 0 & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & r \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk & lr + sk \\ 0 & lk \end{pmatrix}$

Aufgrund der Rechengesetze in $\mathbb{R}$ sind beide Produkte gleich. Also ist S kommutativ.
Insgesamt wurde damit gezeigt, daß S bez. der Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe bildet.

b) Abbildung des Dreiecks ABC:

	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$



Die Bildpunkte haben folgende Koordinaten: A'(1 | 0), B'(6 | 0), C'(9 | 5).

c) $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ 2x-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5x-3\\ -2x+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

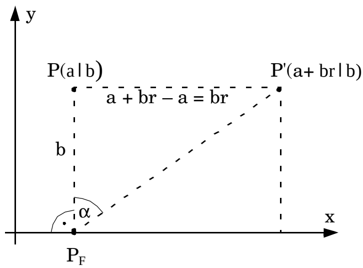
$\Rightarrow$ (I) $x' = 5x - 3 \quad \Rightarrow x = \frac{x'+3}{5}$

(II) $y' = -2x + 1$

$x = \frac{x'+3}{5}$ eingesetzt in II) ergibt g': $y' = -0{,}4x' - 0{,}2$.

d) Bestimmung der Koordinaten des Bildpunktes P':

$\begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+br\\ b\end{pmatrix} \Rightarrow P'(a + br \mid b)$



(d1) Da $P(a \mid b)$ und $P'(a + br \mid b)$ dieselbe y-Koordinate haben, ist die Strecke $\overline{PP'}$ offensichtlich parallel zur x-Achse.

(d2) Es gilt $\alpha = \tan^{-1}(\frac{br}{b}) = \tan^{-1} r$; α ist also tatsächlich nur abhängig von r.

Bewertungsvorschlag:

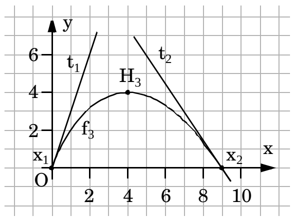
a)	Nachweis der Abgeschlossenheit	2 BE
	Begründung der Assoziativität	1 BE
	Angabe von $E_2 \in S$	1 BE
	Herleitung der inversen Matrix	5 BE
	Nachweis der Kommutativität	3 BE
b)	Bestimmung von A' = A, B' = B und C'(9 | 5)	3 BE
	Zeichnung	2 BE
c)	Bestimmung von x' und y'	3 BE
	Auflösung nach x und Einsetzung	2 BE
	Bestimmung von g'	3 BE
d)	Berechnung von P'(a + br | b)	1 BE
	(d1) Argumentation: $\overline{PP'} \parallel$ x-Achse aufgrund derselben y-Koordinate	2 BE
	(d2) Herleitung von $\alpha = \tan^{-1}(\frac{br}{b}) = \tan^{-1} r$; Folgerung, daß α nur von r abhängt	3 BE
		31 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3: Wurzelfunktionen

a) Bestimmung der beiden Nullstellen von G_k:
$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (k - \sqrt{x}\,) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; k - \sqrt{x} = 0$;
$k - \sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow k = \sqrt{x} \;\Leftrightarrow x = k^2$
Die Nullstellen von G_k sind: $x_1 = 0$ und $x_2 = k^2$
Bestimmung der Tangentengleichungen an G_k in den Nullstellen:
Es gilt: $f_k'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x} + k$ (Anwendung der Produktregel)
Bestimmung der Tangente t_1:
$m_1 = f_k'(0) = k \Rightarrow t_1$: $y = kx$ (Ursprungsgerade!)
Bestimmung der Tangente t_2:
$m_2 = f_k'(k^2) = -\frac{1}{2}k$
$n_2 = y - m_2x \Rightarrow n_2 = 0 - (-\frac{1}{2}k \cdot k^2) = \frac{1}{2}k^3 \Rightarrow t_2$: $y = -\frac{1}{2}kx + \frac{1}{2}k^3$

b) Es gilt:
$f_k'(x) > 0 \Rightarrow f_k$ ist streng monoton steigend;
$f_k'(x) < 0 \Rightarrow f_k$ ist streng monoton fallend.
$f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{x} + k > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{9}k^2$
$\Rightarrow$ Für $0 \le x < \frac{4}{9}k^2$ ist f_k streng monoton steigend.
Entsprechend folgt: Für $x > \frac{4}{9}k^2$ ist f_k streng monoton fallend.
Damit gilt aufgrund der Stetigkeit von f_k:
$x_H = \frac{4}{9}k^2$ ist Maximumstelle von G_k; $y_H = f_k(\frac{4}{9}k^2) = \frac{4}{27}k^3$.
Extrempunkt von G_k ist der Hochpunkt $H_k(\frac{4}{9}k^2 \mid \frac{4}{27}k^3)$.

c) Nullstellen von G_3: $(0 \mid 0)$, $(9 \mid 0)$;
Tangenten in den Nullstellen: t_1: $y = 3x$,
t_2: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{27}{2}$;
Hochpunkt H_3: $(4 \mid 4)$
$0 \le x < 4$: f_3 ist streng monoton steigend;
$x > 4$: f_3 ist streng monoton fallend.



d) Allgemeine Gleichung einer Parabel 2. Ordnung: $y = ax^2 + bx + c$.
Aus $(0 \mid 0)$ folgt $c = 0$; $(4 \mid 4)$ und $(9 \mid 0)$ eingesetzt in $y = ax^2 + bx$ führt auf das LGS I) $16a + 4b = 4$; II) $81a + 9b = 0$ mit den Lösungen $a = -0{,}2$ und $b = 1{,}8$.
Die Gleichung der Parabel lautet also: $y = -0{,}2x^2 + 1{,}8x$.

e) Jede Parabel zweiter Ordnung ist achsensymmetrisch zur Vertikalen durch ihren Scheitelpunkt. Würde nun das Kurvenstück dem Bogen einer Parabel zweiter Ordnung entsprechen, so müßte es achsensymmetrisch sein zu $x = \frac{4}{9}k^2$. Dies ist aber wegen der Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = k^2$ nicht möglich.
Alternative:
Aufgrund der Achsensymmetrie von Parabeln zweiter Ordnung müssen auch die Tangenten in den Nullstellen achsensymmetrisch zur Vertikalen durch den Scheitelpunkt sein. Insbesondere müßte für die Steigungen m_1 und m_2 der Tangenten t_1 und t_2 gelten: $m_2 = -m_1$.
Es gilt $m_1 = k$, $m_2 = -\frac{1}{2}k$, so daß die Gleichung $m_2 = -m_1$ nur für $k = 0$ erfüllt wäre. Es gilt aber $k > 0$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Bestimmung der Nullstellen	2 BE
	Bildung der 1. Ableitung von f_k	2 BE
	Bestimmung von t_1	1 BE
	Bestimmung von t_2	3 BE
b)	Angabe der Monotonieabschnitte	3 BE
	Angabe des Hochpunktes	3 BE
c)	Angabe konkreter Werte, Skizze	6 BE
d)	Angabe der Parabelgleichung	5 BE
e)	Angabe der Begründung	3 BE
		28 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1995 / 96

Gymnasium

Gesamtschule
mit gemeinsamer gymnasialer Oberstufe
Bernau / Zepernick

Aufgabe 1: Analysis – Exponentialfunktion zur Basis e

Es seien $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen der Form $f_a(x) = a\,x\,e^x$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen, Wertebereich) in Abhängigkeit von a durch. Beachten Sie besonders $a_0 = 0$.

b) Finden Sie ein $a_1 \in \mathbb{Z}$, so dass $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t(x) = 2e(1 - 2x)$ eine Tangente an f_{a_1} ist.
Zeichnen Sie f_{a_1} und t in ein Koordinatensystem. Wählen Sie hierzu eine Längeneinheit gleich 2 cm.

c) Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph der Funktion f_{-2} um die x-Achse im Intervall $[-\infty; 0]$ rotiert.
Hinweis: Es gilt für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$

$$\int (x^n \cdot e^{ax})dx = \frac{1}{a}\left(x^n \cdot e^{ax} - n \cdot \int (x^{n-1} \cdot e^{ax})dx\right).$$

d) Beweisen Sie, dass die Funktion $y = f(x) = e^x$ durch
(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$;
und (2) f ist differenzierbar mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
eindeutig charakterisiert ist.
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(x) \cdot e^{-x}$.

Aufgabe 2: Analytische Geometrie / Lineare Algebra – Kugel und Ebene im Raum

a) $K = \{X = (x \mid y \mid z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 10y = -16\}$
Beschreiben Sie die Punktmenge K und konstruieren Sie die Punktmengen $K' = \{X \in K \mid x \geq 0 \text{ und } z = 0\}$ und $K'' = \{X \in K \mid x = 0 \text{ und } z \geq 0\}$.

b) τ_1 ist die Tangente an die Kugel K (mit dem Mittelpunkt $M = (0 \mid 5 \mid 0)$ und dem Radius r = 3 LE), die in der xy-Ebene durch den Koordinatenursprung für positive x- und y-Werte verläuft.
τ_2 ist die Tangente an dieselbe Kugel K, die ebenfalls durch den Koordinatenursprung, aber in der yz-Ebene für positive z- und y-Werte verläuft.
Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises K_S, der als Schnitt der Kugel K und der Ebene ε entsteht, wobei $\tau_1, \tau_2 \subset \varepsilon$ gilt.
Bestimmen Sie zuvor Gleichungen zur Beschreibung von τ_1, τ_2 und ε.

c) Zeichnen Sie in das zu a) angefertigte Koordinatensystem die Geraden τ_1 und τ_2 und Höhenlinien der Ebene ε ein.
Finden Sie drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3, die jeweils den Kreis K_S in genau einem Punkt berühren und zugleich die Kugel K in einem Großkreis schneiden.

Erwartungsbild zu Aufgabe 1:

a) $f_a(x) = axe^x$

Nullstellen: $f_a(x_N) = 0 = ax_N e^{x_N} \Leftrightarrow$ $a = 0$ ($f_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$) oder $x_N = 0$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, hat jede Funktion f_a ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) genau eine Nullstelle für $x_N = 0$.

Extrema: $f_a'(x_E) = 0$ und $f_a''(x_E) \neq 0$

$f_a'(x) = a(x+1)e^x$; $f_a''(x) = a(x+2)e^x$

$\Rightarrow$ $x_E = -1$, da $f_a'(-1) = 0$ und $f_a''(-1) = ae^{-1} \neq 0$ für $a \neq 0$.

Fallunterscheidung:

$a > 0$: f_a hat an der Stelle $x_E = -1$ ein lokales Minimum.

[$a = 0$: f_a ist konstant (keine Extrema).]

$a < 0$: f_a hat an der Stelle $x_E = -1$ ein lokales Maximum.

Wendepunkte: $f_a''(x_W) = 0$ und $f_a'''(x_W) \neq 0$

$f_a''(x) = a(x+2)e^x$; $f_a'''(x) = a(x+3)e^x$

$\Rightarrow$ $x_W = -2$, da $f_a''(-2) = 0$ und $f_a'''(-2) = ae^{-2} \neq 0$ für $a \neq 0$.

Die Funktionen f_a haben für $a \neq 0$ genau einen Wendepunkt an der Stelle $x_W = -2$.

Verhalten im Unendlichen:

Fallunterscheidung:

$a > 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} (axe^x) = 0$, da e^x für $x \to -\infty$ stärker gegen 0 strebt als x gegen $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (axe^x) = \infty$, da mit $x \to \infty$ auch $e^x \to \infty$ gilt.

$a = 0$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (axe^x) = 0$, da $f_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$a < 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} (axe^x) = 0$, da e^x für $x \to -\infty$ stärker gegen 0 strebt als x gegen $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (axe^x) = -\infty$, da mit $x \to \infty$ auch $e^x \to \infty$ gilt.

Wertebereich:

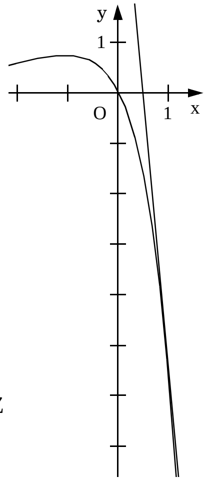
Fallunterscheidung:

$a > 0$: $Wb(f_a) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq f_a(-1) = -\frac{a}{e}\}$

$a = 0$: $Wb(f_a) = \{y = 0\}$

$a < 0$: $Wb(f_a) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq f_a(-1) = -\frac{a}{e}\}$

b) Es sei t die Tangente an f_{a_1} an der Stelle x_1.



Dann gilt: $f_{a_1}(x_1) = a_1 x_1 e^{x_1} = -4e x_1 + 2e = t(x_1)$;

und $f_{a_1}'(x_1) = a_1(x_1 + 1)e^{x_1} = -4e = t'(x_1)$.

$f_{a_1}(x_1) = t(x_1) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{-4e x_1 + 2e}{x_1 e^{x_1}}$

$f_{a_1}'(x_1) = t'(x_1) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{-4e}{(x_1 + 1)e^{x_1}}$

$\dfrac{-4e x_1 + 2e}{x_1 e^{x_1}} = \dfrac{-4e}{(x_1 + 1)e^{x_1}} \quad \Rightarrow (x_1 + 1)(-4e x_1 + 2e) = -4e x_1$

$\Rightarrow \quad x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow x_{1(1)} = 1; \quad a_{1(1)} = -2 \in Z$

$x_{1(2)} = -\frac{1}{2}; \; a_{1(2)} = -8e\sqrt{e} \notin Z$

Da $a_1 \in Z$ gefordert war, ist t mit $t(x) = 2e(1 - 2x)$ die Tangente an f_{-2} an der Stelle $x_1 = 1$. Zu zeichnen sind also die Graphen der Funktionen $y = t(x) = 2e(1 - 2x)$ und $y = f_{-2}(x) = -2xe^x$ mit dem Berührungspunkt $(1 \mid -2e)$.

c) $f_{-2}(x) = -2xe^x$; $\quad f_{-2}^2(x) = 4x^2e^{2x}$

Berechnung der Stammfunktion F_{-2} von f_{-2}^2:

$\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x^2e^{2x} - 2\int xe^{2x}\,dx)$; $\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(xe^{2x} - \int e^{2x}\,dx)$;

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \Rightarrow \quad \int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$,

$\Rightarrow \quad \int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$,

also $\int 4x^2e^{2x}\,dx = 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{2x} = (2x^2 - 2x + 1)e^{2x} = F_{-2}(x)$.

$$V_{Rot} = \pi \cdot \int_{-\infty}^{0} f_{-2}^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad V_{Rot} = \pi \cdot \lim_{t \to -\infty} \left(\int_t^0 f_{-2}^2(x)\,dx\right) = \pi \cdot \lim_{t \to -\infty} (F_{-2}(0) - F_{-2}(t))$$

$$= \pi \cdot \lim_{t \to -\infty} (1 - (2t^2 - 2t + 1)e^{2t}) = \pi \cdot (1 - 0) = \pi$$

Der Grenzwert des zweiten Summanden ist gleich 0, da (für $t \to -\infty$) e^{2t} stärker gegen 0 strebt als $(2t^2 - 2t + 1)$ gegen unendlich.

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt π LE^3.

d) Gezeigt werden soll: $f(x) = e^x$ ist durch (1) und (2) eindeutig charakterisiert.
Demzufolge ist zu zeigen: (a) f hat die Eigenschaften (1) und (2),
(b) nur f hat diese Eigenschaften.

(a) Sei $f(x) = e^x$, dann gilt (1), denn f ist reellwertig und $f(0) = e^0 = 1$, und es gilt (2), denn $f'(x) = (e^x)' = e^x = f(x)$.

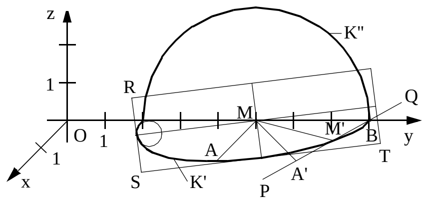
(b) Annahme: f hat die Eigenschaften (1) und (2) und $f(x) \neq e^x$ für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$.
Sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $h(x) = f(x) \cdot e^{-x}$, dann gilt:
$h'(x) = f(x)(-e^{-x}) + f'(x)e^{-x} = -f(x)e^{-x} + f(x)e^{-x}$ (wegen (2)).
$\Rightarrow$ $h'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $h(x) = c =$ konstant für alle $x \in \mathbb{R}$.
Damit gilt: $c = h(0) = f(0)e^0 = 1$ (wegen (1)).
$\Rightarrow$ $h(x) = 1 = f(x)e^{-x}$ $\Rightarrow$ $f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Widerspruch zur Annahme $f(x) \neq e^x$ für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$.
Damit gibt es neben $f(x) = e^x$ keine weitere Funktion, für die (1) und (2) erfüllt sind.

q.e.d.

Erwartungsbild zu Aufgabe 2:

a) Aus $x^2 + y^2 + z^2 - 10y = -16$ ergibt sich durch quadratische Ergänzung:
$x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 9$. K ist also eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M = (0 \mid 5 \mid 0)$ und dem Radius $r = 3$ LE.

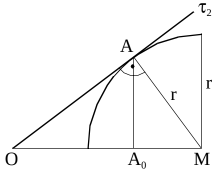
Zur Konstruktion des perspektivisch dargestellten Kreises:
A und B sind Punkte des Kreises, $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ sind zueinander senkrechte Radien.



- Drehung von $\overline{MA}$ um 90° um M $\Rightarrow$ A'
- Kreisbogen um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'B}$ mit dem Radius $\overline{MM'}$ $\Rightarrow$ P, Q auf g(A', B)
- Die Geraden g(P, M) und g(Q, M) bilden die Achsen der zu konstruierenden Ellipse, $|\overline{PA'}|$ und $|\overline{PB}|$ sind die Längen der kleinen und großen Halbachse.
- Parallelverschiebung $\Rightarrow$ Rechteck, in dem die Ellipse liegt
- Lot von S auf $\overline{RT}$ $\Rightarrow$ Mittelpunkte der Scheitelkreise als Schnittpunkte des Lotes mit den Achsen der Ellipse

b) $\overline{OM} = 5$; $r = 3$

Das Dreieck OMA ist rechtwinklig; $\overline{A_0A}$ ist die Höhe des Dreiecks.



Kathetensatz: $r^2 = \overline{OM} \cdot \overline{A_0M}$ $\Rightarrow$ $\overline{A_0M} = \frac{9}{5}$

$\Rightarrow$ $\overline{A_0A} = \frac{12}{5}$ (nach Satz des Pythagoras)

Höhensatz: $\overline{A_0A}^{\,2} = \overline{OA_0} \cdot \overline{A_0M} \Rightarrow \overline{\Theta A_0} \quad \frac{16}{5}$

Außerdem gilt x = 0 für alle $X \in \tau_2$.

$\Rightarrow$ A = (0 ǀ 3,2 ǀ 2,4) Es folgt: $X \in \tau_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Analog ergibt sich:

B = (2,4 ǀ 3,2 ǀ 0) $\in \tau_1$. Es folgt: $X \in \tau_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da O, A, B $\in \varepsilon$, gilt: $X \in \varepsilon \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = s_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

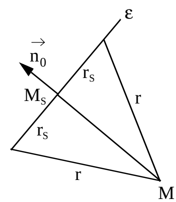
In Koordinatenform lautet die Gleichung für ε: $4x - 3y + 4z = 0$.

Bestimmung des Mittelpunktes M_S und des Radius r_S des Schnittkreises K_S:

Es ist $\overrightarrow{OM_S} = \overrightarrow{OM} + |\overrightarrow{MM_S}| \cdot \overrightarrow{n_0}$

mit dem Normaleneinheitsvektor: $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

und $|\overrightarrow{MM_S}| = |(\overrightarrow{OO} - \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{n_0}|$



$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{15}{\sqrt{41}}$$

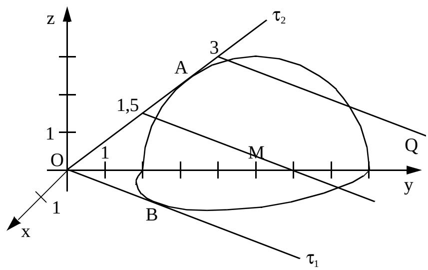
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OM_S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{15}{\sqrt{41}} \cdot \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 60 \\ 160 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt des Schnittkreises liegt etwa bei (1,5 ǀ 3,9 ǀ 1,5).

Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $r_S^{\,2} = r^2 - |\overrightarrow{MM_S}|^2 = 9 - \frac{225}{41} \;.\; \frac{144}{41}$

$r_S = \frac{12}{\sqrt{41}}$; Der Radius des Schnittkreises r_S beträgt etwa 1,9 LE.

c) Die xy-Ebene und die yz-Ebene erfüllen die genannten Bedingungen:
$\varepsilon_1 = \{(x \mid y \mid 0) \in \mathbb{R}^3\}$
$\varepsilon_2 = \{(0 \mid y \mid z) \in \mathbb{R}^3\}$
ε_1 und ε_2 haben mit ε jeweils die Geraden τ_1 und τ_2 gemeinsam, welche Tangenten an K_S sind, d.h., K_S in genau einem Punkt berühren.



ε_1 und ε_2 schneiden K in Großkreisen, da M = (0 | 5 | 0) in beiden Ebenen liegt.
Bestimmung einer Ebene ε_3:

$M \in \varepsilon_3$ ist notwendig, damit ε_3 die Kugel K in einem Großkreis schneidet.

$C \in K_S \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM_S}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}2 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + \frac{2}{41}\begin{pmatrix} 60 \\ 28{,}8 \\ -38{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{205}\begin{pmatrix} 600 \\ 944 \\ 108 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = (\approx 2{,}9 \,|\, \approx 4{,}6 \,|\, \approx 0{,}5)$$

Es soll nun $C \in \varepsilon_3$ sein. Wenn $g = \varepsilon \cap \varepsilon_3$, so ist für $g = \overrightarrow{OC} + t\vec{a}$ und $g \parallel \tau_2$ folglich $\vec{a}$ ein möglicher Richtungsvektor von ε_3. Ein weiterer möglicher Richtungsvektor ergibt sich aus $\vec{b} = \frac{205}{3}\overrightarrow{MC}$.

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 200 \\ -27 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Die Ebene ε_3 mit: $\quad \varepsilon_3 = \left\{(x \,|\, y \,|\, z) \in \mathbb{R}_3 \,|\, \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} 200 \\ -27 \\ 36 \end{pmatrix}\right\}$

erfüllt ebenfalls die genannten Bedingungen.