Abiturprüfung Leistungskurs 1998/99

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern
Sachsen
Sachsen-Anhalt
Thüringen
Berlin
Brandenburg

paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH Berlin

Autoren für die einzelnen Bundesländer bzw. die ausgewählten Schulen:

Margit Liskow (Mecklenburg-Vorpommern)
Dr. Rainer Heinrich (Sachsen)
Birgit Maier (Sachsen-Anhalt)
Dr. Eva-Maria Westerhoff (Thüringen)
Dr. Rolf Ebel (Beethoven-Oberschule Berlin-Steglitz)
Uta Erfurt (Stauffenberg-Gymnasium Berlin-Hohenschönhausen)
Dr. Andreas Tosch (Sängerstadt-Gymnasium Finsterwalde)

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

1. Auflage
1 5 4 3 2 1 | 2003 2002 2001 2000 1999

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

Redaktion: Dr. Hubert Bossek, Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber
Layout: Martin Bossek, Günter Liesenberg, Tino Mai, Erika Netzmann, Jörg Prommersberger, Jörg-Peter Schütt
Umschlaggestaltung: Birgit Kintzel
Druck: Saale-Druck Naumburg GmbH

ISBN 3-89517-275-8

Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Heft enthält die Aufgaben, die in den zentralen Abiturprüfungen des Schuljahrs 1998/99 für Mathematik-Leistungskurse in den Bundesländern Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen gestellt wurden. Da es in Berlin und Brandenburg kein Zentralabitur für das Fach Mathematik gibt, wurden als Beispiele weiterhin die Abiturprüfungsarbeiten von zwei Berliner und einer Brandenburger Schule in das Heft aufgenommen.

Die Erwartungsbilder skizzieren in der Regel einen möglichen Lösungsweg, wobei stets auch wesentliche Zwischenschritte Aufnahme fanden, um den Nachvollzug des Gedankengangs zu erleichtern und für den Lernenden die Möglichkeiten zur Selbstkontrolle zu erhöhen. Die angegebenen Bewertungsvorschläge haben empfehlenden Charakter. Einigen Arbeiten vorangestellte *Hinweise* informieren über länderspezifische Modalitäten der Prüfungsdurchführung.

Hinsichtlich der Symbolik und Zeichensetzung wie auch der Beachtung der reformierten Rechtschreibung folgen die Aufgabentexte den Originalfassungen, woraus teilweise Unterschiede zwischen den Vorgehensweisen in den einzelnen Arbeiten resultieren. Aus Platzgründen war es erforderlich, mitunter „fortlaufende“ Gleichungen oder „Schlussketten“ zu verwenden. Das Zeichen „$\Rightarrow$“ wird dabei als Abkürzung für „daraus folgt“, „daraus ergibt sich“ u. Ä. genutzt, also nicht allein zur Kennzeichnung einer Implikation im strengen Sinne.

Der PAETEC Schulbuchverlag hofft, mit dieser Aufgabensammlung den Lehrkräften Anregungen für die Gestaltung eigener Klausur- und Prüfungsarbeiten sowie den Schülerinnen und Schülern Hilfe bei der Vorbereitung auf das Abitur zu geben. Darüber hinaus erlaubt die geschlossene Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben aus einem Schuljahr gewiss interessante Vergleiche bezüglich Schwerpunktsetzung, Anforderungsniveau, Aufgabengestaltung usw. in den verschiedenen Bundesländern, woraus wiederum Ansätze für eigenes Nachdenken erwachsen können.

Die Redaktion

Berlin, September 1999

Abiturprüfung Leistungskurs

1998 / 99

Gymnasium

Mecklenburg-Vorpommern

Hinweise:

- Die Schüler erhielten zwei Aufgabenblöcke, bestehend aus Pflicht- und Wahlteil, von denen einer auszuwählen war.
  Der Pflichtteil war vollständig, von den Wahlaufgaben waren zwei zu bearbeiten.
- Zur Aufgabenauswahl stand den Schülern eine Zeit von 30 Minuten zur Verfügung, die reine Arbeitszeit betrug 300 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel waren:
  Tafelwerk; nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner; Zeichengeräte; Duden (Rechtschreibung)

Aufgabe P1: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein Dreieck ABC durch die Eckpunkte $A(4|0|3)$, $B(10|6|0)$ und $C(8|7|7)$ gegeben. A, B und C bestimmen die Ebene ε.

1.1 Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein kartesisches Koordinatensystem. Berechnen Sie einen Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

1.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt $Q(8|4|1)$ auf der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC liegt.

1.3 Zeigen Sie, dass die Gerade g durch die Punkte $R(0|2|9{,}5)$ und $T(5|4|6)$ nicht in der Ebene ε liegt. Die Gerade g schneidet die Seitenhalbierende s_c des Dreiecks ABC im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe P2: Analysis

Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = 2 \cdot e^{-0{,}35x}$, $x \in \mathbb{R}$.

2.1 Berechnen Sie einige Funktionswerte $f(x)$ für $0 \leq x \leq 5$ und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(3|f(3))$. Die Tangente t, der Graph f und die y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

2.3 Gegeben sind eine geometrische Zahlenfolge (a_n) mit $a_1 = 2$ und $q = 0{,}7$ und Folgen (b_n) mit $b_n = k \cdot e^{cn}$, $c, k \in \mathbb{R}$.

2.3.1. Bestimmen Sie k und c so, dass $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ sind. Zeigen Sie, dass dann auch für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n = b_n$.

2.3.2 Berechnen Sie die Anzahl der Glieder der Folge (a_n), die größer als 0,00014 sind.

Aufgabe P3: Stochastik

3.1 Einer Umfrage zufolge haben 12 % aller Abiturienten einen eigenen Zugang zum Internet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 30 zufällig ausgewählten Abiturienten nur maximal zwei über einen eigenen Internetzugang verfügen?

3.2 Ein Mathematiklehrer behauptet, dass mindestens 50 % aller Abiturienten in Mecklenburg-Vorpommern einen Computer zur Lösung von Hausaufgaben einsetzen. Andere Kollegen halten diese Zahl für zu hoch. Bei einem Test soll die Behauptung abgelehnt werden, falls von 50 befragten Schülern nur höchstens 21 den Computer zur Lösung von Hausaufgaben einsetzen.

3.2.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man die Behauptung fälschlicherweise ablehnt?

3.2.2 In welcher Art müsste das oben genannte Kriterium verändert werden, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5 % betragen soll?

Binomialverteilung (Summenfunktion)

$F_{n;p}(k) = B_{n;p}(O) + ... + B_{n;p}(k)$

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	$\frac{1}{6}$	0,2	0,3	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5		
	0	0,3642	2181	1299	0769	0052	0001	0000	0000	0000	0000	0000	49	
	1	7358	5553	4005	2794	0338	0012	0002	0000	0000	0000	0000	48	
	2	9216	8108	6767	5405	1117	0066	0013	0000	0000	0000	0000	47	
	3	9822	9372	8609	7604	2503	0238	0057	0000	0000	0000	0000	46	
	4	9968	9832	9510	8964	4312	0643	0185	0002	0000	0000	0000	45	
	5	9995	9963	9856	9622	6161	1388	0480	0007	0001	0000	0000	44	
	6	9999	9993	9964	9882	7702	2506	1034	0025	0005	0000	0000	43	
	7		9999	9992	9968	8779	3911	1904	0073	0017	0000	0000	42	
	8			9999	9992	9421	5421	3073	0183	0050	0002	0000	41	
	9				9998	9755	6830	4437	0402	0127	0008	0000	40	
	10					9906	7986	5836	0789	0284	0022	0000	39	
	11					9968	8827	7107	1390	0570	0057	0000	38	
	12					9990	9373	8139	2229	1035	0133	0002	37	
	13					9997	9693	8894	3279	1715	0280	0005	36	
	14					9999	9862	9393	4468	2612	0540	0013	35	
50	15						9943	9692	5692	3690	0955	0033	34	50
	16						99789	9856	6839	4868	1561	0077	33	
	17						9992	9937	7822	6046	2369	0164	32	
	18						9998	9975	8594	7126	3356	0325	31	
	19						9999	9991	9152	8036	4465	0595	30	
	20							9997	9522	8741	5610	1013	29	
	21							9999	9749	9244	6701	1611	28	
	22								9877	9576	7660	2399	27	
	23								9944	9778	8438	3359	26	
	24								9976	9892	9022	4439	25	
	25								9991	9951	9427	5561	24	
	26								9997	9979	9686	6641	23	
	27								9999	9992	9840	7601	22	
	28									9997	9924	8389	21	
	29									9999	9960	8987	20	
	30										9986	9405	19	
	31										9995	9675	18	
	32										9998	9836	17	
	33										9999	9923	16	
	34											9967	15	
	35											9987	14	
	36											9995	13	
	37											9998	12	
		0,98	0,97	0,96	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,50	k	n

p (upper column headings); p (lower column headings)

Nicht ausgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei $p \geq 0,5$ gilt:
$F_{n;p}(k) = 1 -$ abgelesener Wert

Aufgabe A4: Analysis, Geometrie

Gegeben sind eine Schar von Kreisen k_a durch die Gleichung
$x^2 + y^2 - 2ay = 0, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$ und eine Parabel p durch die Gleichung
$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

4.1 Berechnen Sie die Mittelpunkte und die Radien der Kreise in Abhängigkeit von a. Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem die Kreise k_a für $a = 1, 2, 3, 4$ und 5 sowie die Parabel p.

4.2 Welcher der Kreise k_a schneidet die Parabel p im Punkt $S(4|4)$? Berechnen Sie für diesen Kreis den Schnittwinkel mit der Parabel im Punkt $S(4|4)$.

4.3 Die Parabel schneidet aus der Kreisfläche von k_4 zwei zueinander kongruente Flächenstücke ab, die bei Rotation um die y-Achse einen Körper erzeugen. Berechnen Sie den Inhalt von einem dieser Flächenstücke und das Volumen des Rotationskörpers.

4.4 Die Kreise k_a haben mit der Parabel entweder genau einen Punkt oder genau drei Punkte gemeinsam. Für welche Werte von a gibt es genau einen gemeinsamen Punkt? Der größte dieser Werte von a sei r_k. Bestätigen Sie, dass gilt: $r_k \cdot f''(0) = 1$.

Aufgabe A5: Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a und g_b durch die Gleichungen
$y = f_a(x) = e^{-0,5ax^2}$, $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $y = g_b(x) = e^{-bx+0,5}$, $x \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Die zugehörigen Graphen seien F_a und G_b.

5.1 Untersuchen Sie die Funktionen f_a und g_b auf Monotonie und Symmetrie. Berechnen Sie die Wendestellen von f_a. Skizzieren Sie F_1 und G_1 in ein und dasselbe Koordinatensystem.

5.2 Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von F_1 und G_1. Vergleichen Sie die Anstiege der beiden Graphen in diesem Punkt miteinander.

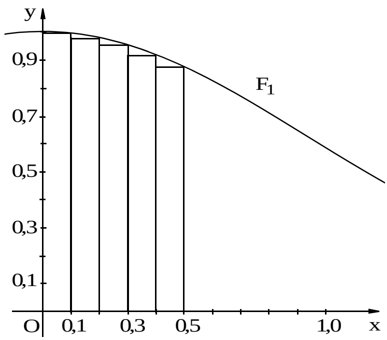
5.3 Der Graph G_1, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = z, z > 0$, begrenzen eine Fläche mit dem Flächeninhalt $A(z)$ vollständig. Berechnen Sie $A(z)$ und $\lim\limits_{z \to \infty} A(z)$.

5.4 Aus einer Tabelle entnimmt man für den Flächeninhalt unter F_1 im Intervall $0 \le x \le 0{,}5$ den Wert 0,4799 Flächeneinheiten. Um den Flächeninhalt näherungsweise zu berechnen, werden zwei Verfahren angewendet:

(1) Statt f_1 wird die Funktion h mit der Gleichung $y = h(x) = 0{,}125x^4 - 0{,}5x^2 + 1$ verwendet. Berechnen Sie damit den Flächeninhalt dieser Fläche.

(2) Der Flächeninhalt zwischen F_1 und der x-Achse wird durch fünf Rechtecke der Breite 0,1 unterhalb des Graphen angenähert (Untersumme). Berechnen Sie auch damit den Flächeninhalt.
Dazu werden folgende Werte ermittelt:

x	$f_1(x)$
0	1
0,1	0,9950
0,2	0,9802
0,3	0,9560
0,4	0,9231
0,5	0,8825



Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse mit dem angegebenen Flächeninhalt.

Aufgabe A6: Geometrie

Gegeben sind eine dreiseitige Pyramide ABCD durch die Eckpunkte $A(7|0|1)$, $B(10|12|1)$, $C(1|3|0)$, $D(1|3|10)$ sowie die Punkte $P(5|1|4)$ und $Q(7|9|4)$. R ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ und ε ist die Ebene PQR.

6.1 Stellen Sie die Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

6.2 Zeigen Sie, dass P die Strecke $\overline{AD}$ und Q die Strecke $\overline{BD}$ jeweils im Verhältnis 1 : 2 teilen. Begründen Sie, dass die Geraden AB und PQ parallel zueinander sind.

6.3 Ermitteln Sie die Koordinatengleichung der Ebene ε und den Inhalt der Schnittfläche dieser Ebene mit der dreiseitigen Pyramide.

6.4 Die Ebene ε zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper.

Aufgabe B4: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k durch die Gleichung
$y = f_k(x) = \frac{1}{4}(x-k)^2 + 4, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$. G_k sei der zu f_k gehörige Graph.

4.1 Geben Sie den Wertebereich von f_k an. Zeichnen Sie G_0, G_4, G_8 in ein und dasselbe kartesische Koordinatensystem.

4.2 Die Tangente t_4 an G_4 in $P_1(0|f_4(0))$ und die Tangente t_8 an G_8 in $P_2(12|f_8(12))$ bilden mit der Geraden $y = 8$ ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

4.3 Der Graph G_0 und die Gerade $y = 8$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

4.4 Der in 4.3 angegebenen Fläche wird ein Rechteck einbeschrieben, dessen eine Seite auf der Geraden $y = 8$ liegt.
Wie sind die Maße des Rechtecks zu wählen, damit sein Flächeninhalt maximal wird?

Aufgabe B5: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch die Gleichung
$y = f_a(x) = a \cdot \ln(a + x), \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$. G_a sei der zu f_a gehörige Graph.

5.1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f_a und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen.

5.2 Skizzieren Sie die Graphen G_1, G_2 und G_3 in ein und dasselbe Koordinatensystem.

5.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an G_a im Schnittpunkt von G_a mit der x-Achse. Für $a > 1$ bilden die Koordinatenachsen und die Normale für jeden Wert von a ein Dreieck.
Für welche Werte von a beträgt der Flächeninhalt dieses Dreiecks 1,125 Flächeneinheiten?

5.4 Die x-Achse, G_1 und die Gerade mit der Gleichung $x = -0{,}5$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den prozentualen Fehler, der auftritt, wenn man zur Berechnung dieser Fläche den Graphen G_1 durch den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $y = g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ ersetzt.
Hinweis: $\int \ln z \, dz = z \cdot \ln z - z + c$

Aufgabe B6: Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $P(0|7)$, die Gerade g_1 mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 7$ sowie der Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt $M_1(7|6)$ und dem Radius $r_1 = 5$ gegeben.

6.1 Zeichnen Sie den Kreis k_1 und die Gerade g_1 in ein kartesisches Koordinatensystem. Geben Sie einen Gleichung für den Kreis k_1 an.

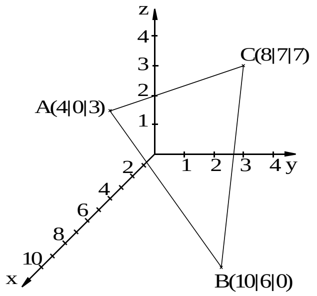
6.2 Durch den Punkt P verlaufen genau zwei Tangenten an den Kreis k_1.
Weisen Sie nach, dass die Gerade g_1 eine dieser beiden Tangenten ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes der zweiten Tangente g_2 mit dem Kreis und geben Sie eine Gleichung für diese Tangente an.
Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Tangenten g_1 und g_2.

6.3 Es gibt genau einen Kreis k_2 mit dem Radius 5, der den gegebenen Kreis k_1 im Punkt $R(3|3)$ berührt.
Geben Sie die Gleichung des Kreises k_2 an.

6.4 Die Winkelhalbierende des 1. Quadranten teilt die Fläche des Kreises k_1 in zwei Teilflächen.
Berechnen Sie den Inhalt einer dieser beiden Teilflächen.

Erwartungsbild zu Aufgabe P1: Geometrie

1.1 Dreieck ABC im kartesischen Koordinatensystem:



– Ermitteln von ∢ ABC:

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9$;

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 1 + 49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\cos \sphericalangle (\overrightarrow{BA} \,|\, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{12 - 6 + 21}{9 \cdot 3\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}40825$

$\Rightarrow \sphericalangle (\overrightarrow{BA} \,|\, \overrightarrow{BC}) = \sphericalangle\, ABC = 65{,}9\,°$

oder: Ermitteln von ∢ BAC:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9$;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9$

$\cos \sphericalangle (\overrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{24 + 42 - 12}{81} = \dfrac{54}{81} = \dfrac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

$\Rightarrow \sphericalangle (\overrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{AC}) = \sphericalangle\, BAC = 48{,}2°$

oder: Ermitteln von $\sphericalangle$ ACB:

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9$;

$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4 + 1 + 49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\cos \sphericalangle (\overrightarrow{CA} \mid \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{-8 + 7 + 28}{9 \cdot 3 \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}40825$

$\Rightarrow \sphericalangle (\overrightarrow{CA} \mid \overrightarrow{CB}) = \sphericalangle\, ACB = 65{,}9°$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

Es gilt $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 6 & -3 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = (24 + 21)\vec{i} - (24 + 12)\vec{j} + (42 - 24)\vec{k} = \begin{pmatrix} 45 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{45^2 + (-36)^2 + 18^2} \approx 60{,}37$

Daraus folgt: $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 60{,}37$ FE $\approx 30{,}2$ FE

Lösungsvariante 1:

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Mit $\overrightarrow{AB}^2 = 36 + 36 + 9 = 81$; $\overrightarrow{AC}^2 = 16 + 49 + 16 = 81$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + 42 - 12 = 54$; $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 = 2\,916$

erhält man $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{81 \cdot 81 - 2916}$ FE $\approx 30{,}2$ FE.

Lösungsvariante 2:

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sin \sphericalangle (\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC})$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\ 9 \cdot 9 \cdot \sin 48{,}2° \approx 30{,}2$ FE

1.2 Nachweis:

Beh.: $Q \in \overline{AB}$, wobei

Strecke $\overline{AB}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}, 0 \le t \le 1.$

$Q(8|4|1)$

Nach Einsetzen des Koordinaten des Punktes Q in die Gleichung der Strecke $\overline{AB}$

(I) $8 = 4 + 6t$
(II) $4 = -6t$
(III) $1 = 3 - 3t$

folgt aus Gleichung (I), (II), (III): $t = \frac{2}{3}$

Die Bedingung $0 \le t \le 1$ ist erfüllt. $\Rightarrow$ $Q \in \overline{AB}$

1.3 Zu zeigen ist: $g_{RT} \not\subset \varepsilon$

Es genügt nachzuweisen: $R \notin \varepsilon$;

ε: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $R(0|2|9{,}5)$ ergibt sich:

(I) $0 = 4 + 6r + 4s$
(II) $2 = 6r + 7s$
(III) $9{,}5 = 3 - 3r + 4s$

(II) – (I): $2 = -4 + 3s \quad \Rightarrow s = 2$

Aus (I) folgt dann $r = -2$.

Die Werte r und s in (III) eingesetzt: führen zu dem Widerspruch

$9{,}5 = 21 \quad \Rightarrow R \notin \varepsilon$, also $g_{RT} \notin \varepsilon$

Lösungsvariante:

Würde g in ε liegen, so wäre das Spatprodukt aus $\overrightarrow{RT}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gleich 0:

$\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$V = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3{,}5 \\ 6 & 6 & -3 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 90 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g_{RT} \not\subset \varepsilon.$

Berechnen der Schnittpunktkoordinaten S der Geraden g und s_c:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OR} + t\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9,5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3,5 \end{pmatrix};\quad t \in \mathbb{R}$$

$$s_c\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OM} + r\overrightarrow{MC};\quad r \in \mathbb{R};$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

Zuerst wird untersucht, ob ein Schnittpunkt S existiert:

(I) $0 + 5t = 7 + r$
(II) $2 + 2t = 3 + 4r$
(III) $9{,}5 - 3{,}5t = 1{,}5 + 5{,}5r$

(II) – 4 · (I): $2 - 18t = -25 \quad \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

Aus (I) folgt $5 \cdot \frac{3}{2} = 7 + r \quad \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

Die Probe mit (III) führt zu einer wahren Aussage.

⇒ Die Geraden g und s_c schneiden einander in S.

Koordinaten von S

Aus g: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9,5 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 5 \\ 4,25 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow S(7{,}5|5|4{,}25)$

Aus s_c: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 5 \\ 4,25 \end{pmatrix}$

Bewertungsvorschlag:

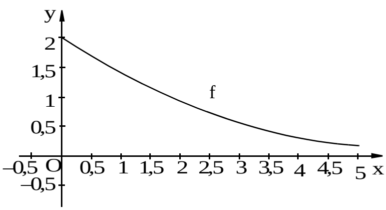
1.1	Zeichnung des Dreiecks; Innenwinkelgröße; Flächeninhalt des Dreiecks	4 BE
1.2	Beweis	3 BE
1.3	Geradengleichung; Gleichungssystem; Widerspruch	8 BE
		15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P2: Analysis

2.1 Graph der Funktion:

$y = f(x) = 2 \cdot e^{-0,35x}; \quad x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 5$

x	0	0,5	1	2	3	4	5
f(x)	2	1,68	1,41	0,99	0,7	0,49	0,35



2.2 Gleichung der Tangente t im Punkt P(3|f(3)):

t: y = mx + n

$f'(x) = 2 \cdot (-0{,}35) \cdot e^{-0,35x} = -0{,}7 \cdot e^{-0,35x} \Rightarrow f'(3) = -0{,}7 \cdot e^{-1,05}$, also $m = -0{,}7 \cdot e^{-1,05}$

Berechnung für n:

$f(3) = 2 \cdot e^{-0,35 \cdot 3} = 2 \cdot e^{-1,05} = -0{,}7 \cdot e^{-1,05} \cdot 3 + n \Rightarrow n = 4{,}1 \cdot e^{-1,05}$

Gleichung für t:

$y = -0{,}7 \cdot e^{-1,05} x + 4{,}1 \cdot e^{-1,05}$ oder $y = -0{,}245x + 1{,}435$

Flächeninhalt:

Inhalt der Fläche ergibt sich aus

$$\int_0^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^3 [2 \cdot e^{-0,35x} - (-0{,}7 \cdot e^{-1,05} \cdot x + 4{,}1 \cdot e^{-1,05})]\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{-0{,}35} \cdot e^{-0,35x} + \frac{0{,}7 \cdot e^{-1,05}}{2} \cdot x^2 - 4{,}1 \cdot e^{-1,05} x\right]_0^3$$

$$\approx -1{,}199964 + 1{,}10230391 - 4{,}3042343 - (-5{,}714285)$$

$$\approx 0{,}516496$$

Flächeninhalt: A ≈ 0,52 FE

2.3 Gegeben sind die Folgen
(a_n) mit $a_1 = 2$ und $q = 0{,}7$, d. h. $a_n = 2 \cdot 0{,}7^{n-1}$
(b_n) mit $b_n = k\,e^{cn}$; $c, k \in \mathbb{R}$

2.3.1 Bestimmen von k und c:

n	1	2
a_n	2	1,4
b_n	$k \cdot e^c$	$k \cdot e^{2c}$

Für $a_1 = b_1$ gilt: $2 = k\,e^c \Rightarrow k = \frac{2}{e^c}$
Für $a_2 = b_2$ gilt: $1{,}4 = k\,e^{2c} \Rightarrow k = \frac{1,4}{e^{2c}}$
Daraus folgt: $\frac{2}{e^c} = \frac{1,4}{e^{2c}}$, also $2\,e^{2c} = 1{,}4\,e^c$ bzw. $e^c = 0{,}7$

$\Rightarrow c = \ln 0{,}7 \; (\approx -0{,}357)$

$k = \frac{2}{e^{\ln 0,7}} = \frac{2}{0,7} = \frac{20}{7} \; (\approx 2{,}857)$

Zu zeigen ist: $a_n = b_n$ für alle n, $n \in \mathbb{N}$
$a_n = 2 \cdot 0{,}7^{n-1}$; $b_n = k \cdot e^{c \cdot n}$, wobei $c = 0{,}7$ und $k = \frac{20}{7}$
$b_n = \frac{20}{7} \cdot e^{\ln 0,7 \cdot n} = \frac{2}{0,7} \cdot 0{,}7^n = 2 \cdot 0{,}7^{n-1} = a_n$

2.3.2 Anzahl der Glieder der Folge (a_n) mit $a_n > 0{,}00014$
$a_n = 2 \cdot 0{,}7^{n-1} > 0{,}00014$ bzw. $0{,}7^{n-1} > 0{,}00007$
$\Rightarrow (n-1) \cdot \ln 0{,}7 > \ln 0{,}00007$, also $n - 1 < \frac{-9,567}{-0,357}$.
$\Rightarrow n - 1 < 26{,}82$ und damit $n < 27{,}82$
Für 27 Glieder der Zahlenfolge (a_n) gilt: $a_n > 0{,}00014$.

Bewertungsvorschlag:

2.1	Funktionswerte; Graph	3 BE
2.2	Tangentengleichung; Flächeninhalt	7 BE
2.3.1	Bestimmen von k und c; Nachweis für $a_n = b_n$	5 BE
2.3.2	Anzahl der Glieder von (a_n)	3 BE
		18 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe P3: Stochastik

3.1 X: Anzahl der Schüler (unter 30), die eigenen Internetzugang haben

X ist $B(30|0{,}12)$ - verteilt, d. h. $P(X = k) = \binom{30}{k} \cdot (0{,}12)^k (1 - 0{,}12)^{30-k}$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{30}{0} \cdot (0{,}88)^{30} + \binom{30}{1} \cdot 0{,}12 \cdot (0{,}88)^{29} + \binom{30}{2} \cdot (0{,}12)^2 \cdot (0{,}88)^{28}$$

$$\approx 0{,}285$$

Die Wahrscheinlichkeit ist 0,285 (28,5 %).

3.2 X: Anzahl der Schüler (von 50), die mit Computer Hausaufgaben machen

X ist $B(50|p)$ - verteilt

3.2.1 Gegeben ist H_o – Hypothese mit $p \geq 0{,}5$

Gesucht ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α

$$P(X \leq 21) = \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{21} P(X = k) = \sum_{k=0}^{21} \binom{50}{k} p^k (1 - p)^{50-k}$$

Falls H_o wahr, gilt $p = 0{,}5$ im Extremfall.

$\Rightarrow P(X \leq 21) = 0{,}1611$ (s. Tabelle mit $p = 0{,}5$, $n = 50$, $k = 21$)

$\Rightarrow \alpha = 0{,}1611$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man die Behauptung fälschlicherweise ablehnt, ist 0,1611 (16,11 %).

3.2.2 Es müssen gelten:

$P(X \leq g) \leq 0{,}05 \Rightarrow g = 18$

Wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit 5 % betragen soll, ist der Ablehnungsbereich (0, 1, 2, ... , 18).

Abgeändertes Kriterium:

Bei einem Test soll die Behauptung abgelehnt werden, falls von 50 befragten Schülern nur höchstens 18 den Computer zur Lösung von Hausaufgaben einsetzen.

Bewertungsvorschlag:

3.1	Anzahl der Schüler; Wahrscheinlichkeit	3 BE
3.2.1	Irrtumswahrscheinlichkeit α	2 BE
3.2.2	Abgeändertes Kriterium	3 BE
		8 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis, Geometrie

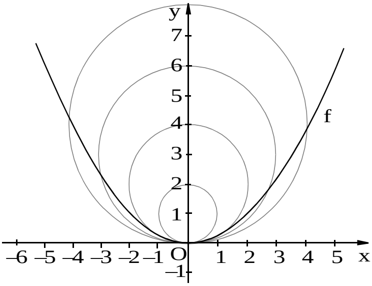
4.1 Mittelpunkte und Radien:

k_a: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, also $x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2$

Die Kreise k_a haben die Mittelpunkte $M(0|a)$ und Radien $r = a$

Zeichnung:



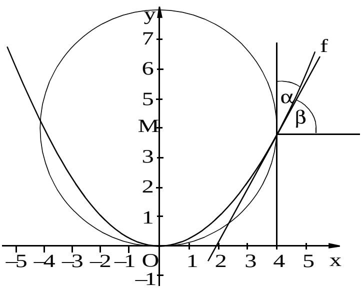
4.2 Kreis k_a ist zu ermitteln, für den gilt: $k_a \cap p = \{(4|4)\}$

Aus der Zeichnung lässt sich vermuten: $k_4 \cap p = \{(4|4)\}$, also $a = 4$

Rechnerische Überprüfung:

Aus $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ folgt mit $S(4|4)$:
$16 + 16 - 8a + a^2 = a^2$, also $a = 4$

Schnittwinkel zwischen Kreis k_4 und p in $S(4|4)$:



p: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

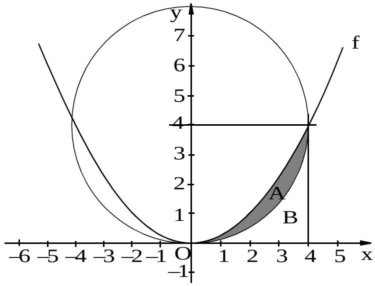
$f'(x) = \frac{1}{2}x$; $f'(4) = 2$

$\tan ß = 2 \Rightarrow ß = 63{,}43°$

Somit ergibt sich der Schnittwinkel zwischen k_4 und p durch
$\alpha = 90° - 63{,}44° = 26{,}56°$

4.3 Flächeninhalt:

Der Inhalt der Fläche unterhalb der Parabel ergibt sich aus



$$A_p = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \tfrac{1}{4}x^2\,dx = [\tfrac{1}{12}x^3]_0^4$$
$$= \tfrac{64}{12} = 5{,}\overline{3}\ (\text{FE})$$

$A = A_p - B$

$A \approx (5{,}\overline{3} - 3{,}43)$ FE

$A \approx 1{,}90\overline{3}$ FE

$B = A_{Quadrat} - A_{Viertelkreis}$

$B = (16 - 4\pi)$ FE $\approx 3{,}43$ FE

– Volumen V des Rotationskörpers

$V = V_{Halbkugel} - V_{Paraboloid}$

$V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{128}{3}\pi$

Berechnung des Paraboloids:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2\,dy;\ \text{mit } y = f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 \text{ also } x^2 = 4y, \text{ gilt damit:}$$

$$V_y = \pi \int_0^4 4y\,dy = \pi\,[2y^2]_0^4 = 32\pi\ (\text{VE})$$

Damit ergibt sich für das Volumen des Rotationskörpers:

$V = (\frac{128}{3}\pi - 32\pi)$ VE $= \frac{32}{3}\pi$ VE

4.4 Wert für a (a ∈ ℝ, a > 0 siehe Voraussetzung)

Gemeinsame Punkte von

k_a: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ und p: $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$

Einsetzen ergibt: $x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 = 0$, also $16x^2 + x^4 - 8ax^2 = 0$

$\Rightarrow x^4 + (16 - 8a) = x^2(x^2 + 16 - 8a) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ oder $x^2 + 16 - 8a = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{8a - 16}$ d. h.

Für $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq 2$ (also $8a - 16 \leq 0$) gibt es genau einen gemeinsamen Punkt; $r_k = 2$. (Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 2$ gibt es genau drei gemeinsame Punkte.)

Zu zeigen ist: $r_k \cdot f''(0) = 1$ mit $r_k = 2$

$f(x) = \frac{1}{4}x^2$; $f'(x) = \frac{1}{2}x$; $f''(x) = \frac{1}{2}$; $f''(0) = \frac{1}{2}$

Damit ist $r_k \cdot f''(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. w. z. b. w.

Bewertungsvorschlag:

4.1	Mittelpunkte der Radien; Zeichnung	4BE
4.2	Kreis k_a; Schnittwinkel	4BE
4.3	Flächeninhalt; Volumen des Rotationskörpers	6BE
4.4	Gemeinsame Punkte von k_a und p	5BE
		19BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A5: Analysis

5.1 Untersuchung auf Monotonie:

$fa'(x) = -a\,x\,e^{-0,5ax^2}$; $a > 0$

– Für $x < 0$ ist $f_a'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f_a(x)$ ist monoton wachsend.
– Für $x = 0$ ist $f_a'(x) = 0$
– Für $x > 0$ ist $f_a'(x) < 0$ $\Rightarrow$ $f_a(x)$ ist monoton fallend.

$g_b'(x) = -b \cdot e^{-bx + 0,5} < 0$ (für $b > 0$)

$g_a(x)$ ist monoton fallend für alle $x \in \mathbb{R}$.

Untersuchung auf Symmetrie:

$f_a(x) = e^{-0,5ax^2} = e^{-0,5a(-x)^2} = f_a(-x)$

F_a ist axialsymmetrisch bezüglich der y-Achse.

$$\left.\begin{array}{l} g_b(x) = e^{-bx + 0,5} \\ g_b(-x) = e^{bx + 0,5} \end{array}\right\} \quad g_b(x) \neq g_b(-x), \text{ d. h. } G_b \text{ ist nicht symmetrisch.}$$

Wendestellen von f_a:

$f_a''(x) = -a \cdot e^{-0,5ax^2} + (-ax \cdot (-ax \cdot e^{-0,5ax^2})) = e^{-0,5ax^2}\,(a^2x^2 - a)$

$f_a''(x_w) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-0,5ax_w^2}\,(a^2x_w^2 - a) = 0$

Da $e^{-0,5ax_w^2} \neq 0$, folgt $a^2x_w{}^2 - a = 0$ und wegen a > 0:

$ax_w{}^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{w_1} = \sqrt{\frac{1}{a}}\,;\; x_{w_2} = -\sqrt{\frac{1}{a}}$

$f_a'''(x) = -ax \cdot e^{-0,5ax^2}(a^2x^2 - a) + e^{-0,5ax^2} \cdot 2a^2x = e^{-0,5ax^2}(2a^2x - a^3x^3 + a^2x)$

$f_a'''(\sqrt{\frac{1}{a}}) = e^{-0,5}(2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} - a^3 \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}} + a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}) = e^{-0,5} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot 2a^2 \neq 0$

$f_a'''(-\sqrt{\frac{1}{a}}) = e^{-0,5}(-2a^2\sqrt{\frac{1}{a}} + a^3 \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}} - a^2\sqrt{\frac{1}{a}}) = e^{-0,5} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot (-2a^2) \neq 0$

Damit sind $x_{w_1} = \sqrt{\frac{1}{a}}\,;\; x_{w_2} = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ Wendestellen der Funktionen $f_a(x)$.

Wendepunkte (in der Aufgabe nicht gefragt):

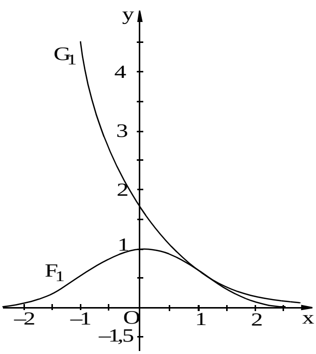
$f_a(\sqrt{\frac{1}{a}}) = e^{-0,5}$, also $P_{w_1}(\sqrt{\frac{1}{a}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}})$

$f_a(-\sqrt{\frac{1}{a}}) = e^{-0,5}$, also $P_{w_2}(-\sqrt{\frac{1}{a}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}})$

Skizze der Graphen F_1 und G_1:

x	– 2	– 1	0	1	2
$f_1(x) = e^{-0,5x^2}$	0,135	0,61	1	0,61	0,135

x	– 2	– 1	0	1	3
$g_1(x) = e^{-x+0,5}$	12,18	4,48	1,65	0,61	0,08



5.2 Gemeinsame Punkte der Graphen F_1 und G_1:

$e^{-0,5x^2} = e^{-x+0,5}$, also $-0,5x^2 = -x + 0,5$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ mit $x_{1,2} = 1$; $f(1) = e^{-0,5}$, also $P(1|\frac{1}{\sqrt{e}})$.

Vergleich der Anstiege in $P(1|\frac{1}{\sqrt{e}})$:

$f_1'(x) = -x\, e^{-0,5x^2}$; $f_1'(1) = -e^{-0,5} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

$g_1'(x) = -e^{-x+0,5}$; $g_1'(1) = -e^{-0,5} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

$f_1'(1) = g_1'(1)$: In P besitzen beide Graphen den gleichen Anstieg.

5.3 Flächeninhalt $A(z)$:

Inhalt der Fläche:

$$A(z) = \int_0^z (e^{-x+0,5})\, dx = [-e^{-x+0,5}]_0^z = -e^{-z+0,5} + e^{0,5} = \sqrt{e}\,(1 - \tfrac{1}{e^z}) \text{ (FE)}$$

Grenzwert $\lim\limits_{z \to \infty} A(z)$:

$$\lim_{z \to \infty} A(z) = \lim_{z \to \infty} \sqrt{e}\,(1 - \tfrac{1}{e^z}) = \sqrt{e} \text{ (FE)}$$

5.4 Flächeninhalt unter F_1:

$f_1(x) = e^{-0,5x^2}$

(1) Annäherung durch h mit $h(x) = 0,125x^4 - 0,5x^2 + 1$

$$\int_0^{0,5} (0,125x^4 - 0,5x^2 + 1)\, dx = [0,025x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + x]_0^{0,5}$$

$= 0,00078125 - 0,028\overline{3} + 0,5 = 0,479947916$

$A_1 = 0,47995$ (FE)

(2) Annäherung durch die Summe der Rechteckflächen:

$A_2 = 0,1(f_1(0,1) + f_1(0,2) + f_1(0,3) + f_1(0,4) + f_1(0,5))$

$= 0,1(0,9950 + 0,9802 + 0,9560 + 0,9231 + 0,8825) = 0,47368$ (FE)

$A_2 = 0,47368$ (FE)

– Vergleich der Ergebnisse (1) und (2) mit dem angegebenen Flächeninhalt

zu (1) geg. Flächeninhalt $A = 0,4799$ FE

$A_1 = 0,47995$ FE

$\Rightarrow A_1$ ist um 0,00005 FE größer als A.

zu (2) geg. Flächeninhalt $A = 0{,}4799$ FE
$A_2 = 0{,}47368$
$\Rightarrow A_2$ ist um 0,00622 FE kleiner als A

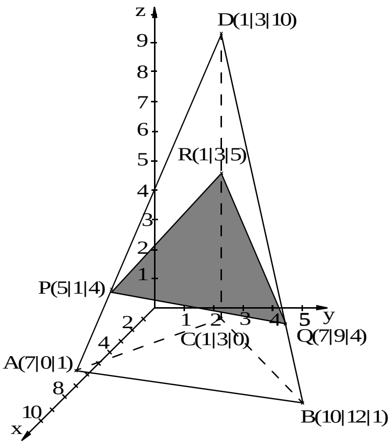
$\Rightarrow$ Annäherung durch A_1 ist besser.

Bewertungsvorschlag:

5.1	Monotonie; Symmetrie; Wendestellen; Graph	8 BE
5.2	Gemeinsame Punkte; Vergleichen der Anstiege	3 BE
5.3	Flächeninhalt	4 BE
5.4	Flächeninhalt unter F_1 (1) und (2); Vergleich	4 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A6: Geometrie

6.1 Darstellung der Pyramide



6.2 a) Behaupt.: $\overline{AP} : \overline{PD} = 1 : 2$, d. h. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Nachweis: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

oder:

Behaupt.: $\overline{AP} : \overline{PD} = 1 : 2$, d. h. $\overrightarrow{PD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Nachweis: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

b) Behaupt.: $\overline{BQ} : \overline{QD} = 1 : 2$, d. h. $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ oder $\overrightarrow{QD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

Nachweis: $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

oder:

Behaupt.: $\overline{BQ} : \overline{QD} = 1 : 2$, d. h. $\overrightarrow{QD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

Nachweis: $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

Lösungsvariante:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};\ |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{14} \\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix};\ |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{126} \end{array}\right\} |\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{14} : \sqrt{126} = 1 : 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix};\ |\overrightarrow{BQ}| = 3\sqrt{3} \\ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ |\overrightarrow{BD}| = 9\sqrt{3} \end{array}\right\} |\overrightarrow{BQ}| : |\overrightarrow{BD}| = 1 : 3$$

– Begründung, dass $g_{AB} \parallel g_{PQ}$

$g_{AB} \parallel g_{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{PQ}$, also $\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{PQ}$

Nachweis: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PQ}$

(Begründung ist auch durch die Strahlensätze möglich.)

6.3 Koordinatengleichung der Ebene ε

ε: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + p\,\overrightarrow{PQ} + r\,\overrightarrow{PR}$; $p, r \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}2\\8\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Koordinatengleichung: Eingesetzt in $(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) = 0$ ergibt sich:

$$\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix}2\\8\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix}2\\8\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 8 & 0\\ -4 & 2 & 1\end{vmatrix} = (8-0)\vec{i} - (2-0)\vec{j} + (4+32)\vec{k} = \begin{pmatrix}8\\-2\\36\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}4\\-1\\18\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-5\\y-1\\z-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\\18\end{pmatrix} = 4x - 20 - y + 1 + 18z - 72$$

ε: $4x - y + 18z - 91 = 0$

Lösungsvariante:

Aus (*) folgt:

(I)	$x = 5 + 2p - 4r$		
(II)	$y = 1 + 8p + 2r$		
(III)	$z = 4 + r$		$\Rightarrow r = z - 4$

$x = 5 + 2p - 4(z-4) = 21 + 2p - 4z$
$y = 1 + 8p + 2(z-4) = -7 + 8p + 2z$

$$\begin{aligned} -4x &= -84 - 8p + 16z\\ y &= -7 + 8p + 2z\\ \hline -4x + y &= -91 + 18z \Rightarrow \qquad \varepsilon:\ 4x - y + 18z - 91 = 0 \end{aligned}$$

Flächeninhalt des Dreiecks PQR:

Es gilt

$$A_{PQR} = \tfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \tfrac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}8\\-2\\36\end{pmatrix}\right| \quad \text{(s. 6.3)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{64 + 4 + 1296} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1364} \approx \tfrac{1}{2}\,36{,}93; \qquad A_{PQR} = 18{,}47 \text{ (FE)}$$

6.4 Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper:

V_1: Volumen der Pyramide PQRD mit $D(1|3|10)$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix}$

Allgemein $V_1 = \frac{1}{3} A_{PQR} \cdot h_1$

$$h_1 = \left| \frac{4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 18 \cdot 10 - 91}{\sqrt{16 + 1 + 324}} \right| = \frac{90}{\sqrt{341}} \text{ ; } A_{PQR} = \frac{1}{2} \sqrt{1364} \text{ FE}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1364} \cdot \frac{90}{\sqrt{341}} = \frac{90}{6} \cdot \sqrt{\frac{1364}{341}} = 30;\ V_1 = 30 \text{ VE}$$

V: Volumen der Pyramide ABCD mit $D(1|3|10)$

$$\varepsilon_{ABCD}: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} + r\,\overrightarrow{AC}, \quad t, r \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 12 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 3\vec{j} + 81\vec{k} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 81 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - 7 \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 27 \end{pmatrix} = -4x + 28 + y + 27z - 27$$

$$\varepsilon_{ABCD}: 4x - y - 27z - 1 = 0$$

$$V = \frac{1}{3} A_{ABC} \cdot h_2$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 9 + 6561} = \frac{1}{2} \sqrt{6714}$$

$$h = \left| \frac{-4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 27 \cdot 10 + 1}{\sqrt{16 + 1 + 729}} \right| = \frac{270}{\sqrt{746}}$$

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{6714} \cdot \frac{270}{\sqrt{746}} = \frac{135}{3} \cdot \sqrt{\frac{6714}{746}} = 135$$

$V = 135$ VE

$V_2 = V - V_1 = 105$ VE

Verhältnis zwischen V_1 und V_2:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{30}{105} = \frac{2}{7}$$

Lösungsvariante:

Anwendung des Spatprodukts (nicht im Rahmenplan)

$V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC})| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 6 & -3 & -9 \\ 9 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = 135$

$V_1 = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{DR})| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 4 & -2 & -6 \\ 6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix} \right\| = 30$

$V_2 = V - V_1 = 105$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{30}{105} = \frac{2}{7}$

Bewertungsvorschlag:

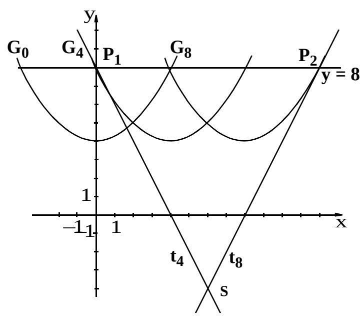
6.1	Pyramide im räumlichen Koordinatensystem	2 BE
6.2	Verhältnisse $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AD}$ bzw. $\overrightarrow{PD} : \overrightarrow{AD}$; Nachweis der Parallelität	6 BE
6.3	Koordinatengleichung der Ebene ε; Flächeninhalt	5 BE
6.4	Verhältnis der Volumina der Teilkörper	6 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Analysis

4.1. Wertebereich von f_k

$y \in \mathbb{R},\ y \geq 4$

Zeichnung:



4.2. Flächeninhalt des Dreiecks P_1P_2S

S: Schnittpunkt der Tangenten in $P_1(0\,|\,8)$ und $P_2(12\,|\,8)$

Tangentengleichung t_4:

$f_4(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 4 = \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) + 4 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 8$

$f_4'(x) = \frac{1}{2}x - 2;\quad f_4'(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad m = -2$

Aus $y = mx + n$ mit $P_1(0\,|\,8)$ folgt $8 = -2 \cdot 0 + n$, also $n = 8$

t_4: $y = -2x + 8$

Tangentengleichung t_8:

$f_8(x) = \frac{1}{4}(x-8)^2 + 4 = \frac{1}{4}(x^2 - 16x + 64) + 4 = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 20$

$f_8'(x) = \frac{1}{2}x - 4$; $f_8'(12) = 2 \Rightarrow m = 2$

Aus $y = mx + n$ mit $P_2(12\,|\,8)$ folgt $8 = 2 \cdot 12 + n$, also $n = -16$

t_8: $y = 2x - 16$

Koordinaten des Schnittpunktes:

$2x - 16 = -2x + 8 \Rightarrow 4x = 24$, also $x = 6$; $y = -4$

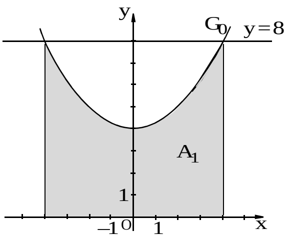
$S(6\,|\,-4)$

Da P_1 und P_2 auf $g = 8$ liegen, gilt für die Höhe h des Dreiecks P_1SP_2:

$h = |-4| + 8 = 12.$

Da $\left|\overline{P_1P_2}\right| = 12$, folgt: $A_{\triangle P_1SP_2} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12$ (FE) $= 72$ FE

4.3. Flächeninhalt:



$A = A_{\square} - A_1$

$f_0(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4$

$$2\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 4\right) dx = 2\left[\frac{1}{12}x^3 + 4x\right]_0^4$$

$$= 2\left(\frac{16}{3} + 16\right) = \frac{128}{3}$$

$A_1 = \frac{128}{3}$ FE – Inhalt der Fläche unter G_0

$A_{\square} = 64$ FE

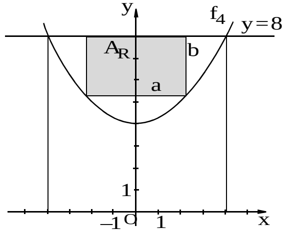
$A = \left(64 - \frac{128}{3}\right)$ FE $= \frac{64}{3}$ FE

$A = 21,\bar{3}$ FE

4.4. Maße des Rechtecks

Zielfunktion: $A_R = a \cdot b$

Nebenbedingungen u. Zielfunktion in Abhängigkeit von a:



$f_0(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4$

Da G_0 symmetrisch zur y-Achse liegt und eine Rechteckseite auf y = 8 (also parallel zur x-Achse), muss ein Rechteckseitenpaar parallel zur y-Achse liegen. Dann gilt:

$A_R(a) = a \cdot (8 - f_0(\frac{a}{2})) = a\,(8 - [\frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{4} + 4]) = a\,(4 - \frac{a^2}{16}) = 4a - \frac{a^3}{16}$

Untersuchung auf das lokale Maximum:

$A_R'(a) = 4 - \frac{3a^2}{16}$

$A_R'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - \frac{3a^2}{16} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

Nachweis:

$A_R''(a) = -\frac{3}{8}a; \quad A_R''(\frac{8}{3}\sqrt{3}) = -\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{3} = -\sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow \quad a = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ ist lokale Maximumstelle

$b = 8 - \frac{1}{16} \cdot \frac{64}{3} - 4 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Für $a = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ LE und $b = \frac{8}{3}$ LE ist der Inhalt der einbeschriebenen Rechtecksfläche maximal.

Bewertungsvorschlag:

4.1	Wertebereich; Zeichnung	3 BE
4.2	Flächeninhalt des Dreiecks	7 BE
4.3	Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve	3 BE
4.4	Maße des Rechtecks	6 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B5: Analysis

5.1. Definitionsbereich von f_a

$x \in \mathbb{R}$ mit $a + x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -a \quad , \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$

Schnittpunkte zwischen G_a und den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$0 = a \cdot \ln(a + x) \Rightarrow$ (wegen $a \neq 0$) $\ln(a + x) = 0$, also $a + x = 1$ bzw.

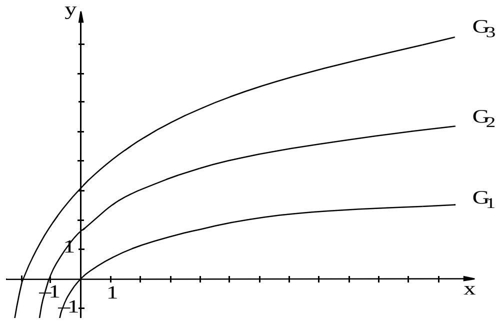
$x = a - 1; \qquad P_x(1 - a \mid 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f_a(0) = a \cdot \ln a; \qquad P_y(0 \mid a \cdot \ln a)$

5.2. Graphen G_1, G_2 und G_3

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	1	2	3	4	5
$f_1(x) = 1 \cdot \ln(1 + x)$	–	–	–	–	–0,69	0	0,69	1,09	1,37	1,61	1,79
$f_2(x) = 2 \cdot \ln(2 + x)$	–	–	–1,39	0	0,81	1,39	2,19	2,77	3,22	3,58	3,89
$f_3(x) = 3 \cdot \ln(3 + x)$	–2,07	0	1,22	2,08	2,75	3,29	4,16	4,83	5,37	5,84	6,24



5.3. Gleichung der Normalen n in $P_x(1 - a \mid 0)$:

$y = f_a(x) = a \ln(a + x)$; $\quad f_a'(x) = a \cdot \dfrac{1}{a + x}$; $\quad f_a'(1 - a) = a \cdot \dfrac{1}{a + 1 - a} = a$

Der Anstieg der Tangente in P_x ist $m_t = a$.

$\Rightarrow$ Anstieg der Normalen in P_x: $\quad m_n = -\dfrac{1}{a}$

Wegen $y = mx + b$ gilt für die Normale in $P_x(1 - a \mid 0)$ mit $m_n = -\dfrac{1}{a}$:

$0 = -\dfrac{1}{a} \cdot (1 - a) + b \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{1}{a} - 1$ und damit n: $\quad y = -\dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{a} - 1$

Ermitteln des Wertes $a > 1$, für den gilt $A_\triangle = 1{,}125$ FE:

$A_\triangle = \dfrac{1}{2}\left|\overline{P_xO}\right| \cdot \left|\overline{P_yO}\right|$

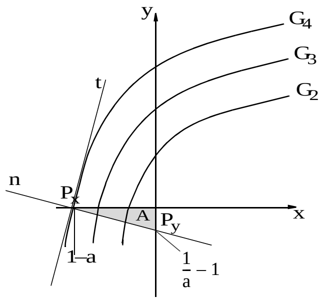
$\left|\overline{P_xO}\right| = |1 - a| = a - 1 \quad$ (da $a > 1$)

$\left|\overline{P_yO}\right| = \left|\dfrac{1}{a} - 1\right| = 1 - \dfrac{1}{a} \quad$ (da $a > 1$)

$A_\triangle = \dfrac{9}{8} = \dfrac{1}{2}(a - 1)\left(\dfrac{a - 1}{a}\right)$

$\quad = \dfrac{1}{2a}(a^2 - 2a + 1)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{9}{4}a = a^2 - 2a + 1$, also $a^2 - \dfrac{17}{4}a + 1 = 0$



$\Rightarrow \quad a_{1|2} = \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - \frac{64}{64}}$;

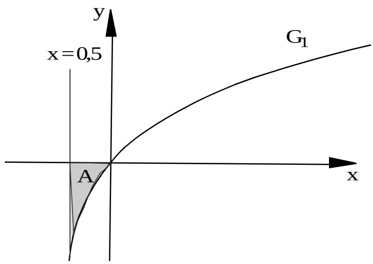
$a_1 = 4 \quad (a_2 = \frac{1}{4}$ entfällt, da a > 1; s. Vor.)

Probe: $A_\triangle = 1{,}125$ FE

$A_\triangle = \frac{1}{2}(4-1)\left(\frac{4-1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

Für a = 4 gilt $A_\triangle = 1{,}125$ FE.

5.4. Ermitteln des prozentualen Fehlers:



Flächeninhalt durch

$y = g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$:

$$\left|\int_{-0,5}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-0,5}^{0}\right|$$

$$= \left|0 - \left(\frac{1}{12}(-0{,}5)^4 - \frac{1}{6}(-0{,}5)^3 + \frac{1}{2}(-0{,}5)^2\right)\right| = \frac{1{,}8125}{12} \approx 0{,}151041666$$

$A_N \approx 0{,}1510$ FE

Flächeninhalt durch $y = f_1(x) = \ln(1 + x)$

$$\left|\int_{-0,5}^{0} \ln(1+x)\,dx\right| = \left|\left[(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\right]_{-0,5}^{0}\right|$$

$$= |-1 - (0{,}5\ \ln 0{,}5 - 0{,}5)| \approx 0{,}1534$$

$A \approx 0{,}1534$ FE

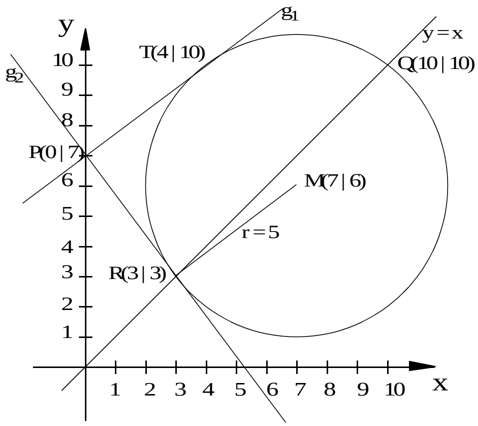
Der Inhalt der Fläche A wird um 0,0024 FE kleiner ermittelt, wenn man G_1 durch den Graphen von g ersetzt. Das entspricht rd. 1,56 % Abweichung von dem exakten Wert: ($\frac{|A - A_N|}{A} \approx 0{,}0156$)

Bewertungsvorschlag:

5.1	Definitionsbereich von f_a; Schnittpunktskoordinaten mit den Achsen	3 BE
5.2	Zeichnung der Graphen	3 BE
5.3	Gleichung der Normalen im Schnittpunkt; Werte von a	7 BE
5.4	Prozentualer Fehler	6 BE
		19 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B6: Geometrie

6.1.



g_1: $y = \frac{3}{4}x + 7$; P(0 | 7)

k_1: M(7 | 6) ; r = 5 $\Rightarrow$ Gleichung für k_1: $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 25$

6.2. Beh.: a) $P \in g_1$

b) g_1 ist Tangente an k_1

zu a) g_1: $y = \frac{3}{4}x + 7$; P(0 | 7)

$7 = \frac{3}{4} \cdot 0 + 7$ (wahre Aussage) $\Rightarrow$ $P \in g_1$

zu b) Wenn g_1 Tangente an k_1 ist, so müssen g_1 und k_1 genau einen gemeinsamen Punkt haben:

g_1: $y = \frac{3}{4}x + 7$

k_1: $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 25$

$(x-7)^2 + (\frac{3}{4}x + 7 - 6)^2 = 25$

$x^2 - 14x + 49 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 25$

$\frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{2}x + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$

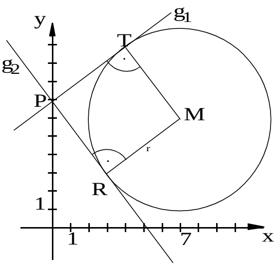
$x_{1|2} = 4 \pm \sqrt{16-16}$, also $x_{1|2} = 4$, y = 10

Damit ist gezeigt, dass k_1 und g_1 genau den Punkt $T_1(4 | 10)$ gemeinsam haben:

g_1 ist Tangente an k_1 und geht durch P.

Tangente g_2:

Viereck RPTM ist ein Quadrat,



denn $\quad |\overline{PT}| = \sqrt{(4-0)^2 + (10-7)^2} = 5$

d.h. $\quad |\overline{PT}| = |\overline{TM}| = |\overline{MR}|$.

$\quad |\overline{PT}| \perp |\overline{TM}| \quad ; \quad |\overline{PR}| \perp |\overline{RM}|$

Daraus folgt: $\quad \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{MR}$

Koordinaten des Berührungspunktes:

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{TP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R(3\,|\,3)$

Gleichung für die Tangente g_2:

g_2 enthält die Punkte $P(0\,|\,7)$ und $R(3\,|\,3)$,

damit gilt: $\quad 7 = m \cdot 0 + n \quad \Rightarrow \quad n = 7$

$$3 = m \cdot 3 + n$$

$$3 = m \cdot 3 + 7 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad g_2\text{:} \quad y = -\frac{4}{3}x + 7$$

Schnittwinkel der beiden Tangenten g_1 und g_2:

Da Viereck RPTM ein Quadrat ist, folgt $g_1 \perp g_2$.

Oder: $\quad g_1$: $\quad y = \frac{3}{4}x + 7 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{3}{4}$

$\quad g_2$: $\quad y = -\frac{4}{3}x + 7 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{4}{3}$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad g_1 \perp g_2$$

6.3. Gleichung für k_2

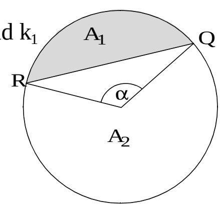
Mittelpunkt M_2 für den Kreis k_2 ergibt sich aus

$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_2(-1\,|\,0)$.

$k_2: \quad (x+1)^2 + y^2 = 25$

6.4. Flächeninhalt der Teilfläche A_1 (oder A_2):

Koordinaten der Schnittpunkte zwischen $y = x$ und k_1



(I) $y = x$

(II) $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 25$

(I) in (II): $(x-7)^2 + (x-6)^2 = 25$

$x^2 - 14x + 49 + x^2 - 12x + 36 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 26x + 60 = 0$

$x^2 - 13x + 30 = 0$, also $\quad x_{1|2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{120}{4}}$

$x_1 = 10;\ y_1 = 10$

$x_2 = 3;\ y_2 = 3$

Schnittpunkte: R(3 | 3), Q(10 | 10)

Winkel $\sphericalangle$RMQ ergibt sich mit $\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aus

$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{MR}/\overrightarrow{MQ}) = \frac{-12-12}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}} = \frac{-24}{25} = -0{,}96$

$\alpha = \sphericalangle RMQ = 163{,}74°$

$A_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180°} - \sin\alpha\right) \quad$ mit r = 5 und $\alpha = 163{,}74°$

$A_1 = \frac{25}{2}\left(\frac{\pi\cdot 163{,}74°}{180°} - 0{,}27999\right)$ FE ≈ 32,2 FE

$$\left(\begin{array}{c} A_2 = \pi r^2 - A_1 \\ A_2 = (78{,}5 - 32{,}2)\text{ FE} \approx 46{,}3\text{FE} \end{array}\right)$$

Bewertungsvorschlag:

6.1	Kreis und Gerade im Koordinatensystem; Kreisgleichung	2 BE
6.2	Koordinaten des Berührungspunktes; Gleichung der Tangente; Winkel	9 BE
6.3	Kreisgleichung	2 BE
6.4	Inhalt der Teilflächen	6 BE
		19 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1998 / 99

Gymnasium

Sachsen

Aufgaben

(Ersttermin und Nachtermin)

Aufgabe A1: Analysis

Gegeben sind Funktionen f_a durch $y = f_a(x) = -x \cdot \ln(ax^2)$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in D_{f_a})$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen f_a an.
Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a ungerade sind und bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte.
Weisen Sie die Art der Extrema nach.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Funktionen f_a liegen.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 11)

b) Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen f_a keine gemeinsamen Punkte besitzen.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Es gibt genau eine Gerade mit der Gleichung $y = c$ $(c \in \mathbb{R}, c > 0)$, die mit dem Graph der Funktion $f_{\frac{1}{10}}$ genau zwei Punkte S_1 und S_2 gemeinsam hat.
Ermitteln Sie die Länge der Strecke $\overline{S_1S_2}$.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Für jedes a $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ existiert eine Tangente t_a an den Graph der Funktion f_a im Schnittpunkt $S(x > 0; 0)$ mit der x-Achse.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.
Durch die x-Achse, die Tangente t_a und durch die Gerade, die durch den Koordinatenursprung und den jeweiligen lokalen Maximumpunkt bestimmt ist, wird für jedes a ein Dreieck begrenzt.
Weisen Sie nach, dass alle so gebildeten Dreiecke zueinander ähnlich sind.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Außerdem sind Funktionen h_t durch $y = h_t(x) = \dfrac{2x}{x^2 + t^2}$ $(t \in \mathbb{R}, t > 0; x \in \mathbb{R})$ gegeben.

e) Durch die Graphen der Funktionen $f_{\frac{1}{10}}$, h_2 und die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ wird eine Fläche vollständig begrenzt.

Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche mithilfe des grafikfähigen Taschenrechners oder unter Verwendung der Funktionen F_a mit $y = F_a(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot (\ln(ax^2) - 1)$ $(x \in \mathbb{R}, x > 0)$ als Stammfunktionen der Funktionen f_a.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

f) Für jede Funktion h_t wird für jedes x $(x \in \mathbb{R}, x > 0)$ durch die Punkte $O(0; 0)$, $Q(x; 0)$ und $P_t(x; h_t(x))$ genau ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt. Jedes dieser Dreiecke erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen geraden Kreiskegel. Ermitteln Sie die Stelle x in Abhängigkeit von t, für die das Volumen des zugehörigen Kreiskegels maximal ist.

Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des lokalen Maximums kann verzichtet werden.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe A 2: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2}$ $(x \in D_f)$.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f, geben Sie deren Nullstellen an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen.

Geben Sie für die Funktion f die Koordinaten des lokalen Extrempunktes an.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Es existieren genau zwei Tangenten an den Graphen der Funktion f, die durch den Koordinatenursprung $O(0; 0)$ verlaufen.

Ermitteln Sie rechnerisch für jede dieser Tangenten je eine Gleichung.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

c) Für jedes u $(u \in \mathbb{R}, \frac{8}{3} < u < 10)$ sind die Punkte $Q(10; 0)$ und $P_u(u; f(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Unter diesen Rechtecken gibt es genau eines mit maximalem Flächeninhalt.

Ermitteln Sie für diesen Fall die Koordinaten des Punktes und den Flächeninhalt des Rechteckes.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

d) Die Funktion F mit $F(x) = 3x + 4 \cdot \ln(x-2) + \frac{4}{x-2}$ $(x \in \mathbb{R}, x > 2)$ ist eine Stammfunktion der Funktion f für x > 2.

Durch den Graphen der Funktion f sowie die Geraden mit den Gleichungen y = 3 und x = 10 wird eine Fläche vollständig begrenzt. Diese Fläche wird durch die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{7}{2}$ in zwei Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser Teilflächen.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Für jedes a $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ ist eine Funktion f_a durch $y = f_a(x) = \frac{3x^2 - ax}{(x-2)^2}$ $(x \in D_{f_a})$ gegeben.

e) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_6 keine lokalen Extrempunkte besitzt.
Untersuchen Sie, ob es weitere Werte a gibt, für die die Funktion f_a keine lokalen Extremstellen besitzt.
Ermitteln Sie den Wert a, für den die Funktion f_a die Wendestelle $x_w = 0$ besitzt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 8)

Aufgabe A3: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{4x}{3x^2 - 12}$ $(x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

b) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Stammfunktion der Funktion f.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = \frac{5}{2}$ und $x = b$ $(b \in \mathbb{R}, b > \frac{5}{2})$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die irrationale Zahl b, für die der Inhalt der zugehörigen Fläche $\ln(\sqrt[3]{16})$ beträgt.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Es existieren Geraden g, die den Graphen der Funktion f außer im Koordinatenursprung O noch jeweils in genau zwei weiteren Punkten S_1 und S_2 schneiden.

c) Bestimmen Sie alle möglichen Werte des Anstiegs der Geraden g.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Betrachtet werden nun die Punkte $S_1(x_1; y_1)$ mit $(x_1 < -2)$ und $S_2(x_2; y_2)$ mit $(x_2 > 2)$.
Für genau eine der Geraden g ist der Abstand dieser Punkte minimal.
Geben Sie den Anstieg dieser Geraden an.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Aufgabe A4: Analysis (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Gegeben sind die Funktionen $y = f_a(x) = a^2x - \ln x \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0; x \in \mathbb{R}, x > 0)$

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graphen alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_a liegen.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion gibt, die genau eine Nullstelle besitzt. Ermitteln Sie diese Nullstelle.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Für jedes a existiert eine Tangente t_a an den Graph der Funktion f_a, die durch den Koordinatenursprung verläuft.
Der Koordinatenursprung, der Berührungspunkt $B_a(x_{B_a}; f(x_{B_a}))$ dieser Tangente mit dem Graphen der Funktion f_a und der Punkt $P_a(x_{B_a}; 0)$ bestimmen ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Wert a, für den das zugehörige Dreieck den Flächeninhalt 5 besitzt.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe B1: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1; 2; 3), B(4; 5; 3), C(1; 2; 10), D(1; 0; 5), F(– 3; 4; 2) und die Ebene E durch $x - y = -1$ gegeben. Der Punkt C liegt in der Ebene E.

a) Weisen Sie nach, dass die durch die Punkte A und B verlaufende Gerade in der Ebene E liegt.
Geben Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte dieser Ebene mit den Koordinatenachsen an und beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Durch die Punkte D und F verläuft die Gerade g.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

c) Ein Punkt Q wird an der Ebene E gespiegelt. Der Bildpunkt Q' hat die Koordinaten (– 4; – 1; 11).
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q und den Abstand der Punkte Q und Q'.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

d) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche von Pyramiden, die ein Volumen von 14 haben.
Ermitteln Sie die Höhe einer solchen Pyramide.
Jede Pyramidenspitze dieser Pyramiden liegt in genau einer von zwei parallelen Ebenen.
Ermitteln Sie für diese Ebenen je eine Gleichung.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe B2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(6; 2; – 6) und B(– 1; – 5; 1), die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$
sowie eine Ebenenschar

E_a: $(-5 + a) \cdot x + (2 - a) \cdot y - 3z = -8 + 4a$ $\quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq \frac{7}{2})$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass durch den Punkt A und die Gerade g eine Ebene E eindeutig bestimmt wird.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in parameterfreier Form.
Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden h und der Ebene E.
Weisen Sie nach, dass die Geraden g und h zueinander windschief sind.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 8)

b) Auf der Geraden g gibt es genau einen Punkt C, so dass das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Zeigen Sie, dass die Gerade h Schnittgerade aller Ebenen E_a ist.
Zwei Ebenen E_{a1} und E_{a2} der Ebenenschar E_a stehen aufeinander senkrecht.
Ermitteln Sie für diesen Fall den Parameter a_1 in Abhängigkeit vom Parameter a_2.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe B3: Geometrie / Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Für jedes k $(k \in \mathbb{R}, -6 \le k \le 6)$ sind Geraden g_k und h_k durch

g_k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ k \\ k-4 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und h_k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt S(4; – 0,4; – 5,2) Schnittpunkt eines Geradenpaares g_k und h_k ist. Untersuchen Sie, ob es Werte k gibt, für die die Geraden g_k und h_k parallel sind.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

b) Es existieren Werte k, für die die Geraden g_k und h_k windschief sind. Ermitteln Sie den Wert k in diesem Intervall, für den der Abstand der Geraden g_k und h_k maximal ist, und geben Sie diesen Abstand an.

Hinweis: Auf die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des lokalen Maximums kann verzichtet werden.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

Aufgabe B4: Geometrie / Algebra (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Für den Ausbau der Bundesstraße B 174 wurde zur Ortsumgehung der Stadt Zschopau eine Brücke gebaut. Diese überquert u. a. die Staatsstraße S 228 und den Fluss Zschopau (vgl. Skizze). Der Fahrbahnrand der S 228 kann in dem betrachteten Abschnitt in einem kartesischen Koordinatensystem (1 LE $\triangleq$ 1 m) näherungsweise durch die Gerade g mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 58 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$ beschrieben werden.

Die Fahrbahn der B 174 liegt in dem betrachteten Abschnitt näherungsweise in einer der Ebenen E_t mit der Gleichung

$(-6 + 7t)x + (18 - 21t)y + 180z = -516 + 1232t \quad (t \in \mathbb{R})$.

Alle Ebenen E_t schneiden sich in ein und derselben Geraden.

a) Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zu den Ebenen E_t.

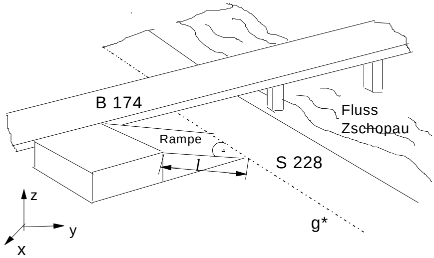
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Der Punkt P(– 19; 55; 3) befindet sich auf der Fahrbahn der B 174. Berechnen Sie die Durchfahrtshöhe für die Fahrzeuge auf der S 228, wenn die Fahrbahnen der B 174 und der S 228 in zueinander parallelen Ebenen liegen und die Stärke der Brücke (einschließlich Fahrbahnbelag) 1 Meter beträgt.

Hinweis: Die in Aufgabenteil c) beschriebene Anhebung der Fahrbahn der S 228 soll hier nicht berücksichtigt werden.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Die Fahrbahn der Rampe zur Abfahrt von der B 174 mündet rechtwinklig auf die S 228 und kann ebenfalls näherungsweise durch eine der Ebenen E_t beschrieben werden. Um die gesetzlich vorgeschriebene höchstmögliche Neigung der Rampe gegenüber der Fahrbahn der B 174 von 2,86° einzuhalten, musste die Fahrbahn der S 228 parallel zur alten Straßenführung in Richtung der z-Achse angehoben werden. Der ursprünglich der Geraden g entsprechende Fahrbahnrand kann nun durch die Gerade g* beschrieben werden (vgl. Skizze).



Ermitteln Sie, um wie viel Meter die Fahrbahn der S 228 mindestens angehoben werden musste.

(Skizze nicht maßstäblich)

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe C1: Stochastik

Von vier Firmen wurde eine Brücke gebaut. Firma I lieferte dabei 10 % der LKW-Ladungen mit Fertigbeton, Firma II 20 %, Firma III 30 % und Firma IV 40 %. Bekannt ist, dass in Firma I bei 1 % der LKW-Ladungen mit Fertigbeton die Mischung nicht den gestellten Qualitätsanforderungen entsprach, in Firma II galt das für 0,4 %, in Firma III für 0,3 % und in Firma IV für 0,1 % der LKW-Ladungen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine während der Bauarbeiten zufällig ausgewählte LKW-Ladung mit Fertigbeton nicht das richtige Mischungsverhältnis besaß.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

b) Man betrachte folgenden Vorgang:
Bei der Anlieferung von Fertigbeton erfolgen Qualitätskontrollen. Für diese Überprüfungen werden zufällig LKWs ausgewählt.
Ermitteln Sie die Anzahl der Kontrollen, die mindestens nötig sind, damit mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0,9 wenigstens eine LKW-Ladung von Firma I unter den kontrollierten ist.

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Während des Baugeschehens wurden in einer Woche 240 LKW-Ladungen mit Fertigbeton gezählt. Auch in dieser Woche betrug die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter LKW eine Lieferung von Firma IV geladen hatte, 40 %.
Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der LKW-Ladungen, die in dieser Woche von Firma IV kamen.
Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsgröße Y.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 94 dieser LKW-Ladungen von Firma IV kamen?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

d) Bei der Bauabnahme wurden Risse entdeckt, die auf Fehler im Mischungsverhältnis des Betons zurückzuführen waren. Die Kosten für die daraus resultierende Reparatur beliefen sich auf 200 000,00 DM.
Da es nach Bauabschluss nicht möglich war, den Verursacher dieser Schäden zu ermitteln, musste ein Vorschlag zur Verteilung der Reparaturkosten auf die am Bau beteiligten Firmen erstellt werden. Entwickeln Sie unter Beachtung des möglichen Verursacherprinzips einen solchen Vorschlag.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe C 2: Stochastik

Im Rahmen eines Projektes im Mathematikunterricht beobachten Schüler der Jahrgangsstufe 12 die folgenden Sachverhalte und werten diese aus.

a) In einer Freistunde würfeln Anne, Britta und Claudius. Sie nutzen einen idealen Würfel und würfeln in alphabetischer Reihenfolge. Bei einer Würfelrunde würfelt jeder höchstens einmal, sie ist aber zu Ende, wenn ein Teilnehmer die „1“ würfelt und damit die Runde gewinnt. Wird in einer Runde keine „1“ gewürfelt, gibt es für diese Runde keinen Gewinner. Die Schüler der Jahrgangsstufe 12 bezweifeln, dass dieses Spiel gerecht ist.
Geben Sie jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeit für die drei Spieler an und äußern Sie sich zum Charakter des Spieles.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

b) In einer Pause unterhalten sich Schüler über die Aussagekraft von Eignungstests. Von einem solchen Test ist Folgendes bekannt: Von den für die Stelle ungeeigneten Bewerbern wurden 96 % richtig, von den geeigneten aber 7 % falsch eingestuft. 92 % aller Bewerber waren für die Stelle geeignet.
Die Schüler interessiert jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
Ereignis D: Ein zufällig ausgewählter Bewerber wird als geeignet eingestuft.
Ereignis E: Ein als ungeeignet eingestufter Bewerber ist geeignet.
Ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeiten.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Von der für die Lehrbuchversorgung verantwortlichen Lehrerin erfuhren die Schüler, dass erfahrungsgemäß 95 % der neu erworbenen Mathematikbücher für den nächsten Jahrgang ein weiteres Mal verwendet werden können. Die Schüler interessiert nun, wie groß unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass von den 200 neu ausgegebenen Lehrbüchern für Stochastik mindestens 196 wieder verwendet werden können.
Ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Eine Fotoagentur will Freundschaftsbilder von jedem Schüler des Gymnasiums anfertigen und verkaufen. Sie geht davon aus, dass die Zahl der Käufer unter den 820 Schülern binomialverteilt ist mit einer ihr bekannten Erfolgswahrscheinlichkeit p und erwartet deshalb, dass 779 Schüler die Fotos kaufen. Die Schüler der Jahrgangsstufe 12 hinterfragen das Kaufverhalten und ermitteln, dass mehr als 53 der insgesamt 820 Schüler die Bilder nicht kaufen werden. Berechnen Sie (ausgehend von der Annahme der Fotoagentur) unter Nutzung des Näherungsverfahrens von MOIVRE-LAPLACE die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 53 der insgesamt 820 Schüler die Bilder nicht kaufen.
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Erwartungsbild zu Aufgabe A1: Analysis

a) $y = f_a(x) = -x \cdot \ln(ax^2)$ $\qquad$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x \in Df_a)$

Definitionsbereich: $D_{f_a} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$

gerade/ungerade: $f_a(-x) = -(-x) \cdot \ln(a(-x)^2) = x \cdot \ln(ax)^2 = -f_a(x)$

$\Rightarrow f_a$ ist ungerade.

Nullstellen:

$0 = -x \cdot \ln(ax^2) \;\Rightarrow\;$ (1) $x_{N_1} = 0$ (entfällt, da nicht in D_{f_a})

(2) $\ln(ax^2) = 0 \Rightarrow ax^2 = 1$, also $x^2 = \frac{1}{a}$

und damit $x_{N_2} = -\sqrt{\frac{1}{a}}$; $x_{N_3} = \sqrt{\frac{1}{a}}$

Extrempunkte: Mit $u = -x$; $u' = -1$; $v = \ln(ax^2)$; $v' = \frac{1}{ax^2} \cdot 2ax = \frac{2}{x}$ folgt

$f_a'(x) = -\ln(ax^2) - x \cdot \frac{2}{x} = -\ln(ax^2) - 2$; $f_a''(x) = -\frac{1}{ax^2} \cdot 2ax = -\frac{2}{x}$.

Lokale Extremstellen:

$f_a'(x_E) = 0$, also $\ln(ax^2) = -2 \Rightarrow e^{-2} = ax^2$

$x_{E_1} = -\frac{\sqrt{e^{-2}}}{\sqrt{a}} = -\frac{e^{-1}}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{e\sqrt{a}}$; $\quad x_{E_2} = \frac{1}{e\sqrt{a}}$

Nachweis:

$f_a''\left(-\frac{1}{e\sqrt{a}}\right) = \frac{-2}{-\frac{1}{e\sqrt{a}}} > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum;

$f_a''\left(\frac{1}{e\sqrt{a}}\right) = \frac{-2}{\frac{1}{e\sqrt{a}}} < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum

Koordinaten der lokalen Extrempunkte:

$f_a\left(-\frac{1}{e\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{e\sqrt{a}} \cdot \ln\left(a \cdot \frac{1}{e^2 a}\right) = \frac{1}{e\sqrt{a}} \cdot (-2) = \frac{-2}{e\sqrt{a}} \Rightarrow P_{MIN}\left(-\frac{1}{e\sqrt{a}};\ \frac{-2}{e\sqrt{a}}\right)$

$f_a\left(\frac{1}{e\sqrt{a}}\right) = -\frac{1}{e\sqrt{a}} \cdot \ln\left(a \cdot \frac{1}{e^2 a}\right) = -\frac{1}{e\sqrt{a}} \cdot (-2) = \frac{2}{e\sqrt{a}} \Rightarrow P_{MAX}\left(\frac{1}{e\sqrt{a}};\ \frac{2}{e\sqrt{a}}\right)$

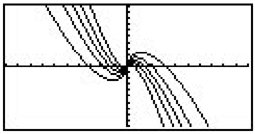
Ermittlung der Gleichung der Funktion:
Da bei beiden lokalen Extrempunkten die y-Koordinate jeweils das Doppelte der x-Koordinate ist, kann die gesuchte Funktion nur die Funktion mit der Gleichung y = 2x sein.
Erkennt man dies nicht, so kann wie folgt vorgegangen werden:

$P_{MAX}\left(\frac{1}{e\sqrt{a}}; \frac{2}{e\sqrt{a}}\right); x = \frac{1}{e\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{1}{x} = e\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{ex} = \sqrt{a}$

Einsetzen in y-Koordinate: $y = \frac{2}{e \cdot \frac{1}{ex}} = 2x$

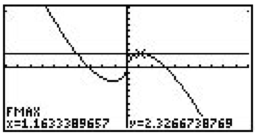
Aufgrund der Symmetrie des Graphen zum Koordinatenursprung gilt diese Eigenschaft auch für die lokalen Minimumpunkte.
$\Rightarrow$ Gleichung der gesuchten Funktion: y = 2x

b) Wähle $a_1 \neq a_2$.
Sollten die Graphen beider zugehöriger Funktionen gemeinsame Punkte haben, müsste gelten: $-x \cdot \ln(a_1x^2) = -x \cdot \ln(a_2x^2) \Rightarrow x_1 = 0$ (entfällt lt. D_{f_a})
$\ln(a_1x^2) = \ln(a_2x^2) \Rightarrow a_1x^2 = a_2x^2$, also $(a_1 - a_2)x^2 = 0$
$\Rightarrow x_2 = 0$ (entfällt) oder $a_1 = a_2$ (entfällt nach Voraussetzung).
$\Rightarrow$ Die Graphen besitzen keine gemeinsamen Punkte.



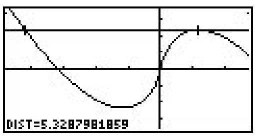
Hinweis: Das Bild des GTR lässt leicht vermuten, dass (0; 0) gemeinsamer Punkt sei, allerdings ist hier die Funktion nicht definiert, die Graphen haben eine Lücke.
Die Abbildung zeigt eine Kurvenschar für a = 0,1; 0,25; 0,5; 1; 3

c) Die beschriebene Gerade muss durch den lokalen Maximumpunkt des Graphen der Funktion verlaufen, denn nur in diesem Fall existieren genau zwei gemeinsame Punkte. Ermitteln der y-Koordinate des lokalen Maximumpunktes mit GTR liefert:
$y \approx 2{,}32667$



Einzeichnen der Funktion y = 2,32667 und Ermitteln der Schnittstellen mit dem Graph von $f_{\frac{1}{10}}$: $S_1(-4{,}17768; 2{,}32667)$; $S_2(1{,}16121; 2{,}32667)$
Differenz der Schnittstellen liefert Länge s der Strecke $\overline{S_1S_2}$: $s \approx 5{,}3$

Einige GTR verfügen über eine Funktion, die den Abstand zweier Punkte ermittelt.
$|\overline{S_1S_2}| \approx 5{,}3$



d) Tangente im Schnittpunkt mit der x-Achse:

Nullstelle: $\sqrt{\frac{1}{a}}$

Anstieg der Tangente: $f'\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = -\ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) - 2 = -\ln 1 - 2 = -2$

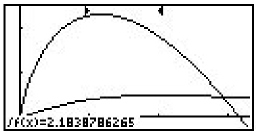
Gleichung der Tangente: $y = -2x + 2\sqrt{\frac{1}{a}}$

Gerade durch den lokalen Maximumpunkt und den Punkt O(0; 0):

$$y = mx \Rightarrow \frac{2}{e\sqrt{a}} = m \cdot \frac{1}{e\sqrt{a}} \Rightarrow m = \frac{2}{e\sqrt{a}} \cdot \frac{e\sqrt{a}}{1} = 2 \text{ (bzw. } m = \frac{y_{max}}{x_{max}} = \frac{\frac{2}{e\sqrt{a}}}{\frac{1}{e\sqrt{a}}} = 2 \Rightarrow y = 2x)$$

Die Anstiege dieser Geraden und der oben betrachtetenTangenten sind vom Parameter a unabhängig. Deshalb sind die Schnittwinkel beider Geraden mit der x-Achse und damit auch zwei Winkel der Dreiecke unabhängig vom Parameter a. Alle Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein und sind nach Hauptähnlichkeitssatz zueinander ähnlich.
(Beide Winkel betragen 63,43°. Angabe ist nicht gefordert.)

e) Darstellung der Graphen der Funktionen $f_{\frac{1}{10}}$ und h_2 mit dem GTR.



Flächeninhalt A:

$$A = \int_1^2 \left(f_{\frac{1}{10}}(x) - h_2(x)\right) dx = \int_1^2 \left(f_{\frac{1}{10}}(x)\right) dx - \int_1^2 (h_2(x))\, dx$$

$$= 2{,}1839 - 0{,}4694 = 1{,}7145 \approx 1{,}7 \text{ (FE)}$$

f) Zielfunktion:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V(x) = \frac{1}{3}\pi\,(h_t(x))^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4x^2}{(x^2+t^2)^2} \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4x^3}{(x^2+t^2)^2} \qquad (x > 0)$$

1. Ableitung der Zielfunktion:

$u = 4x^3$; $u' = 12x^2$; $v = (x^2 + t^2)^2$; $v' = 4x \cdot (x^2 + t^2)$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{12x^2 \cdot (x^2+t^2)^2 - 4x^3 \cdot 4x \cdot (x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^4} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{-4x^4 + 12x^2t^2}{(x^2+t^2)^3}$$

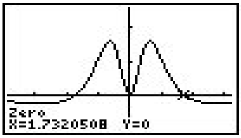
$$V'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x^4 + 12x^2t^2 = 0$$

$x^2(-4x^2 + 12t^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (entfällt lt. Definitionsb.)

$-4x^2 + 12t^2 = 0$; $3t^2 = x^2$; $x_2 = -\sqrt{3}\,t$ (entfällt lt. Definitionsb.)

$x_3 = \sqrt{3}\,t$ (trifft zu)

Stellt man die Funktion der 1. Ableitung grafisch (hier h_1) dar, so erkennt man den Vorzeichenwechsel an der Stelle x_3 von positiv nach negativ und damit den Monotoniewechsel von monoton steigend zu monoton fallend. Es liegt also ein lokales Maximum vor. (Nachweis war nicht gefordert.)

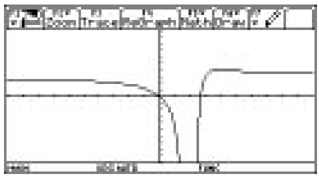


Bewertungsvorschlag:

a)	größtmöglicher Definitionsbereich; Untersuchung auf gerade / ungerade; Nullstellen; Ansatz für 1. Ableitung; 1. Ableitung; 2. Ableitung; Extremstellen; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Nachweis und Art der Extrema; Ansatz für Gleichung der Funktion; Gleichung der Funktion	11 BE
b)	Ansatz; Nachweis	2 BE
c)	Ansatz; Länge der Strecke	2 BE
d)	Anstieg der Tangente; Gleichung der Tangente; Anstieg der weiteren Gerade; Nachweis	4 BE
e)	Ansatz; Flächeninhalt	2 BE
f)	Zielfunktion; 1. Ableitung; Ansatz zum Lösen der Gleichung; Wert x	4 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A 2: Analysis

a) Definitionsbereich: $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$
Einen ersten Überblick über den Verlauf der Graphen der Funktion f erhält man mit dem GTR:

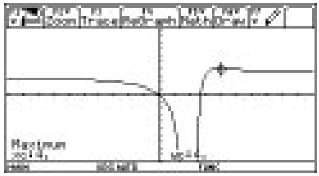


Nullstellen: $0 = 3x^2 - 8x = x(3x - 8) \Rightarrow x_{N1} = 0$; $x_{N2} = \frac{8}{3}$ (da Nennerfunktion an diesen Stellen ungleich null)
(Ermittlung auch mit ROOT-Befehl möglich)

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 8x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{8}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = 3$$

Koordinaten des lokalen Extrempunktes:
Der Graph der Funktion f wird mit TRACE oder (besser) mit Standardroutinen zur Bestimmung lokaler Extrema untersucht.



$P_{MAX}(4; 4)$ lokales Maximum

Anmerkung: Da für Aufgabenteil b) sowieso f'(x) benötigt wird, kann man die – nach Aufgabenstellung existierenden – Extremstellen auch ohne zusätzlichen Aufwand durch Nullsetzen der 1. Ableitung gewinnen. Durch die grafische Darstellung im Aufgabenteil a) ist die Überprüfung Max./Min. mittelts 2. Ableitung nicht erforderlich.

b) Für die Gleichung der Tangenten wird die 1. Ableitung von f(x) benötigt.

$f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2}$; $u = 3x^2 - 8x$; $u' = 6x - 8$; $v = (x-2)^2$; $v' = 2(x-2)$

$$f'(x) = \frac{(6x - 8) \cdot (x-2)^2 - (3x^2 - 8x) \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

Die Gleichung der Tangente t im Punkt O(0; 0) hat die Form y = mx, da sie durch den Koordinatenursprung geht.
$f'(0) = -2$; Gleichung der Tangente: $y = -2x \ \ (x \in \mathbb{R})$
(Zur Kontrolle kann man die Tangente mit dem GTR darstellen.)

Auch die zweite Tangente geht durch den Koordinatenursprung, ihre Gleichung hat also die Form y = mx. Mit $m = f'(x) = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$ muss gelten:

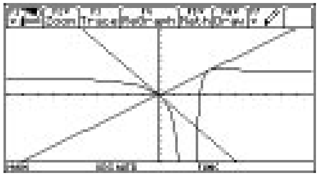
$$y = m \cdot x = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3} \cdot x$$

Schnitt der Tangente mit dem Graphen der Funktion f:

$$\frac{-4x^2 + 16x}{(x-2)^3} = \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2}$$

$-4x^2 + 16x = (3x^2 - 8x) \cdot (x-2) = 3x^3 - 8x^2 - 6x^2 + 16x$;

also $0 = 3x^3 - 10x^2 = x^2(3x - 10) \Rightarrow x_1 = 0$ (entfällt); $x_2 = \frac{10}{3}$ (trifft zu)



Die Tangente berührt den Graph der Funktion f an der Stelle $x = \frac{10}{3}$.

Man berechnet den Anstieg der Funktion an dieser Stelle:

$$f'\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{-4 \cdot \frac{10}{3} + 16}{\left(\frac{10}{3} - 2\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{64}{27}} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

Gleichung der 2. Tangente: $y = \frac{9}{8}x \quad (x \in \mathbb{R})$

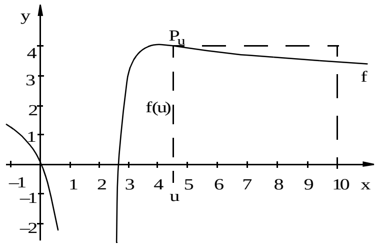
Das Ergebnis kann mit dem GTR überprüft werden.

c) Zielfunktion:

$$A(u) = f(u) \cdot (10 - u)$$

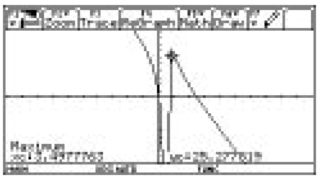
$$= \frac{3u^2 - 8u}{(u-2)^2} \cdot (10 - u) \qquad \left(\tfrac{8}{3} < u < 10\right)$$

$$= \frac{-3u^3 + 38u^2 - 80u}{(u-2)^2}$$



(s. Skizze - in Aufgabenstellung nicht verlangt)

Lösungsvariante 1:



Darstellung der Zielfunktion mit GTR und Ablesen des lokalen Maximums im geforderten Intervall liefert: u = 3,50
Flächeninhalt: A(3,50) = 25,28
y-Koordinate des Punktes P: $f_8(3{,}5) = 3{,}89$;
P(3,50; 3,89)

Lösungsvariante 2:

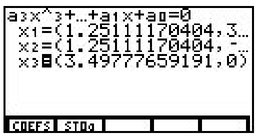
1. Ableitung der Zielfunktion:

$u = 38u^2 - 3u^3 - 80u$; $u' = 76u - 9u^2 - 80$; $v = (u-2)^2$; $v' = 2(u-2)$

$$A'(u) = \frac{(76u - 9u^2 - 80) \cdot (u-2)^2 - (38u^2 - 3u^3 - 80u) \cdot 2 \cdot (u-2)}{(u-2)^4}$$

$$= \frac{-3u^3 + 18u^2 - 72u + 160}{(u-2)^3}$$

$A'(u) = 0 \quad \Rightarrow -3u^3 + 18u^2 - 72u + 160 = 0$



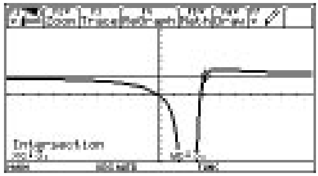
Lösung mit GTR liefert $u_E = 3{,}4977$

Nach Berechnung der y-Koordinate folgt: P(3,50; 3,89)
Berechnung des Flächeninhaltes: A(3,4977) = 25,28 (FE)

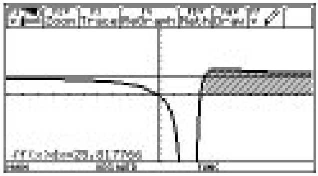
d) Ermittlung des Flächeninhalts:

Lösungsvariante 1:

Ermittlung der Flächeninhalte mit dem GTR:
Ermitteln der Schnittstelle der Geraden y = 3 mit dem Graphen der Funktion f (GTR-Befehl INTERSECTION).



oder Lösen der Gleichung $3 = \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2}$ ergibt x = 3.



Berechnung der Gesamtfläche unter der Kurve:

$$A = \int_3^{10} f(x)\,dx = 25{,}82 \text{ (FE)} \qquad \text{(GTR)}$$

Bei Abzug der Rechtecksfläche „unter der Geraden y = 3“ von 7 · 3 = 21 erhält man für den Inhalt der gesuchten Fläche 4,82 (FE).
Einzeichnen der Geraden y = 3,5 zur Bestimmung des Flächeninhaltes der über der Geraden liegenden Teilfläche ergibt nebenstehende Figur:

Ermittlung der Schnittstellen der Funktion f mit dem Graphen der Funktion y = 3,5:
(INTERSECTION - Befehl): $x_1 = 3{,}17$ $x_2 = 8{,}83$
Für die Gesamtfläche zwischen Graph und x-Achse erhält man:

$$\int_{3,17}^{8,83} f(x)\,dx = 21{,}193$$

Bei Abzug der Rechtecksfläche „unter der Geraden y = 3,5“ von
(8,83 – 3,17) · 3,5 = 19,81 ergibt sich für den Inhalt der gesuchten Fläche 1,38.
$A_1 = 1{,}38$; $A_2 = 4{,}82 - 1{,}38 = 3{,}44$

Verhältnis: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1,38}{3,44} = \frac{1}{2,49} = 1 : 2{,}49 \approx 1 : 2{,}5$

Lösungsvariante 2:

Rechnerische Ermittlung der Flächeninhalte über Stammfunktion:
Ermittlung der Schnittstellen wie bei Lösungsvariante 1, Nutzung der Abbildungen zur Kontrolle.

$$\int_3^{10} ((x) - 3)\,dx = \left(3x + 4\ln|x-2| + \frac{4}{x-2} - 3x\right)_3^{10} = \left(4\ln|x-2| + \frac{4}{x-2}\right)_3^{10}$$

$$= 4 \cdot \ln 8 + \frac{1}{2} - 4 \cdot \ln 1 - 4 = -3{,}5 + 4 \cdot \ln 8 \approx 4{,}82$$

Ermittlung der Schnittstellen des Graphen der Funktion f mit der Geraden y = 3,5:

$3{,}5 = \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2} \Rightarrow 3{,}5 \cdot (x-2)^2 = 3x^2 - 8x$, also $3{,}5x^2 - 14x + 14 = 3x^2 - 8x$

$x^2 - 12x + 28 = 0 \Rightarrow x_{1;2} = 6 \pm \sqrt{8}$

Teilfläche A_1:

$$\int_{6-\sqrt{8}}^{6+\sqrt{8}} (f(x) - 3{,}5)\,dx = \left(-0{,}5x + 4\ln|x-2| + \frac{4}{x-2}\right)_{6-\sqrt{8}}^{6+\sqrt{8}} = 4\ln(2\cdot\sqrt{2} + 3) - 4\cdot\sqrt{2} \approx 1{,}39$$

Teilfläche A_2: 4,82 – 1,39 = 3,43

Verhältnis (Berechnung wie bei Lösungsvariante 1): 1 : 2,47 ≈ 1 : 2,5

e) Nachweis, dass für a = 6 der Graph der Funktion keine lokalen Extrempunkte besitzt:
Die Existenz lokaler Extrema kann über das Bilden von Ableitungen untersucht werden.

$f_a'(x) = \frac{(a-12)\cdot x + 2a}{(x-2)^3}$; $f_6'(x) = \frac{-6x + 12}{(x-2)^3}$; $f_6'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Da 2 kein Element des Definitionsbereiches ist, kann der Graph der Funktion f_6 keine lokalen Extrempunkte besitzen.

Untersuchung der notwendigen Bedingung für lokale Extrema der Funktion f_a:

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow 0 = (a-12)\cdot x + 2a \Rightarrow x_E = -\frac{2a}{a-12}$

Daraus folgt, dass für a = 12 keine Nullstellen der 1. Ableitung existieren, also die Funktion f_{12} keine lokalen Extrema besitzt.

Untersuchung auf Wendestelle:

$u = (a-12)\cdot x + 2a$; $u' = a - 12$; $v = (x-2)^3$; $v' = 3\cdot(x-2)^2$

$$f_a''(x) = \frac{(a-12)\cdot(x-2)^3 - ((a-12)\cdot x + 2a)\cdot 3\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6}$$

$$= \frac{(a-12)\cdot(x-2) - ((a-12)\cdot x + 2a)\cdot 3}{(x-2)^4} = \frac{ax - 2a - 12x + 24 - 3ax + 36x - 6a}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{-2ax + 24x + 24 - 8a}{(x-2)^4} = \frac{(-2a + 24)\cdot x + 24 - 8a}{(x-2)^4}$$

Es ist zu prüfen, für welche a der Zähler an der Stelle x = 0 den Wert 0 annimmt.

$(-2a + 24) \cdot 0 + 24 - 8a = 0 \Rightarrow 24 = 8a$ und $a = 3$.

Eine hinreichende Bedingung war nicht zu prüfen. Der Nachweis könnte durch Darstellung der Funktion f_3 oder ihrer Ableitungsfunktion erbracht werden.

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich; Nullstellen; Verhalten im Unendlichen; Koordinaten des Extremums	4 BE
b)	1. Ableitung; Gleichung einer Tangente; Ansatz für Gleichung der weiteren Tangente; Berührungsstelle; Gleichung der weiteren Tangente	5 BE
c)	Zielfunktion; Extremstelle; Koordinaten des Punktes; Flächeninhalt	4 BE
d)	Schnittstelle des Graphen der Funktion f mit der Gerade y = 3; ein Flächeninhalt; Schnittstellen des Graphen der Funktion f mit der Gerade y = 3,5; zweiter Flächeninhalt und Verhältnis	4 BE
e)	Ansatz für Nachweis für f_6; Nachweis für f_6; 1. Ableitung; Extremstelle in Abhängigkeit von a; Wert a; 2. Ableitung; Ansatz für Wert a; Wert a	8 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A3: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{4x}{3x^2 - 12}$ $\quad (x \in D_f)$.

a) Größtmöglicher Definitionsbereich:
$3x^2 - 12 = 0$ und damit $x_{1;2} = \pm 2 \Rightarrow D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 2\}$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{3x^2 - 12} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot 4}{x^2 \cdot \left(3 - \frac{12}{x^2}\right)} = 0 \; ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{3x^2 - 12} = 0$$

Einen anschaulichen Eindruck vom Verlauf des Graphen vermittelt nebenstehendes Bild:

b) Stammfunktion:
Der Integrand besitzt die Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$

Stammfunktion:

$$\int \frac{4x}{3x^2-12}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \frac{2}{3} \cdot (\ln|x^2-4|)$$

Flächenberechnung:

$$\int_{\frac{5}{2}}^{b} \frac{4x}{3x^2-12}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \int_{\frac{5}{2}}^{b} \frac{2x}{x^2-4}\,dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (\ln|b^2-4| - \ln|\tfrac{25}{4} - \tfrac{16}{4}|) = \frac{2}{3} \cdot (\ln|b^2-4| - \ln|\tfrac{9}{4}|) = \frac{2}{3} \cdot \ln\frac{b^2-4}{\frac{9}{4}}$$

(Flächeninhalt in Abhängigkeit von b)

Berechnung von b:

$$\frac{2}{3} \cdot \ln\frac{4b^2-16}{9} = \ln(\sqrt[3]{16}) = \ln 4^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\ \ln 4$$

Daraus folgt: $\frac{4b^2-16}{9} = 4$, also $4b^2 = 52$; $b_1 = \sqrt{13}$ (trifft zu); $b_2 = -\sqrt{13}$ (entfällt)

c) Geraden g durch den Koordinatenursprung: $y = mx$
Ermitteln gemeinsamer Punkte von g und dem Graphen von f:

$mx = \frac{4x}{3x^2-12} \Rightarrow 4x = mx \cdot (3x^2-12)$ bzw. $4x = 3mx^3 - 12mx$

$\Rightarrow 0 = 3mx^3 - 12mx - 4x$ bzw. $0 = x(3mx^2 - 12m - 4)$

$x_1 = 0$; $3mx^2 - 12m - 4 = 0$, also $x^2 - 4 - \frac{4}{3m} = 0 \Rightarrow x_{2;3} = \pm\sqrt{4 + \frac{4}{3m}}$

Der Radikand muss größer als null sein, also $4 + \frac{4}{3m} > 0$.

1. Fall: $m > 0$

$4 + \frac{4}{3m} > 0$, also $12m + 4 > 0$ und damit $m > -\frac{1}{3}$, in diesem 1. Fall also $m > 0$.

2. Fall: $m < 0$

$4 + \frac{4}{3m} > 0$, also $12m + 4 < 0$ und damit $m < -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Für den Anstieg m gilt: $m > 0$ oder $m < -\frac{1}{3}$.
(Die Lösung sollte am GTR-Graphen veranschaulicht werden.)

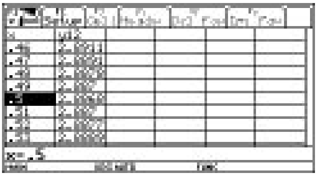
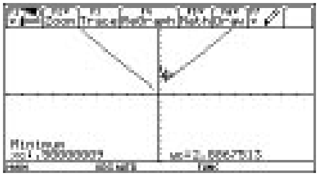
d) Für die Punkte S_1 und S_2 gilt:

$mx = \frac{4x}{3x^2 - 12}$ $(x \neq 0)$, also $3x^2 - 12 = \frac{4}{m} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3m} + 4$

Der Graph von g ist wegen $f(-x) = \frac{-4x}{3x^2 - 12} = -f(x)$ symmetrisch zum Koordinatenursprung. Für die Untersuchung des minimalen Abstandes genügt es daher, den minimalen Abstand d des Koordinatenursprung vom Punkt S_2 zu betrachten.

$d = \sqrt{\frac{4}{3m} + 4 + (mx)^2} = \sqrt{\frac{4}{3m} + 4 + m^2 \cdot \left(\frac{4}{3m} + 4\right)} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{3m} + 1 + \frac{1}{3}m + m^2\right)}$

Darstellung der Funktion des Abstandes d mit $d(m) = \sqrt{\frac{4}{3m} + 4 + m^2 \cdot \left(\frac{4}{3m} + 4\right)}$ mit dem GTR und Aufstellen einer Wertetabelle. Feststellen des minimalen Abstandes.

Der minimale Abstand tritt für m = 0,5 auf.

Lösungsvariante:

$d = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{3m} + 1 + \frac{1}{3}m + m^2\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{3m} + 1 + \frac{1}{3}m + m^2\right)}$

Der Abstand wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Es genügt im Folgenden die Betrachtung des Radikanden:

$\tilde{d}(m) = 1 + \frac{1}{3}m + m^2 + \frac{1}{3m}$; $\tilde{d}'(m) = \frac{1}{3} + 2m - \frac{1}{3m^2}$;

$0 = \frac{1}{3} + 2m - \frac{1}{3m^2} \Rightarrow 0 = m^2 + 6m^3 - 1$

Lösung der Gleichung mit GTR (Polynom, grafische Lösung) ergibt: m = 0,5

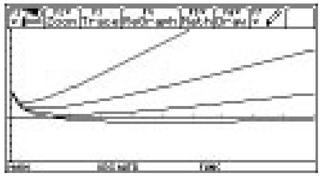
Bewertungsvorschlag:

a) Größtmöglicher Definitionsbereich; Verhalten im Unendlichen	2 BE
b) Ansatz; Stammfunktion; Ansatz für Wert b; Wert b	4 BE
c) Ansatz für Anstieg der Geraden; Werte für den Anstieg der Geraden	2 BE
d) Zielfunktion; Anstieg	2 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe A4: Analysis

a) $y = f_a(x) = a^2x - \ln x \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 0;\ x \in \mathbb{R},\ x > 0)$

Einen ersten Überblick über den Verlauf der Graphen liefert die Abbildung für $a \in \{0{,}2;\ 0{,}5;\ 1;\ 2\}$.



$f_a'(x) = a^2 - \frac{1}{x}$; $f_a''(x) = \frac{1}{x^2}$

Lokale Extremstelle:

$f_a'(x) = 0 \ \Rightarrow\ a^2 = \frac{1}{x}$; $x_E = \frac{1}{a^2}$

Nachweis der Extrema:

$f_a''\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2} = a^4 > 0 \ \Rightarrow$ lokales Minimum

Koordinaten der lokalen Extrempunkte:

$f_a\left(\frac{1}{a^2}\right) = a^2 \cdot \frac{1}{a^2} - \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{a^2}\right)$; $P_{MIN}\left(\frac{1}{a^2};\ 1 - \ln\left(\frac{1}{a^2}\right)\right) = P_{MIN}\left(\frac{1}{a^2};\ 1 + 2\ln a\right)$

gesuchte Funktion:

$x = \frac{1}{a^2}$; $a^2 = \frac{1}{x}$; $a = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$y = 1 - \ln\frac{1}{a^2} = 1 - \ln x \qquad \left(\text{da } \frac{1}{a^2} = x\right)$

Gleichung der Funktion: $y = 1 - \ln x$

Kontrolle: Einzeichnen im GTR (dick):

b) Nullstellen: $0 = a^2x - \ln x$

Da jede der Funktionen genau ein lokales Minimum besitzt, die Funktionen f_a über dem gesamten Definitionsbereich stetig sind und $\lim\limits_{x \to 0} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = \infty$ ist, muss gelten: Der y-Wert des lokalen Minimums der gesuchten Funktion ist 0, also gilt: $1 - \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = e$ und damit $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Funktion $f_{\frac{1}{\sqrt{e}}}$: $y = \frac{1}{e} \cdot x - \ln x$ (Angabe der Funktionsgleichung war nicht gefordert.)

Ermitteln der Nullstelle x_N:

Da $x_N = x_{MIN} = \frac{1}{a^2}$ (s. o.), folgt mit $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$: $x_N = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$.

oder: $0 = \frac{1}{e} \cdot x - \ln x \Rightarrow \ln x = \frac{x}{e}$, also $e^{\frac{x}{e}} = x \Rightarrow x_N = e$.

Oder: Darstellen der Funktion $f_{\frac{1}{\sqrt{e}}}$ mit GTR und Ablesen der Nullstelle liefert $x_N = 2{,}71828$

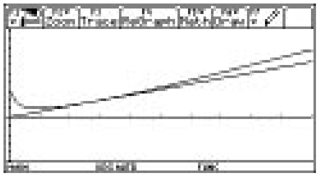
c) 1. Ableitung: $f_a'(x) = a^2 - \frac{1}{x}$
Tangente durch Koordinatenursprung:

$y = m \cdot x$, also $y = (a^2 - \frac{1}{x}) \cdot x$.

Einsetzen des Funktionswertes für y liefert:

$a^2x - \ln x = (a^2 - \frac{1}{x}) \cdot x = a^2x - 1 \Rightarrow \ln x = 1$, also $x = e$

Der Berührungspunkt hat die Koordinaten: $B_a(e;\, a^2e - 1)$
Zur Veranschaulichung kann man Graph und Tangente z.B. für a = 1 darstellen.



Flächeninhalt des Dreiecks:

$A = \frac{g \cdot h_g}{2} = \frac{e \cdot (a^2e - 1)}{2} = \frac{a^2e^2 - e}{2} = 5 \Rightarrow a^2e^2 - e = 10$ bzw. $a^2e^2 = 10 + e$

Also gilt: $a^2 = \frac{10 + e}{e^2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10 + e}}{e}$

Bewertungsvorschlag:

a) 1. Ableitung; Koordinaten der lokalen Extrempunkte; Ansatz für Gleichung der Funktion; Gleichung der Funktion	4 BE
b) Ansatz; Wert a; Nullstelle	3 BE
c) Berührungsstelle; Koordinaten des Berührungspunktes; Wert a	3 BE
	10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B1: Geometrie / Algebra

a) Es genügt zu zeigen, dass die Punkte A und B in der Ebene E liegen.
Punktprobe für A: $1 - 2 = -1$ Punktprobe für B: $4 - 5 = -1$

Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen durch die Ebene E:

P_x: $y = 0$, $z = 0$ $\Rightarrow$ $x = -1$, also $P_x(-1; 0; 0)$
P_y: $x = 0$, $z = 0$ $\Rightarrow$ $y = 1$, also $P_y(0; 1; 0)$
P_z: $x = 0$, $y = 0$ $\Rightarrow$ $0 = -1$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ Es existiert kein Schnittpunkt der Ebene E mit der z-Achse.
Die Ebene schneidet die x-Achse und die y-Achse; sie ist echt parallel zur z-Achse.

b) $g(DF)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$

Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E:

$(1 - 4t) - 4t = -1$, also $1 - 8t = -1$ bzw. $t = \frac{1}{4}$.

Durch Einsetzen von t in die Gleichung der Geraden g erhält man die

Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OS}$. Daraus folgt: $S(0; 1; 4{,}25)$

Schnittwinkel: α sei Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E.

$$\sin\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}} \right| \approx 0{,}8834 \Rightarrow \alpha \approx 62{,}1°$$

(Für die Berechnung von Winkeln empfiehlt sich die Nutzung eines entsprechenden GTR-Programmes, z. B. des Programmes „Winkel".)

c) h sei die Lotgerade von Q' auf die Ebene E.

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(w \in \mathbb{R})$

Ermitteln der Koordinaten des Schnittpunktes L der Geraden h mit der Ebene E:

$(-4 + w) - (-1 - w) = -1 \Rightarrow w = 1$
$\Rightarrow$ Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $L(-3; -2; 11)$.

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ}' + 2\overrightarrow{Q'L} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$

Der Punkt Q hat die Koordinaten (– 2; – 3; 11).

Abstand der Punkte Q' und Q: $d(QQ') = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$

(Die Verwendung eines GTR - Programms, z. B. des Programmes „Abstand“, wird empfohlen.)

d) Das Dreieck ABC ist bei A rechtwinklig (ablesbar aus den Koordinaten). Deshalb kann der Flächeninhalt A des Dreiecks als $A = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{2}$ bestimmt werden.

Wird dies nicht erkannt, kann der Flächeninhalt mit einem geeigneten GTR-Programm: z. B. dem Programm „Dreieck“ oder auf rechnerischem Wege bestimmt werden.

Rechnerischer Weg:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}; \cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{49}} = 0 \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 90°$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{18} \cdot 7}{2} = \frac{21}{2}\sqrt{2} \approx 14{,}85$ (FE)

Aus der Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ folgt: $h = \frac{3V}{A_G}$. Daraus erhält man durch Einsetzen von Volumen und Flächeninhalt der Grundfläche: $h = \frac{42}{\frac{21}{2}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Die Höhe einer solchen Pyramide beträgt: $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ (LE)

Die gesuchten Ebenen verlaufen parallel zur Ebene der Grundfläche der Pyramide, also zur Ebene E im Abstand $2\sqrt{2}$.

Lösungsvariante 1:
Für den Abstand der Punkte der parallelen Ebenen zur Ebene E gilt:

$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n|$

Für $\vec{x}_0$ wählen wir den z. B. Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$; $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1; -1; 0)$

$$d = \left| \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2}$$

1. Fall: „Betrag“ $= 2\sqrt{2}$: $(x-1) + (-y+2) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, also

$x - y + 1 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x - y = 3$

2.Fall: „Betrag“ $= -2\sqrt{2}$: $(x-1) + (-y+2) = -2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, also

$x - y + 1 = -2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x - y = -5$

Die gesuchten Ebenengleichungen sind: E_1: $x - y = 3$ und E_2: $x - y = -5$.

Lösungsvariante 2:
Ermitteln der Koordinaten der Spitzen der Pyramiden P_1 und P_2.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.

Für den Fall, dass die Spitze der Pyramide senkrecht zu E über Punkt A liegt, gilt:

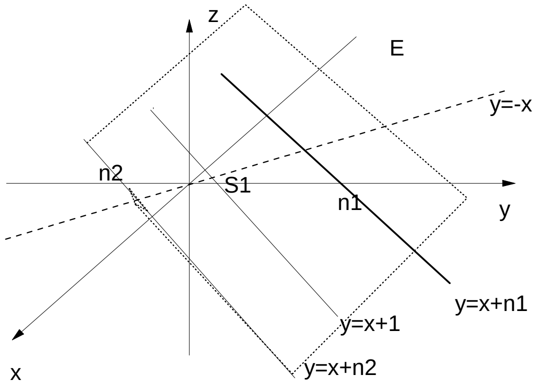
$|\overrightarrow{AP}| = |t \cdot \vec{n}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm 2$

$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + 2\vec{n} = (3; 0; 3)$, also $P_1(3; 0; 3)$

$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} - 2\vec{n} = (-1; 4; 3)$, also $P_2(-1; 4; 3)$.

Durch jede dieser Spitzen verläuft je eine der parallelen Ebenen. Aufgrund der Parallelität der Ebenen zu E haben diese die Gleichung $x - y = a$. Den Parameter a berechnet man durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.
Die gesuchten Ebenen sind: E_1: $x - y = 3$ und E_2: $x - y = -5$.
(Es ist auch möglich, die Gleichungen der Ebenen mit Hilfe der Ortsvektoren von P_1 und P_2 und von Spannvektoren der Ebene E aufzustellen.)

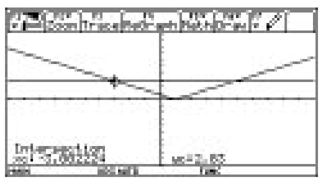
Lösungsvariante 3:
Aus Teilaufgabe a) folgt, dass die Ebene E parallel zur z-Achse verläuft.
Die weitere Lösung erfolgt nur über die Betrachtung der Spurgeraden der Ebene E und der dazu parallelen Ebenen in der x-y-Ebene.
Die Spurgerade der Ebene E in der x-y-Ebene ist die Gerade $x - y = -1$. Die entsprechende Gleichung in expliziter Form lautet: $y = x + 1$. Die Gleichungen der Spurgeraden der parallelen Ebenen haben die Form $y = x + n$.
Eine Senkrechte dazu ist die Gerade $y = -x$.



Koordinaten des Schnittpunktes S_1 der Senkrechten mit der Spurgerade von E
$-x = x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$

Koordinaten der Schnittpunkte S_n der Senkrechten mit den Spurgeraden der parallelen Ebenen:

$-x = x + n \Rightarrow x = -\frac{n}{2}$; $y = \frac{n}{2}$



Abstand der Punkte S_1 und S_2:

$|\overline{S_1S_2}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)^2} = 2{,}83$

Diese Gleichung löst man grafisch mit dem GTR durch Schnitt der Graphen der Funktionen $Y1 = 2{,}83$ und $Y2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)^2}$.

Als Schnittstellen erhält man – 3 und 5, d.h., $n_1 = -3$ und $n_2 = 5$.
Die Gleichungen der Spurgeraden sind damit: $y = x - 3$ und $y = x + 5$.
Die zugehörigen Ebenen haben also die Gleichungen:
E_1: $x - y = 3$ und E_2: $x - y = -5$

Bewertungsvorschlag:

a) Nachweis; Koordinaten der Schnittpunkte mit x-Achse und y-Achse; Aussage zur Lage der Ebene E — 3 BE

b) Ansatz für Koordinaten des Schnittpunktes; Koordinaten des Schnittpunktes; Ansatz für Schnittwinkel; Schnittwinkel — 4 BE

c) Gleichung der Lotgeraden; Wert des Parameters in der Gleichung der Lotgeraden; Koordinaten des Punktes Q; Abstand der Punkte Q und Q' — 4 BE

d) Ansatz für Höhe; Höhe; Ansatz für Ebenengleichungen; Ebenengleichungen — 4 BE

15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B2: Geometrie/Algebra

a) Es ist zu zeigen, daß der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt.

$$\left.\begin{array}{lll} 6 = 3 + 2t & \Rightarrow & t = \frac{3}{2} \\ 2 = 2 + t & \Rightarrow & t = 0 \\ -6 = -4 - t & \Rightarrow & t = 2 \end{array}\right\} \quad A \notin g$$

Da der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt, wird durch die Gerade g und den Punkt A eine Ebene eindeutig bestimmt.
Gleichung der Ebene E:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (t, s \in \mathbb{R})$$

Umformen in allgemeine Form:

$$\begin{array}{ll} x = 3 + 2t + 3s & \\ y = 2 + t & \Rightarrow \quad y + z = -2 - 2s \quad | \cdot 3 \\ z = -4 - t - 2s & \quad\; x - 2y = -1 + 3s \quad | \cdot 2 \end{array}$$

$3y + 3z = -6 - 6s$
$2x - 4y = -2 + 6s \Rightarrow$ Gleichung der Ebene E: $2x - y + 3z = -8$
(Es wird empfohlen, für die Umformung in die parameterfreie Form der Ebenengleichung ein GTR-Programm, z. B. das Programm „Ebene“, zu nutzen.)

Der Schnittwinkel sei α. Ein Normalenvektor der Ebene E ist der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{42}} \right| \approx 0{,}30861;\ \alpha \approx 18{,}0°$$

(Es wird empfohlen, zur Bestimmung des Schnittwinkels ein GTR-Programm zu nutzen.)

Nachweis, dass die Geraden g und h zueinander windschief sind:
Das Gleichsetzen beider Geradengleichungen liefert das Gleichungssystem:

(I) $3 + 2t = -1 + k$
(II) $2 + t = -5 + k$
(III) $-4 - t = 1 - k$

Durch Addieren der Gleichung (II) zur Gleichung (III) erhält man:

$-2 = -4$ $\Rightarrow$ Widerspruch, d. h.: Das System hat keine (reellen) Lösungen – die Geraden g und h haben keine gemeinsamen Punkte (*).

Hinweis: Wird das Addieren der Gleichungen (II) und (III) nicht erkannt, müssen zunächst die Parameter t und k aus zwei Gleichungen ermittelt werden. Das Einsetzen in die dritte Gleichung liefert den Widerspruch.

Die Geraden g und h sind also entweder windschief oder parallel. Prüfung der Richtungsvektoren auf Parallelität liefert:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$. Das heißt: Die Richtungsvektoren sind nicht parallel (**). Aus (*) und (**) folgt: Die Geraden sind windschief.

b) Man überzeugt sich zunächst, dass der Punkt B nicht auf der Geraden g liegt. (Einsetzen in Gleichung der Geraden)
Da der Punkt C auf der Geraden g liegt, hat er die Koordinaten:
$C(3 + 2t;\ 2 + t;\ -4 - t)$.
Damit Δ ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ ist, muss gelten:

$(\overline{AC}) = d(\overline{BC})$.

$$d(\overline{AC}) = \sqrt{(3 + 2t - 6)^2 + (2 + t - 2)^2 + (-4 - t + 6)^2} = \sqrt{(-3 + 2t)^2 + t^2 + (2 - t)^2}$$

$$d(\overline{BC}) = \sqrt{(3 + 2t + 1)^2 + (2 + t + 5)^2 + (-4 - t - 1)^2} = \sqrt{(4 + 2t)^2 + (7 + t)^2 + (-5 - t)^2}$$

Gleichsetzen und Quadrieren liefert:

$$\begin{aligned}
(-3+2t)^2 + t^2 + (2-t)^2 &= (4+2t)^2 + (7+t)^2 + (-5-t)^2 \\
9 - 12t + 4t^2 + t^2 + 4 - 4t + t^2 &= 16 + 16t + 4t^2 + 49 + 14t + t^2 + 25 + 10t + t^2 \\
-16t + 13 &= 40t + 90 \\
t &= -\frac{11}{8}
\end{aligned}$$

Einsetzen des Parameters t in Gleichung der Geraden g liefert die Koordinaten des Punktes C:
$x = 3 - \frac{22}{8} = \frac{2}{8}$; $y = 2 - \frac{11}{8} = \frac{5}{8}$; $z = -4 + \frac{11}{8} = -\frac{21}{8}$, also: $C(\frac{2}{8}; \frac{5}{8}; -\frac{21}{8})$

c) Es genügt zu zeigen, dass die Gerade h in jeder der Ebenen E_a liegt.
Einsetzen der Gleichung der Geraden h in Gleichung der Ebene liefert:

$$\begin{aligned}
(-5+a)\cdot(-1+k) + (2-a)\cdot(-5+k) - 3\cdot(1-k) &= -8 + 4a \\
5 - 5k - a + ak - 10 + 2k + 5a - ak - 3 + 3k &= -8 + 4a \\
-8 + 4a &= -8 + 4a \\
0 &= 0 \text{ (wahre Aussage)}
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass unabhängig von a die Gerade h in jeder der Ebenen E_a liegt.

Das Skalarprodukt der Normalenvektoren der Ebenen E_{a1} und E_{a2} muss 0 ergeben, wenn beide Ebenen aufeinander senkrecht stehen sollen.

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -5 + a_1 \\ 2 - a_1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -5 + a_2 \\ 2 - a_2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
(-5+a_1)\cdot(-5+a_2) + (2-a_1)\cdot(2-a_2) + (-3)\cdot(-3) &= 0 \\
25 - 5a_2 - 5a_1 + a_1a_2 + 4 - 2a_2 - 2a_1 + a_1a_2 + 9 &= 0 \\
38 - 7a_2 - 7a_1 + 2a_1a_2 &= 0 \\
-7a_1 + 2a_1a_2 &= -38 + 7a_2 \\
a_1(-7 + 2a_2) &= -38 + 7a_2 \\
a_1 &= \frac{-38 + 7a_2}{-7 + 2a_2} \qquad (a_2 \neq \tfrac{7}{2})
\end{aligned}$$

Bewertungsvorschlag:

a) Nachweis, dass der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt;
Ansatz für Gleichung der Ebene; Gleichung der Ebene;
Ansatz für Schnittwinkel; Schnittwinkel; Untersuchung auf Parallelität;
Untersuchung auf gemeinsame Punkte; Aussage zur Lagebeziehung — 8 BE

b) Ansatz für Nachweis der Gleichschenkligkeit; Wert des
Parameters in der Gleichung der Geraden; Koordinaten von C — 3 BE

c) Ansatz für Nachweis; Nachweis; Ansatz für Parameter;
Parameter — 4 BE

15 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B3: Geometrie / Algebra

a) Die Koordinaten des Punktes S müssen beide Geradengleichungen für ein und denselben Wert k erfüllen.

g_k: (I): $4 = -3 + 10t \quad \Rightarrow t = \frac{7}{10}$

(II): $-0{,}4 = 1 + tk \quad \Rightarrow -1{,}4 = \frac{7}{10}\,k$, also $k = -2$

(III): $-5{,}2 = -1 + t(k-4) \quad \Rightarrow -4{,}2 = \frac{7}{10}\,k - \frac{28}{10}$, also $-\frac{14}{10} = \frac{7}{10}\,k \Rightarrow k = -2$

h_k: (I): $4 = 4 + 0$

(II): $-0{,}4 = -4 + sk$

(III): $-5{,}2 = 2 + 4s \quad \Rightarrow s = -1{,}8$

Einsetzen von s in (II):

$-0{,}4 = -4 - 1{,}8 \cdot k \quad \Rightarrow \quad 3{,}6 = -1{,}8k \quad \Rightarrow \quad k = -2$
$\Rightarrow$ Für $k = -2$ ist der Punkt S Schnittpunkt beider Geraden.

Untersuchung auf Parallelität:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ k \\ k-4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \text{n. d.} \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= \frac{k-4}{4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es existiert kein k, für welches die Geraden parallel sind.

b) Berechnung des Abstandes d(k):

Es ist der Abstand windschiefer Geraden in Abhängigkeit von k zu ermitteln.

Man ermittelt zunächst den Normalenvektor $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ einer Ebene, die sowohl zu g_k als auch zu h_k parallel verläuft.

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 10n_x + kn_y + (k-4)n_z &= 0 \\ &\text{(II)} & kn_y + 4n_z &= 0 \\ &\text{(I)} - \text{(II)} & 10n_x + (k-8)n_z &= 0 \\ & & n_x = -\frac{k-8}{10}\,n_z; \quad n_y &= -\frac{4}{k}\,n_z \end{aligned}$$

Wähle z. B.: $n_z = 10k$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8k - k^2 \\ -40 \\ 10k \end{pmatrix}$

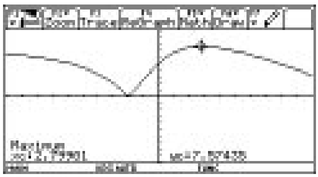
$$|\vec{n}| = \sqrt{(8k - k^2)^2 + 40^2 + (10k)^2} = \sqrt{k^4 - 16k^3 + 164k^2 + 1600}$$

$$\text{Abstand } d(k) = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot (\vec{p} - \vec{p})\right|$$

$$= \left|\frac{\begin{pmatrix} 8k - k^2 \\ -40 \\ 10k \end{pmatrix}}{\sqrt{k^4 - 16k^3 + 164k^2 + 1600}} \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\begin{pmatrix} 8k - k^2 \\ -40 \\ 10k \end{pmatrix}}{\sqrt{k^4 - 16k^3 + 164k^2 + 1600}} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right|$$

$$d(k) = \left|\frac{7k^2 + 86k - 200}{\sqrt{k^4 - 16k^3 + 164k^2 + 1600}}\right|$$



Untersuchung der Funktion $d(k)$ auf Maxima im angegebenem Intervall:
Für $k = 2{,}799$ ist der Abstand der Geraden g_k und h_k maximal. Dieser Abstand beträgt 7,57.

Bewertungsvorschlag:

a) Wert des Parameters t oder s; Wert des Parameters k; Nachweis mit zweiter Gerade und Schlussfolgerung; Ansatz für Nachweis der Parallelität; Nachweis der Parallelität — 5 BE

b) Normalenvektor einer Parallelebene zur Geraden g_k und h_k; Ansatz für Abstand; Abstand in Abhängigkeit von k; lokale Extremstelle; maximaler Abstand — 5 BE

10 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe B4: Geometrie / Algebra

a) Lagebeziehung der Geraden g zu den Ebenen E_t:

$$
\begin{aligned}
(-6+7t)\cdot(-30+3s)+(18-21t)\cdot(58+s)+180\cdot(-5) &= -516+1\,232t\\
180-18s-210t+21st+1\,044+18s-1\,218t-21st-900 &= -516+1\,232t\\
324-1\,428t &= -516+1\,232t\\
t &= \frac{6}{19}\approx 0{,}3157
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Es gibt nur für $t = \frac{6}{19}$ gemeinsame Punkte von Ebene und Gerade.

Prüfung durch Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\left(-6+\frac{42}{19}\right)\cdot(-30+3s)+\left(18-\frac{126}{19}\right)\cdot(58+s)+180\cdot(-5) &= -\frac{2412}{19}\\
-\frac{72}{19}\cdot(-30+3s)+\frac{216}{19}\cdot(58+s)+\frac{3420}{19}\cdot(-5) &= -\frac{2412}{19}\\
(-72)\cdot(-30+3s)+216\cdot(58+s)+3\,420\cdot(-5) &= -2\,412\\
2\,160-216s+12\,528+216s-17\,100 &= -2\,412\\
-2\,412 &= -2\,412
\end{aligned}
$$

(wahreAussage)

$\Rightarrow$ Unabhängig vom Parameter s liegen alle Punkte der Geraden g in der Ebene $E_{\frac{6}{19}}$.

$\Rightarrow$ Für $t = \frac{6}{19}$ liegt die Gerade g in der Ebene E_t, für alle anderen t liegt sie parallel zur entsprechenden Ebene.

b) Ermitteln der Gleichung der speziellen Ebene durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes P in die Ebenengleichung von E_t.
P(– 19; 55; 3)

$$
\begin{aligned}
(-6+7t)\cdot x+(18-21t)\cdot y+180\cdot z &= -516+1\,232t\\
(-6+7t)\cdot(-19)+(18-21t)\cdot 55+180\cdot 3 &= -516+1\,232t\\
114-133t+990-1\,155t+540 &= -516+1\,232t\\
2\,160 &= 2\,520t\\
t &= \frac{6}{7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(-6+\frac{42}{7}\right)x+\left(18-\frac{126}{7}\right)y+180z &= -516+\frac{7392}{7}\\
0\cdot x+0\cdot y+180z &= 540
\end{aligned}
$$

$E_{\frac{6}{7}}$: z = 3

Da die S 228 und die B 174 in parallelen Ebenen liegen, genügt es, den Abstand der Geraden g zur (parallelen) Ebene $E_{\frac{6}{7}}$ zu bestimmen.

Da die Ebene $E_{\frac{6}{7}}$ und die Gerade g parallel zur x-y-Koordinatenebene liegen, genügt die Betrachtung der z-Koordinate. Für alle Punkte der Ebene gilt z = 3, für alle Punkte der Geraden z = – 5. Der Abstand ist damit 3 – (– 5) = 8.

Berücksichtigt man die Brückenstärke von 1 m, so beträgt die Durchfahrtshöhe 7 m.

c) *Lösungsvariante 1:*
Gleichung der Ebene der Rampe E_r:

$$\sphericalangle(E_{\frac{6}{7}}; E_r) = 2{,}86°;\ \text{Normalenvektor von } E_{\frac{6}{7}}:\ \vec{n}_{\frac{6}{7}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

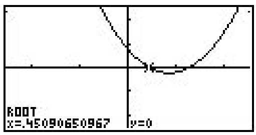
Normalenvektor von E_r: $\vec{n}_r = \begin{pmatrix} -6+7t \\ 18-21t \\ 180 \end{pmatrix}$

$$\cos\sphericalangle(E_{\frac{6}{7}}; E_r) = \left| \frac{\vec{n}_{\frac{6}{7}} \cdot \vec{n}_r}{\left|\vec{n}_{\frac{6}{7}}\right| \cdot \left|\vec{n}_r\right|} \right|;\ \text{für alle t ist } |\vec{n}_r| > 0.$$

$$\cos 2{,}86° = \frac{180}{\sqrt{(-6+7t)^2 + (18-21t)^2 + 180^2} \cdot \sqrt{1}}$$

$$0 = \cos 2{,}86° \cdot \sqrt{(-6+7t)^2 + (18-21t)^2 + 180^2} - 180$$

Lösung mit GTR liefert: $t_1 \approx 0{,}451$; $t_2 \approx 1{,}263$
Aufgrund der Vorgabe des Winkels werden zwei Lösungen ermittelt. Beide Lösungen beschreiben aber dieselbe Ebene. Sie unterscheiden sich nur im Richtungssinn des Normalenvektors.



$E_{0{,}451}$: $-2{,}843x + 8{,}529y + 180z = 39{,}632$
Der Punkt G(– 30; 58; – 5) liegt auf der Geraden g, wie unmittelbar aus der Gleichung der Geraden folgt. Da er auch in der Ebene der „alten“ Rampe liegen muss, liegt er nicht in der Ebene E_r der „neuen“ Rampe. Weil aber die Gerade g zur Ebene E_r parallel ist, muss es in dieser Ebene einen Punkt G_u(– 30; 58; u) geben, der „über“ dem Punkt G liegt und sich von diesem nur in der z-Koordinate unterscheidet.

$G_u(-30; 58; u) \in E_{0,451}$

$$\begin{aligned} -2{,}843 \cdot (-30) + 8{,}529 \cdot 58 + 180u &= 39{,}632 \\ u &= -3{,}002 \end{aligned}$$

Vergleich der z-Koordinate mit dem alten Fahrbahnrand: $d(G; G^*_{-3,002})$

$-5-(-3{,}002) = -1{,}998 \approx -2 \quad \Rightarrow$ Die Fahrbahn muss um ca. 2 m gehoben werden.

Lösungsvariante 2:
Die Ebene der Fahrbahn der B 174 ($E_{\frac{6}{7}}$), die Ebene der „Fahrbahn der Rampe vor der Hebung“ ($E_{\frac{6}{19}}$) und die Ebene der Fahrbahn der Rampe (E_r) schneiden einander in der Geraden k, welche den Beginn der Abfahrtsrampe enthält.

Gleichung der Ebene der Rampe „vor der Anhebung“: $E_{\frac{6}{19}}$

$$\begin{aligned} \left(-6+\tfrac{42}{19}\right)x + \left(18-\tfrac{126}{19}\right)y + 180z &= -516 + \tfrac{7392}{19} \\ -\tfrac{72}{19}x + \tfrac{216}{19}y + \tfrac{3420}{19}z &= -\tfrac{2412}{19} \\ -72x + 216y + 3\,420z &= -2\,412 \\ -18x + 54y + 855z &= -603 \end{aligned}$$

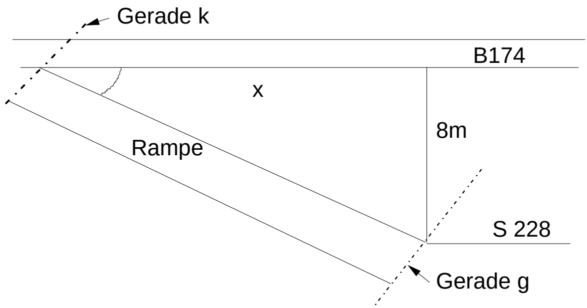
Berechnung des Winkels zwischen den Ebenen $E_{\frac{6}{19}}$ und $E_{\frac{6}{7}}$:

$$\cos\sphericalangle\left(E_{\frac{6}{19}}; E_{\frac{6}{7}}\right) = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -18 \\ 54 \\ 855 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{734265} \cdot \sqrt{1}} \approx 0{,}9978$$

$$\Rightarrow \sphericalangle\left(E_{\frac{6}{19}}; E_{\frac{6}{7}}\right) \approx 3{,}81°$$

Berechnung der Entfernung der Hilfsgerade k zum Lotfußpunkt:

Ansicht vor Hebung der S 228



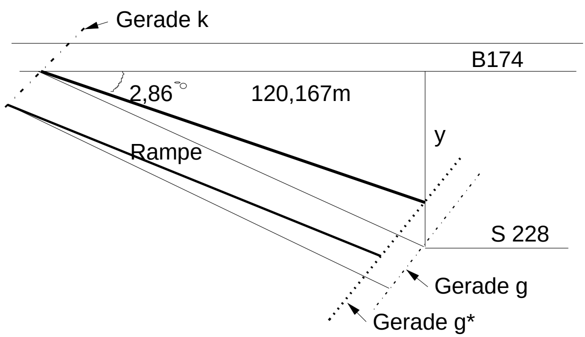
(Skizze ohne Berücksichtigung der Brückenstärke)

$\tan\sphericalangle\left(E_{\frac{6}{19}};\ E_{\frac{6}{7}}\right) = \frac{8}{x} \qquad \Rightarrow x = \frac{8}{0,06657} \approx 120{,}167$

Der Abstand x beträgt 120,167 m. Dieser Abstand ist nach Anhebung der S 228 derselbe. Dann gilt:

$\tan 2{,}86° = \frac{y}{120,167} \Rightarrow y = 6{,}003$

Ansicht nach Hebung der S 228



Die neue Höhe der Brücke beträgt also ca. 6 m.
Berechnung der Höhendifferenz: 8 m – 6 m = 2 m
Die Fahrbahn der S 228 muss also um ca. 2 m gehoben werden.

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz für Lage; Aussage für $t = \frac{6}{19}$; Aussage für alle anderen t	3 BE
b) Ansatz für Gleichung der Ebene der Fahrbahn der B 174; Gleichung der Ebene $E_{\frac{6}{7}}$; Durchfahrtshöhe	3 BE
c) Ansatz für Gleichung der Ebene der Rampe; Gleichung der Ebene der Rampe; Ansatz für Anhebungshöhe; Anhebungshöhe der S 228	4 BE
	10 BE

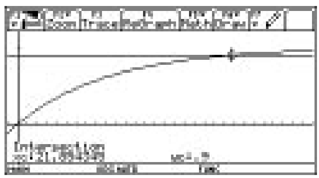
Erwartungsbild zu Aufgabe C1: Stochastik

a) A ist das Ereignis: Eine LKW-Ladung besitzt nicht das richtige Mischungsverhältnis.
$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}004 + 0{,}3 \cdot 0{,}003 + 0{,}4 \cdot 0{,}001 = 0{,}0031$

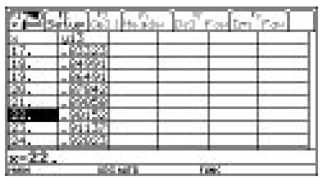
b) Firma I liefert 10 % der LKW-Ladungen.
X: Anzahl der LKW-Ladungen von Firma I; X ist binomialverteilt mit p = 0,1.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Lieferungen keine der Firma I vorkommt, beträgt dann $0{,}9^n$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass in n Lieferungen mindestens eine der Firma I vorkommt, beträgt also $1 - 0{,}9^n$.

1. Lösungsvariante:
$1 - 0{,}9^n > 0{,}9$
Darstellung der Funktionen $Y1 = 1 - 0{,}9^x$ und $Y2 = 0{,}9$ mit dem GTR und Ermittlung der Schnittstelle:
⇒ Es müssen mindestens 22 LKW kontrolliert werden.



2. Lösungsvariante:
Untersuchung der Funktion Y1 mit Wertetabelle:



3. Lösungsvariante:
$1 - 0{,}9^n > 0{,}9$, also $0{,}1 > 0{,}9^n$.
$\lg 0{,}1 > n \cdot \lg 0{,}9$
$\frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}9} < n \qquad (\text{da } \lg 0{,}9 < 0) \Rightarrow 21{,}8 < n$

⇒ Es müssen mindestens 22 LKW kontrolliert werden.

c) Y: Anzahl der LKW-Ladungen von Firma IV; Y ist binomialverteilt mit $n = 240$ und $p = 0,4$.

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{240 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 7,589$
Zu bestimmen ist weiterhin $P(Y \le 93)$:

Lösungsvariante 1: Nutzung im GTR eingebauter Routinen zur Binomialverteilung:
$P(Y \le 93) \approx 0,3724$ (Berechnung mit Casio 9 970 bzw. Casio 9 850 plus)

Lösungsvariante 2: Nutzung von GTR-Programmen

Lösungsvariante 3: Nutzung der Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE (hier ohne Berücksichtigung des Korrekturgliedes):
$P(Y \le 93) \approx \Phi\left(\frac{93-96}{\sqrt{240 \cdot 0,4 \cdot 0,6}}\right) = \Phi(-0,3952) = 1 - \Phi(0,3952) \approx 1 - 0,65534$
$\approx 0,3447$

Lösung mit Berücksichtigung des Korrekturgliedes: 0,3707

d) F_i: Die Firma i hat den Schaden verursacht.
Bei Anwendung des Satzes von BAYES oder Nutzung eines Baumdiagrammes ergibt sich:
$P_A(F_1) = \frac{0,1 \cdot 0,01}{0,0031} \approx 0,3226$; $P_A(F_2) = \frac{0,2 \cdot 0,004}{0,0031} \approx 0,2581$

$P_A(F_3) = \frac{0,3 \cdot 0,003}{0,0031} \approx 0,2903$; $P_A(F_4) = \frac{0,4 \cdot 0,001}{0,0031} \approx 0,1290$

Kosten für Firma I: $0,3226 \cdot 200\,000 = 64\,520$ DM
Analog erhält man: Kosten für Firma II: 51 620 DM, für Firma III: 58 060 DM und für Firma IV: 25 800 DM.

Hinweis: Hier wurden die Wahrscheinlichkeiten mit vier gültigen Stellen verwendet. Die berechneten Kosten hängen von der Genauigkeit der Wahrscheinlichkeiten ab.

Bewertungsvorschlag:

a) Ansatz; Wahrscheinlichkeit	2 BE
b) Ansatz; Anzahl	2 BE
c) Standardabweichung; Ansatz; Wahrscheinlichkeit	3 BE
d) eine Wahrscheinlichkeit; alle Wahrscheinlichkeiten;	
Verteilung der Reparaturkosten	3 BE
	10 BE

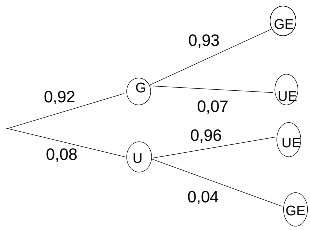
Erwartungsbild zu Aufgabe C2: Stochastik

a) $P(A)=\frac{1}{6}\approx 0{,}1667$; $P(B)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}\approx 0{,}1389$

$P(C)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}\approx 0{,}1157$

Das Spiel ist nicht gerecht, da die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die Spieler unterschiedlich sind.

b) G ... Bewerber ist geeignet
U ... Bewerber ist ungeeignet
GE ... Bewerber wird als geeignet eingestuft
UE ... Bewerber ist als ungeeignet eingestuft



$P(D) = 0{,}92\cdot 0{,}93 + 0{,}08\cdot 0{,}04 = 0{,}8588$

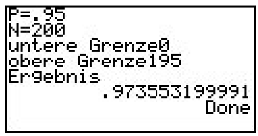
$P(E) = P_{UE}(G) = \frac{P(G\cap UE)}{P(UE)} = \frac{0{,}92\cdot 0{,}07}{1-0{,}8588} = 0{,}4561$

c) X ... Anzahl der wieder verwendbaren Mathematikbücher
X ist binomialverteilt mit n = 200 und p = 0,95.

$P(X\geq 196) = 1 - P(X\leq 195)\approx 1 - 0{,}97355 = 0{,}02645$

Lösungsvariante 1:
Nutzung von im GTR installierter Routinen oder von GTR-Programmen zur Summenfunktion der Binomialverteilung.

(Die Abbildung zeigt ein durch ein GTR-Programm ermitteltes Zwischenergebnis.)



Lösungsvariante 2:
Nutzung der Näherungsformel von MOIVRE-LAPLACE:

$\mu = 200\cdot 0{,}95 = 190$ $\sigma = \sqrt{200\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05}\approx 3{,}082$

$P(X\geq b) = 1 - P(X\leq b-1)\approx 1-\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

$P(X\geq 196) = 1 - P(X\leq 195)\approx 1-\Phi\left(\frac{195-190}{3{,}082}\right)\approx 1-\Phi(1{,}622)$

$\approx 1 - 0{,}9474 = 0{,}0526$

Bei Lösung mit Berücksichtigung des Korrekturgliedes ergibt sich
$P(X \geq 196) \approx 0{,}0375$.

Lösungsvariante 3:
$P(X \geq 196) = P(X = 196) + P(X = 197) + P(X = 198) + P(X = 199) + P(X = 200)$

Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten mit GTR.
Summe: 0,02645

d) Y ... Anzahl der Käufer
Y ist binomialverteilt mit n = 820 und besitzt den Erwartungswert 779.

Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit p:

$$E(Y) = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{E(Y)}{n} = \frac{779}{820} = 0{,}95$$

Nach Voraussetzung der Agentur ist die Wahrscheinlichkeit 0,05, dass Schüler die Bilder nicht kaufen.
Z ... Anzahl der Schüler, die die Bilder nicht kaufen
Z ist binomialverteilt mit n = 820 und p = 0,05
Für Erwartungswert und Standardabweichung erhält man:

$$\mu = 820 \cdot 0{,}05 = 41 \qquad \sigma = \sqrt{820 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 6{,}241$$

$$\begin{aligned} P(Z > 53) &= 1 - P(Z \leq 53) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{53-41}{6,241}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}9228) \approx 1 - 0{,}9726 \quad \text{(Tafel)} \\ &\approx 0{,}0274 \end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung des Korrekturgliedes erhält man: $P(Z > 53) \approx 0{,}0228$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Wahrscheinlichkeiten; Aussage zum Charakter des Spieles	2 BE
b)	Wahrscheinlichkeit P(D); Ansatz für bedingte Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit P(E)	3 BE
c)	Ansatz; Wahrscheinlichkeit	2 BE
d)	Erfolgswahrscheinlichkeit p; Ansatz; Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 53 Schüler nicht kaufen	3 BE
		10 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1998 / 99

Gymnasium

Sachsen-Anhalt

Hinweis: Der Prüfling hatte nach Empfehlung durch die Lehrkraft je eine Aufgabe aus den Gebieten L1, L2 und L3 zur Bearbeitung auszuwählen.

Gebiet L 1: Analysis / Aufgabe 1.1

Die Funktionenschar f_a sei gegeben durch

$$y = f_a(x) = (x + a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\,, \qquad x \in D_{fa}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Die Graphen der Funktionen der Schar f_a werden mit G_a bezeichnet.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D_{fa} und berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen der Schar f_a.

Die Graphen G_a besitzen jeweils genau einen Hochpunkt, der der einzige lokale Extrempunkt ist. Ermitteln Sie die Koordinaten der Hochpunkte der Graphen G_a, beschreiben Sie die Lage (Ortskurve) dieser Punkte im Koordinatensystem durch eine Gleichung und geben Sie deren Gültigkeitsbereich an.

Der Graph G_2 besitzt genau einen Wendepunkt $W(x_W \mid f(x_W))$ mit $x_W = 1 - \sqrt{3}$.
Ermitteln Sie den maximalen Anstieg des Graphen G_2.

Zeigen Sie, dass gilt $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f_2'(x) = 0$. (Hinweis zu möglichen Termumformungen: $\dfrac{Z}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{Z \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4 - x^2}$)

Zeichnen Sie den Graphen G_2 im Definitionsbereich D_{f2}.

b) An den Graphen G_2 sei im Punkt $P(0 \mid f_2(0))$ die Tangente gelegt.

Stellen Sie eine Gleichung dieser Tangente auf, und zeigen Sie, dass diese Tangente und der Graph G_2 noch genau einen weiteren gemeinsamen Punkt Q besitzen.

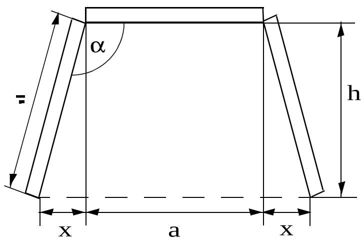
Der Koordinatenursprung, der Punkt P und der Punkt Q seien die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Flächeninhaltes dieses Dreiecks $A = f_2(0)$ ist.

c) Durch Rotation jedes Graphen G_a für $x \geq 0$ um die x-Achse entsteht jeweils ein Rotationskörper.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers.

d) Drei Betonteile mit der Breite a sollen, wie in nebenstehender Skizze dargestellt, zu einem Kabelschacht mit maximalem Querschnitt montiert werden.

Zeigen Sie, dass zur Extremwertberechnung die Funktionenschar f_a als Ausgangsfunktion (Zielfunktion) verwendet werden kann.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels α für den Fall, dass der Querschnitt maximal ist.



(Skizze nicht maßstäblich)

Gebiet L1: Analysis / Aufgabe 1.2

Gegeben sind die Funktionen f, g und h durch

$$y = f(x) = \ln(\cos x) + 2, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$
$$y = g(x) = \cos\frac{6}{5}x + 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$y = h(x) = \ln(\cos x) + 2\cos x, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Die Graphen dieser Funktionen seien F, G und H.

a) Zeigen Sie, dass der Graph F symmetrisch zur y-Achse liegt.

Ermitteln Sie vom Graphen F die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse, die Koordinaten des Extrempunktes sowie dessen Art, und untersuchen Sie den Graphen F auf Existenz von Wendepunkten.
Zeichnen Sie den Graphen F.

b) Eine Funktion f_1 habe die gleiche Zuordnungsvorschrift wie die Funktion f, jedoch den größtmöglichen Definitionsbereich D_{f1}.

Ermitteln Sie für diese Funktion f_1 die Nullstellen im Intervall $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$.
Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_{f1}.

c) Der Querschnitt eines Stollens sei durch eine Fläche beschrieben, die durch die x-Achse, die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ sowie den Graphen F begrenzt wird. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Querschnittes näherungsweise, indem Sie das massgebliche Intervall in mindestens acht gleich große Teilintervalle aufgliedern.

Eine Näherung für den Flächeninhalt A erhält man auch, wenn die eine Begrenzung des Querschnittes mit dem Graphen G statt mit dem Graphen F beschrieben wird. Dieser Flächeninhalt sei A_1.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A_1.

Die eine Begrenzung des Stollenquerschnitts soll nun durch den Graphen Q einer quadratischen Funktion im Intervall $-1 \le x \le 1$ statt mit dem Graphen F beschrieben werden. Die Graphen Q und F sollen dabei im Extrempunkt und in den Punkten am Anfang und am Ende des gegebenen Intervalls übereinstimmen.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

d) Zeigen Sie, dass der Graph H genau einen Extrempunkt besitzt und dass dieser mit dem Extrempunkt des Graphen F übereinstimmt.

Gebiet L2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene E_1, die Kugel K und die Gerade g gegeben durch

E_1: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1{,}5$;

K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -5$;

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und die Maßzahl des Radius der Kugel K.

Die Gerade g durchstößt die Kugel K in den Punkten P und Q.
Berechnen Sie die Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

[Teilergebnis zur Kontrolle: $P(1|3|1)$]

b) Im Punkt P soll an die Kugel K die Tangentialebene E_2 gelegt werden.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene auf.

Parallel zur Ebene E_2 existiert eine weitere Tangentialebene E_3 an die Kugel K.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes R der Ebene E_3 mit der Kugel K, und geben Sie eine Gleichung der Ebene E_3 an.

Die Tangentialebene E_2 verläuft zur Ebene E_1 parallel und hat von ihr den Abstand d.
Berechnen Sie die Maßzahl des Abstandes d.

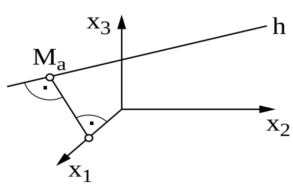
Weisen Sie nach, dass die Ebene E_1 die Kugel K schneidet.

c) Gegeben ist die Schar der Kugeln K_a durch die Gleichung

$$K_a: \quad \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}\right]^2 = 9, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Die Mittelpunkte aller Kugeln der Kugelschar K_a liegen auf einer Geraden h.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an.

Es existiert eine Kugel der Schar K_a, deren Mittelpunkt M_a von der x_1-Achse einen minimalen Abstand besitzt (s. Skizze).
Berechnen Sie für diesen Fall die Koordinaten des Mittelpunktes.



Skizze nicht maßstäblich

Gebiet L2: Analytische Geometrie / Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gleichung der Geraden g_1 durch

$$g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sowie die Punkte $A(5|5|4)$, $B(7|10|4)$ und $S(5|7{,}9|6)$ gegeben.

a) Die Punkte A und B bestimmen die Gerade g_2.
Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 echt parallel zueinander verlaufen und dass die Gerade g_1 in der x_1-x_2-Ebene liegt.

b) Die Geraden g_1 und g_2 liegen in einer Ebene E_1.
Stellen Sie eine Gleichung für die Ebene E_1 in Koordinatenform auf.
[Mögliches Ergebnis zur Kontrolle: $5x_1 - 2x_2 = 15$]
Weisen Sie nach, dass die Ebene E_1 orthogonal zur x_1-x_2-Ebene ist.

c) Die Punkte A, B und S seien Eckpunkte eines Dreiecks.
Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Dreiecksfläche.

d) Auf der Geraden g_1 existieren zwei Punkte C und D derart, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C und D.

Das Rechteck ABCD sei die Grundfläche der schiefen Pyramide ABCDS.
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens V dieser Pyramide.

Es existieren zwei gerade Pyramiden mit der Grundfläche ABCD und den Spitzen S_1 bzw. S_2, die dasselbe Volumen V wie die Pyramide ABCDS haben.
Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2.

Gebiet L3: Wahrscheinlichkeitsrechnung / Aufgabe 3.1

An einem Gymnasium mit 500 Schülern bereitet der Schülerrat ein Schulfest vor. Für eine grobe Finanzplanung wird davon ausgegangen, dass ein Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 genau eine Karte für das Fest kauft.

a) Zusätzlich zum Verkauf der Eintrittskarten werden T-Shirts mit dem Schullogo verkauft, was zur Finanzierung des Schulfestes beitragen soll.
Ein Schüler, der eine Eintrittskarte gekauft hat, kaufe mit der Wahrscheinlichkeit von 0,4 ein T-Shirt. Ein Schüler, der keine Eintrittskarte gekauft hat, kaufe mit der Wahrscheinlichkeit von 0,7 ein T-Shirt.
Ein Schüler hat ein T-Shirt gekauft.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Schüler unter dieser Bedingung eine Eintrittskarte gekauft hat.

b) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der von den Schülern des Gymnasiums gekauften Karten.

Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße X näherungsweise als normalverteilt betrachtet werden kann.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 310 Karten verkauft werden.

c) Eintrittskarten werden außer Schülern nur noch Lehrern zum Kauf angeboten. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Lehrer genau eine Karte für das Schulfest erwirbt, sei ebenfalls 0,6.
Die Finanzierung des Festes gilt als gesichert, wenn mindestens 310 Karten verkauft werden. Dieses Ereignis soll mit mindestens 70 %iger Wahrscheinlichkeit eintreten.
Berechnen Sie, wie vielen Lehrern mindestens Karten angeboten werden müssen, um die Finanzierung zu gewährleisten.

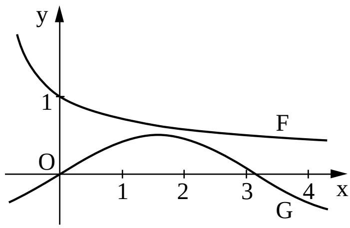
Gebiet L3: Analysis / Aufgabe 3.2

Gegeben sind die Funktionen f, g und h durch

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \qquad x \in \mathbb{R},\ x > -1,$$

$$y = g(x) = \frac{1}{2}\sin x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$y = h(x) = f(x) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > -1.$$



Ihre Graphen seien F, G bzw. H.
Die Graphen F und G sind in einem ausgewählten Intervall in nebenstehender Skizze dargestellt.

a) Zeichnen Sie den Graphen H im Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 4$.
(Hinweis: Der Graph H kann in der gegebenen Abbildung dieses Aufgabenblattes erarbeitet werden.)

b) Zeigen Sie mittels des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion, dass für die n-te Ableitung der Funktion f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}(x+1)^{-\frac{2n+1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1.$$

c) Die Funktion h soll für $|x| < 1$ durch eine ganzrationale Funktion p dritten Grades approximiert werden. Es soll gelten: $p(0) = h(0)$ sowie $p^{(i)}(0) = h^{(i)}(0)$ für i = 1, 2, 3.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p.

d) Begründen Sie, dass die Funktion h kein bestimmtes Integral über dem Intervall $-1 \le x \le 1$ besitzt, jedoch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{0} h(x)\,dx$ existiert; berechnen Sie $\int_{-1}^{0} h(x)\,dx$.

Hinweis: Falls Aufgabe a) auf diesem Blatt bearbeitet wurde, hatte es der Prüfling mit seinem Namen zu beschriften und der Prüfungsarbeit beizufügen.

Gebiet L3: Analytische Geometrie / Aufgabe 3.3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $P(7|4)$ und $Q(-3{,}5|1)$ gegeben. Durch den Punkt P verläuft eine Parabel, deren Scheitelpunkt der Koordinatenursprung ist und deren Brennpunkt auf der x-Achse liegt.

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Parabel auf und geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes an.

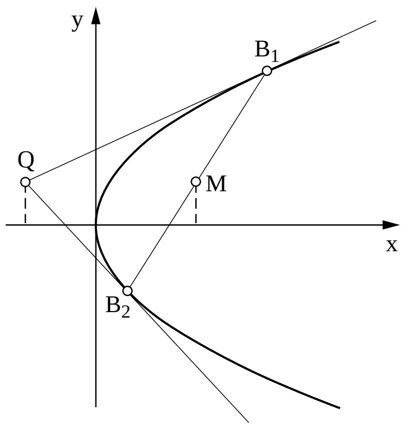
Konstruieren Sie mindestens acht Punkte der Parabel und zeichnen Sie die Parabel.

Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung dafür an, dass die Tangente der Parabel im Punkt P konstruiert werden soll.

b) Vom Punkt Q aus werden Tangenten t_1 und t_2 an die Parabel (aus Teilaufgabe a)) gelegt.
Berechnen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte B_1 und B_2.

c) Es sei Q_a ein beliebiger Punkt, von dem aus die Tangenten t_{a1} und t_{a2} an die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ existieren. Diese Tangenten berühren die Parabel in den Punkten B_{a1} und B_{a2}. M_a sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{B_{a1}B_{a2}}$. Dann stimmen die Ordinaten der Punkte M_a und Q_a überein.

Überprüfen Sie die Richtigkeit dieser Aussage am Beispiel der Werte aus Teilaufgabe b) und weisen Sie die Allgemeingültigkeit der Aussage nach.



Skizze nicht maßstäblich

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Größtmöglicher Definitionsbereich:

Wegen $a^2 - x^2 \geq 0$ muss $a^2 \geq x^2$ gelten, also $|a| \geq x$ bzw. $-a \leq x \leq a \quad \Rightarrow$
$D_{fa} = \{x\colon -a \leq x \leq a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0\}$.

Nullstellen der Funktionen der Schar f_a:

Aus $0 = (x + a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ folgt

- 1. Fall $(x + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{0_1} = -a$,
- 2. Fall $\sqrt{a^2 - x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{0_2} = a, \quad x_{0_3} = x_{0_1} = -a$.

Nullstellen $x_{0_1} = -a, \quad x_{0_2} = a$

Koordinaten der Hochpunkte der Graphen G_a:

$$f_a'(x) = 1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + (x + a) \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{(a^2 - x^2) - (x + a) \cdot x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - x^2 - x^2 - ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2 - ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f_a'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{a^2 - 2x^2 - ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad (\text{für } x^2 \neq a^2)$$

$0 = 2x^2 + ax - a^2$ bzw. $0 = x^2 + \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{2}$, also

$$x_{E_{1/2}} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{8a^2}{16}} = -\frac{a}{4} \pm \frac{3}{4}a;$$

$x_{E_1} = -a$ (entfällt, da $f_a'(x_{E_1})$ nicht definiert).

Notwendige Bedingung ist nur für $x_{E_2} = \frac{a}{2}$ erfüllt.

Da lt. Aufgabenstellung für G_a genau ein Hochpunkt existiert, muss dieser die Abszisse $x_H = \frac{a}{2}$ besitzen. Mit $f_a'(\frac{a}{2}) = (\frac{a}{2} + a) \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3}{2}a^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2$

folgt $H = (\frac{a}{2} \mid \frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2)$.

Ortskurve der Hochpunkte und deren Gültigkeitsbereich:

Wegen $y = f_a(x) = (x + a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ mit $x_E = \frac{a}{2}$ und $y_E = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2$ folgt $a = 2x_E$ und somit $y_E = \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot 4x_E^2 = 3\sqrt{3}\,x_E^2$.

Ortskurve der Hochpunkte: $y = f_H(x) = 3\sqrt{3}\,x^2$ mit $x > 0$ (wegen $a > 0$)

Maximaler Anstieg des Graphen G_2:

Graph G_2 besitzt im Wendepunkt maximalen Anstieg.

Also: $f_2'(1-\sqrt{3}) = \dfrac{2^2 - 2\cdot(1-\sqrt{3})^2 - 2\cdot(1-\sqrt{3})}{\sqrt{2^2-(1-\sqrt{3})^2}} = \dfrac{-6+6\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$

$$= 6\cdot\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \approx 2{,}36$$

Nachweis für Grenzwert:

$f_2'(x) = \dfrac{4-2x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}}$;

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f_2'(x) = \lim_{\substack{x\to -2+\frac{1}{n}\\ n\to\infty}} f_2'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 - 2\left(-2+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{4-\left(-2+\frac{1}{n}\right)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4-2\left(4-4\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+4-2\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\left(4-4\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-8+8\frac{1}{n}-2\frac{1}{n^2}+4-2\frac{1}{n}}{\sqrt{4-4+4\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6\frac{1}{n}-2\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}\cdot\frac{\sqrt{4\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{4\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(6\frac{1}{n}-2\frac{1}{n^2}\right)\cdot\sqrt{4\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}{4\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\left(6-2\frac{1}{n}\right)\cdot\sqrt{4\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}\cdot\left(4-\frac{1}{n}\right)} = \frac{(6-0)\cdot 0}{4} = 0$$

Weitere Lösungswege:

(1) Anwenden der Regel von L'HOSPITAL:

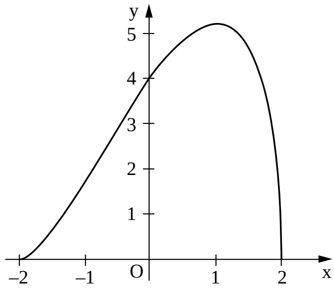
$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{4-2x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{-4x-2}{\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{(-4x-2)\sqrt{4-x^2}}{-x} = \frac{0}{-2} = 0$$

(2) $$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{4-2x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{4-x^2-(x^2+2x)}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \left[\sqrt{4-x^2} - \frac{x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \left[\sqrt{4-x^2} - \frac{x(x+2)\sqrt{4-x^2}}{4-x^2}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \left[\sqrt{4-x^2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2-x}\right] = 0$$

Graph im Definitionsbereich:



b) Tangentengleichung an G_2 im Punkt $P(0|f_2(0))$:

Allgemein $f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$; mit $x_0 = 0$, $y_0 = f_2(0) = 4$ und

$f'(0) = \frac{4 - 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0}{\sqrt{4 - 0}} = 2$ ergibt sich $2 = \frac{y - 4}{x - 0}$, also $y = 2x + 4$.

Gemeinsamer Punkt Q von Tangente und Graph:

Es muss gelten: $y_T = y_{Graph}$,

$$2x + 4 = (x + 2) \cdot \sqrt{4 - x^2} \quad \Rightarrow \quad 2(x + 2) = (x + 2) \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

bzw. $(x + 2)(\sqrt{4 - x^2} - 2) = 0$.

Es gibt zwei Lösungen: $x_{Q_1} = -2$ aus $(x + 2) = 0$

$x_{Q_2} = 0$ aus $2 = \sqrt{4 - x^2}$.

$x_Q = 0$ entfällt, da bereits oben verwendet.

Der gesuchte zweite Schnittpunkt ist $Q(-2|0)$.

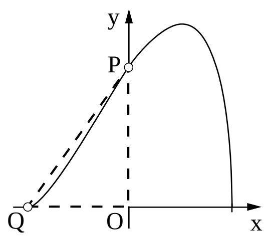
Maßzahl des Flächeninhaltes des Dreiecks OPQ:

Wegen $A = f_2(0) = 4$ ist zu prüfen,

ob $A_\triangle = \frac{1}{2}\,\overline{OQ} \cdot \overline{OP} = 4$.

Es gilt $|\overline{OQ}| = |x_Q| = 2$, $|\overline{OP}| = |y_P| = 4$;

also $A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = f_2(0)$.



c) Maßzahl des Rotationskörpervolumens:

$V_x = \pi \int_0^a f_a^2(x)\,dx$, mit $f_a^2(x) = (x + a)^2 \cdot (a^2 - x^2)$,

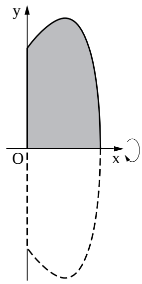
$$V_x = \pi\int_0^a (x^2 + 2ax + a^2)\cdot(a^2 - x^2)\,dx$$

$$V_x = \pi\int_0^a [a^2x^2 + 2a^3x + a^4 - x^4 - 2ax^3 - a^2x^2]\,dx$$

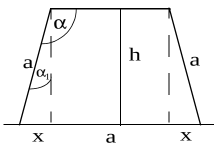
$$V_x = \pi\int_0^a [2a^3x - 2ax^3 + a^4 - x^4]\,dx$$

$$V_x = \pi[a^3x^2 - \tfrac{1}{2}ax^4 + a^4x - \tfrac{1}{5}x^5]\Big|_0^a$$

$$V_x = \pi[a^5 - \tfrac{1}{2}a^5 + a^5 - \tfrac{1}{5}a^5] = \pi a^5\cdot(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{5}) = \tfrac{13}{10}\pi a^5$$



d) Nachweis, dass zur Extremwertberechnung $f_a(x)$ verwendbar:
Ziel ist ein maximaler Querschnitt, d.h.
$A = 2\cdot A_\triangle + A_\square$ mit $A_\triangle = \frac{1}{2}\cdot x\cdot h$, $A_\square = a\cdot h$,
wobei $h = \sqrt{a^2 - x^2}$. Also gilt:
$A = x\cdot\sqrt{a^2 - x^2} + a\cdot\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2}\cdot(x + a) = f_a(x)$



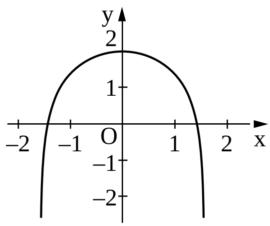
Gradmaß des Winkels α bei maximalem Querschnitt:
Querschnitt maximal bei $A_a'(x) = 0$, d.h. $f_a'(x) = 0$,
also bei $x_E = \frac{a}{2}$ (s. Aufgabenteil a)).
Wegen $\alpha = 90° + \alpha_1$ mit $\sin\alpha_1 = \frac{x_E}{a} = \frac{1}{2}$ und somit $\alpha_1 = 30°$ folgt $\alpha = 120°$.

Bewertungsvorschlag:

a)	Ermitteln des Definitionsbereichs	2 BE
	Berechnen der Nullstellen	2 BE
	Ermitteln der Koordinaten der Hochpunkte	7 BE
	Ermitteln der Gleichung der Ortskurve	3 BE
	Ermitteln des maximalen Anstiegs	3 BE
	Nachweisen des Grenzwerts	4 BE
	Zeichnen des Graphen	4 BE
b)	Nachweisen genau eines weiteren gemeinsamen Punktes Q	6 BE
	Nachweisen der Maßzahl des Flächeninhalts	3 BE
c)	Berechnen der Maßzahl des Volumens	5 BE
d)	Nachweisen der Zielfunktion f_a	3 BE
	Berechnen des Gradmaßes des Winkels	3 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Spiegelsymmetrie des Graphen F zur y-Achse:



$f(x) \;= \ln(\cos x) + 2,$
$f(-x) = \ln(\cos(-x)) + 2$

Wegen $\cos(-x) = \cos x$ gilt:
$f(-x) = \ln(\cos x) + 2$, also
$f(-x) = f(x)$.

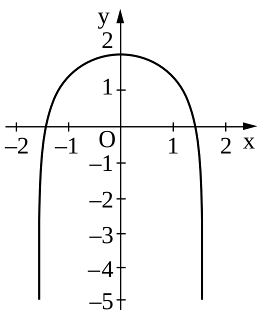
Schnittpunkte des Graphen F mit der x-Achse:
$0 = \ln(\cos x) + 2 \quad \Rightarrow \quad -2 = \ln(\cos x)$, also $e^{-2} = \cos x \quad \Rightarrow$
$x_{0_1} \approx 1{,}44$ und $x_{0_2} \approx -1{,}44$

Extrempunkte von F:
Bedingung: $f'(x) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$;
$0 = -\sin x \quad \Rightarrow$ wegen des Definitionsbereiches ist $x_E = 0$ und $y_E = 2$

Art des Extremums:
$f''(x) = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}$; $f''(0) = -1 < 0$; damit liegt bei $x_E = 0$ ein
Hochpunkt: $H(0|2)$

Existenz von Wendepunkten:
Bedingung: $f''(x) = 0$
$f''(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$: Weil $f''(x) \neq 0$ für alle x, kann F keinen Wendepunkt besitzen.

Graph von $f(x)$:



b) Definitionsbereich für $f_1(x)$:

f_1 ist überall dort definiert, wo $\cos x > 0$, d.h. für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ und alle Intervalle, die um ein Vielfaches der Periodenlänge verschoben sind.

$D_{f1} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

Nullstellen für $f_1(x)$ im Intervall $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi$:

Ausgehend von den Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x_{0_1} \approx -1{,}44$ und $x_{0_2} \approx +1{,}44$, ergeben sich die gesuchten Nullstellen durch Addition einer Periodenlänge 2π, also $x_{0_{11}} \approx 4{,}84$; $\quad x_{0_{12}} \approx 7{,}72$.

c) Näherungsweise Berechnung des Flächeninhalts des Stollenquerschnitts:

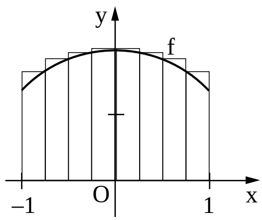
Bei Einteilung in 8 Teilflächen ergibt sich wegen der Symmetrie:

$A \approx 2 \cdot [\frac{1}{4} \cdot f(0) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{3}{4})]$

$A \approx 2 \cdot [\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}9684 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}8694 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}6876]$

$A \approx \frac{1}{2} \cdot [2 + 1{,}968 + 1{,}869 + 1{,}688] \approx 3{,}76$

Der Flächeninhalt ist näherungsweise $3{,}76\ m^2$.



Flächeninhalt unter dem Graphen G:

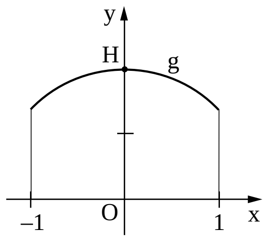
Wegen der Symmetrie auch von $g(x)$ gilt:

$A_1 = 2 \cdot \int_0^1 g(x)\,dx = 2\int_0^1 (\cos\frac{6}{5}x + 1)\,dx$

$A_1 = 2[\frac{5}{6}\sin(\frac{6}{5}x) + x]\Big|_0^1$

$A_1 = 2\{\frac{5}{6}\sin(\frac{6}{5}) + 1\} \approx 3{,}55$

Diese Näherung liefert für den Flächeninhalt des Stollenquerschnitts den Wert $A_1 \approx 3{,}55\ m^2$.



Quadratische Funktion durch H, $P_1(-1 \mid f(-1))$, $P_2(1 \mid f(1))$:

Es ist bekannt: $H(0 \mid 2)$, $P_1(-1 \mid 1{,}38)$, $P_2(1 \mid 1{,}38)$

Für eine quadratische Funktion gilt allgemein: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Wegen der Symmetrie von Q muss $b = 0$, wegen $H(0 \mid 2)$ muss $c = 2$ sein.

Also ergibt sich a aus der Bedingung z.B. für P_1: $1{,}38 = a \cdot 1^2 + 2 \Rightarrow a = -0{,}62$

Funktionsgleichung der quadratischen Funktion: $y = f(x) = -0{,}62x^2 + 2$

d) Nachweis des Extrempunktes:

$h'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin x) - 2\sin x = (\frac{-1}{\cos x} - 2) \cdot \sin x$

Wegen $h'(x) = 0$ ergibt sich $x_{E_1} = 0$ aus $\sin x = 0$ und

$x_{E_2} \approx 2{,}09$ aus $\frac{-1}{\cos x} - 2 = 0$

x_{E_2} entfällt, weil $x_{E_2} \notin D_h$.

$h''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - 2\cos x$; $h''(0) = -1 - 2 < 0$ $\Rightarrow$ Bei $x_E = 0$ befindet sich der einzige Extrempunkt von H, ein Hochpunkt $H(0|2)$ wie bei F.

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweisen der Symmetrie	3 BE
	Ermitteln der Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse	4 BE
	Ermitteln der Koordinaten des Extrempunktes	7 BE
	Untersuchen auf Wendepunkte	2 BE
	Zeichnen des Graphen	4 BE
b)	Ermitteln der Nullstellen	2 BE
	Ermitteln des Definitionsbereichs	4 BE
c)	Berechnen des Inhalts der Querschnittsfläche	5 BE
	Berechnen des Flächeninhalts mithilfe von G	4 BE
	Ermitteln einer Gleichung der quadratischen Funktion	3 BE
d)	Nachweis des Extrempunktes von H	7 BE
		45 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Mittelpunkt und Radius der Kugel:

Es gilt: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$, wobei $\vec{m}$ der Ortsvektor zum Mittelpunkt und r der Radius der Kugel ist.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -5$$

$$x_1^2 + 2x_1 + 1 - 1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 - 4 + x_3^2 - 6x_3 + 9 - 9 = -5$$

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 = -5 + 9 + 4 + 1 = 9$$

Also: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^2 = 3^2$ Die Kugel hat den Mittelpunkt $M(-1|2|3)$ und den Radius $r = 3$.

Länge der Strecke $\overline{PQ}$:

P und Q sind die gemeinsamen Punkte von Kugel K und Gerade g, d.h., es gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} 6-5t \\ 4-t \\ -1+2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 3^2, \quad \text{also:}$$

$$\begin{aligned}
(6-5t+1)^2 + (4-t-2)^2 + (-1+2t-3)^2 &= 9 \\
(7-5t)^2 + (2-t)^2 + (-4+2t)^2 &= 9 \\
49 - 70t + 25t^2 + 4 - 4t + t^2 + 16 - 16t + 4t^2 &= 9
\end{aligned}$$

$30t^2 - 90t + 60 = 0$, also $\quad t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2$

Für die Punkte P und Q folgt demnach:

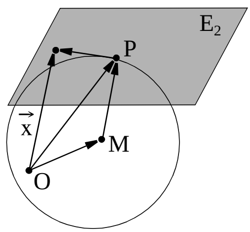
$P(6+(-5) \mid 4+(-1) \mid -1+2) = P(1 \mid 3 \mid 1)$

$Q(6+2\cdot(-5) \mid 4+2\cdot(-1) \mid -1+2\cdot 2) = Q(-4 \mid 2 \mid 3)$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(1-(-4))^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}$$

b) Tangentialebene E_2 an Kugel K im Punkt P:

Wegen der Orthogonalität der Vektoren $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$ und $\overrightarrow{PX} = (\vec{x} - \overrightarrow{OP})$ gilt $\quad (\vec{x} - \overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) = 0, \quad$ d.h.:



$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$(x_1 - 1)\cdot 2 + (x_2 - 3)\cdot 1 + (x_3 - 1)\cdot(-2) = 0$

$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2 - 3 + 2 = 0$

$E_2: \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$

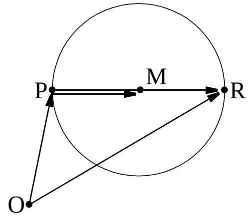
Tangentialebene E_3 parallel zu E_2, Berührungspunkt R mit Kugel K:

Berührungspunkt R der Ebene E_3 mit der Kugel K ergibt sich als

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{MP}, \quad$ also

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.}$$

$R(-3 \mid 1 \mid 5)$.



Für die Tangentialebene E_3 gilt dann analog zu oben:

$(\vec{x} - \overrightarrow{OR}) \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OM}) = 0$, wobei $(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OM}) = -(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

also $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0. \quad \Rightarrow$

$(x_1 + 3) \cdot (-2) + (x_2 - 1) \cdot (-1) + (x_3 - 5) \cdot 2 = -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 6 + 1 - 10 = 0$

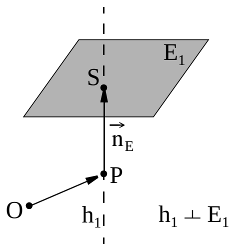
E_3: $\quad -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 15 = 0 \quad$ (oder $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -15$)

Abstand d zwischen den Ebenen E_1 und E_2:

Da beide Ebenen denselben Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ besitzen, sind E_1 und E_2 zueinander parallel, d.h., der Abstand beider Ebenen ist gleichbedeutend mit dem Abstand des Punktes P von der Ebene E_1.

Eine zu E_1 senkrechte Hilfsgerade h_1 durch P mit dem Normalenvektor $\vec{n}_E$ der Ebene schneidet die Ebene E_1 in S. Die Länge der Strecke $\overline{PS}$ ist dann der Abstand beider Ebenen. Für die Hilfsgerade h_1 ergibt sich:

h_1: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



Der Schnittpunkt S zwischen Gerade h_1 und Ebene E_1 ergibt sich aus:

$2(1 + 2s) + (3 + s) - 2(1 - 2s) = -1{,}5;$

$2 + 4s + 3 + s - 2 + 4s = -1{,}5 \quad \Rightarrow \; 9s = -4{,}5, \quad$ also $s = -0{,}5$

$\Rightarrow \quad S(1 + (-\tfrac{1}{2}) \cdot 2 \mid 3 + (-\tfrac{1}{2}) \cdot 1 \mid 1 + (-\tfrac{1}{2}) \cdot (-2)) = S(0 \mid 2{,}5 \mid 2)$

Der Abstand beider Ebenen ist dann der Abstand der Punkte P und S, also

$d = |\overline{PS}| = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2{,}5 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 0{,}25 + 1} = 1{,}5$

Weiterer Lösungsweg:

HESSEsche Normalform der Gleichung von E_1:

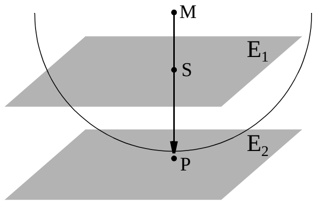
E_1: $\quad \dfrac{2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1{,}5}{3} = 0$

$d(P; E_1) = \dfrac{2 + 3 - 2 + 1{,}5}{3} = 1{,}5$

Nachweis, dass Ebene E_1 die Kugel schneidet:
Da der Kugelradius r = 3 und der Abstand zwischen Tangentialebene E_2 und paralleler Ebene E_1 d = 1,5 ist, muss nur noch geprüft werden, ob der Punkt S auf der Strecke $\overline{PM}$ liegt, d.h., ob $\overrightarrow{MS} = k \cdot \overrightarrow{MP}$ mit k < 1 gilt.

$$\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 2{,}5-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = \tfrac{1}{2} < 1$$



Die Ebene E_1 schneidet also die Kugel K.

Weiterer Lösungsweg:
Man ermittelt mit obiger HESSEscher Normalform der Gleichung von E_1 den Abstand des Kugelmittelpunktes von E_1:

$$d(M; E_1) = \frac{-2+2-6+1{,}5}{3} = -1{,}5$$

(Das negative Vorzeichen sagt lediglich aus, dass sich P und M auf verschiedenen Seiten von E_1 befinden bzw. wo M bezüglich der Richtung des Normalenvektors von E_1 liegt. Für den Abstand ist der Betrag von d – also 1,5 < 3 – wesentlich.)

c) Ortsgerade h der Mittelpunkte der Kugelschar:

$$K_a: \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}\right]^2 = 9, \; a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \; M_a(1-a \mid a \mid 1+a),$$

d.h., für die Gerade h gilt: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$

Mittelpunkt M_a mit minimalem Abstand zur x_1-Achse:
Wie aus der Zeichnung auf dem Aufgabenblatt ersichtlich ist, muss zweimal die Orthogonalitätsbedingung angewendet werden. Für den Punkt A auf der x_1-Achse mit minimalem Abstand zur Geraden h gilt mit den Richtungsvektoren $\vec{a}_{x1}$ der x_1-Achse und $\vec{a}_h$ der Geraden h:

(1) $A(x_A \mid 0 \mid 0)$

(2) $\vec{a}_{x_1} \cdot \overrightarrow{AM_a} = 0$, d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a-x_A \\ a \\ 1+a \end{pmatrix} = 0.$

(3) $\vec{a}_h \cdot \overrightarrow{M_a A} = 0$, d.h. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A - (1-a) \\ -a \\ -(1+a) \end{pmatrix} = 0.$

Daraus folgt:

$(1 - a - x_A) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = 1 - a$ und $(-1)(x_A - 1 + a) + (-a) + [-(1 + a)] = 0.$

$x_A = 1 - a$ eingesetzt ergibt:

$(-1)(1 - a - 1 + a) + (-a) + [-(1 + a)] = 0$, also $(-a) - 1 - a = 0$ und damit $a = -\frac{1}{2}$.

Die Koordinaten der Punkte A und M_a sind dann:

$A(1{,}5 \mid 0 \mid 0)$, $M_{-\frac{1}{2}}(1{,}5 \mid -0{,}5 \mid 0{,}5)$

Bewertungsvorschlag

a)	Ermitteln von M und r	3 BE
	Berechnen der Länge der Strecke $\overline{PQ}$	5 BE
b)	Aufstellen einer Gleichung für F_2	3 BE
	Berechnen der Koordinaten des Berührungspunkts R	2 BE
	Angeben einer Gleichung für E_3	2 BE
	Berechnen des Abstands	4 BE
	Nachweisen, dass E_1 die Kugel schneidet	3 BE
c)	Angeben einer Gleichung für h	2 BE
	Berechnen des Mittelpunkts M_a	6 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) Gerade g_2 durch Punkte A und B parallel zu g_1:

Die Gerade g_2 durch A und B ist echt parallel zu g_1, wenn die Richtungsvektoren beider Geraden linear abhängig sind und wenn ein Punkt von g_2 nicht auch Punkt von g_1 ist.

Für g_2 müssen also z.B. folgende Bedingungen erfüllt sein:

(1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ 10-5 \\ 4-4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ – wahre Aussage für k = 1.

(2) Wenn $A \notin g_1$, so müsste gelten: $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

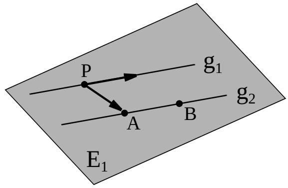
Da es kein t gibt, welches alle drei Gleichungen erfüllt ($t_1 = -1$, $t_2 = -1$, t_3 n. def.), gilt $A \notin g_1$.

Aus (1) und (2) folgt: $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$

Gerade g_1 liegt in der x_1-x_2-Ebene:

Weil die x_3-Komponente für einen beliebigen Punkt der Geraden g_1 und auch die x_3-Komponente des Richtungsvektors stets 0 ist, liegt die Gerade g_1 in der x_1-x_2-Ebene.

b) Ebene E_1, in der die Geraden g_1 und g_2 liegen:



Für die Ebene E_1 sind wegen der Parallelität von g_1 und g_2 die beiden Richtungsvektoren als Spannvektoren nicht geeignet. Es könnten ein

Richtungsvektor $\vec{a} = \vec{a}_{g_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

ein Vektor $\vec{b} = \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 5-7 \\ 5-10 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ genutzt werden.

Einen dazu senkrechten Vektor $\vec{n}_E$ erhält man aus $\vec{n}_E \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n}_E \cdot \vec{b} = 0$, woraus folgt:

(I) $\quad 2n_1 + 5n_2 = 0$

(II) $\; -2n_1 - 5n_2 + 4n_3 = 0$ mit den Lösungen $n_3 = 0$; (z.B.) $n_1 = 20$

$n_2 = 8$

Anderer Lösungsweg:

$\vec{n}_{E_1} = \vec{a} \times \vec{b}$, d.h. $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit ist eine Gleichung der Ebene E_1

$\vec{n}_E \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$, also $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 5 \cdot (x_1 - 5) + (-2) \cdot (x_2 - 5) + 0(x_3 - 4) &= 0, \\ 5x_1 - 2x_2 - 25 + 10 &= 0, \\ 5x_1 - 2x_2 &= 15 \end{aligned}$$

Orthogonalität der Ebene E_1 zur x_1-x_2-Ebene:

Normalenvektor der x_1-x_2-Ebene ist der Richtungsvektor der x_3-Achse: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n_{E_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor von E_1.

Diese zwei Normalenvektoren sind wegen

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 0$ orthogonal zueinander, also stehen auch die Ebene E_1 und die x_1-x_2-Ebene senkrecht zueinander.

Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABS:

$$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(5-5)^2 + (7{,}9-5)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{12{,}41}\,,$$

$$|\overrightarrow{BS}| = \sqrt{(5-7)^2 + (7{,}9-10)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{12{,}41}\,,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-5)^2 + (10-5)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{29}$$

Wegen $|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}|$ besitzt das Dreieck ABS zwei gleich lange Seiten, ist also gleichschenklig.

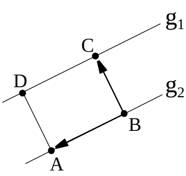
Flächeninhalt des Dreiecks ABS:

$$A_\triangle = \tfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}|$$

$$A_\triangle = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ \frac{29}{5} \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{10^2 + (-4)^2 + (\tfrac{29}{5})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{149{,}64} \approx 6{,}12$$

d) Koordinaten der Punkte C und D:
Die zwei Punkte C und D liegen auf der Geraden g_1, so dass gilt:
$C(7 + 2t_1 \mid 10 + 5t_1 \mid 0)$, $D(7 + 2t_2 \mid 10 + 5t_2 \mid 0)$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
Die Punkte A und B liegen auf der Geraden g_2;
g_1 und g_2 sind zueinander parallel.
Der Punkt C muss weiterhin folgender Bedingung genügen:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 + 2t_1 - 7 \\ 10 + 5t_1 - 10 \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = 0$$



$2 \cdot 2 \cdot t_1 + 5 \cdot 5 \cdot t_1 = 0$, also $29t_1 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 0 \;\Rightarrow C(7 \mid 10 \mid 0)$

Aus C erhält man D mit $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$,

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7-7 \\ 10-10 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(5 \mid 5 \mid 0)$$

Weiterer Lösungsweg:

g_1 mit den (gesuchten) Punkten C und D liegt in der x_1-x_2-Ebene. Da ABCD ein Rechteck sein soll, müssen die Punkte D und C aus A bzw. B durch senkrechte Parallelprojektion in die x_1-x_2-Ebene hervorgehen. Die x_1- und die x_2-Koordinaten bleiben dabei unverändert. Also: $D(5|\,5|\,0)$, $C(7|\,10|\,0)$

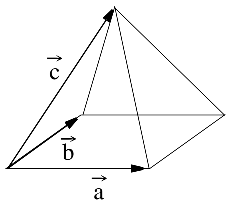
Volumen der Pyramide ABCDS:

Für ein Pyramidenvolumen gilt $V = \frac{1}{3}\left|(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}\right|$, wobei $\vec{a}, \vec{b}$ Spannvektoren der parallelogrammförmigen Grundfläche und $\vec{c}$ ein Seitenkantenvektor sind.

$V = \frac{1}{3}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AS}\right|$,

$V = \frac{1}{3}\left|\left[\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\2{,}9\\2\end{pmatrix}\right|$

$V = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}-20\\8\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2{,}9\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}0\\23{,}2\\0\end{pmatrix}\right| \approx 7{,}73$



Weiterer Lösungsweg:

$V = \frac{1}{3}A_G\cdot h$ mit $A_G = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}| = 4\sqrt{29}$

$h = d(S; E_1) = \frac{1}{5}\sqrt{29}$

(Durch Einsetzen der Koordinaten von S in die aus der HESSEschen Normalform gewonnene Abstandsformel $d = \frac{5x_1 - 2x_2 - 15}{\sqrt{29}}$.)

Spitzen S_1, S_2 zweier gerader Pyramiden mit Volumen von ABCDS:

Die Punkte S_1 bzw. S_2 müssen senkrecht über dem Mittelpunkt M des Rechtecks ABCD liegen. Es gilt

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7{,}5\\2\end{pmatrix}$$

Für die Punkte S_1 bzw. S_2 gilt weiterhin

$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OM} + h_{ABCDS}\cdot\frac{1}{\left|\vec{n}_{E_{ABCD}}\right|}\cdot\vec{n}_{E_{ABCD}}$ $\quad (h\in\mathbb{R})$ mit

$M(6|\,7{,}5|\,2)$, $\quad \vec{n}_{E_{ABCD}} = \begin{pmatrix}-20\\8\\0\end{pmatrix}$, $\quad \left|\vec{n}_{E_{ABCD}}\right| = 4\sqrt{29} = A_G$.

$h_{ABCDS} = \frac{3V}{A_G} = \frac{3\frac{23,2}{3}}{4\sqrt{29}}$ (volumengleiche Pyramiden haben bei gleicher Grundfläche die gleiche Höhe)

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{23,2}{4\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{23,2}{116} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7,9 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$S_1(5 \mid 7,9 \mid 2)$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OM} - h_{ABCDS} \cdot \frac{1}{\left|\vec{n}_{E_{ABCD}}\right|} \cdot \vec{n}_{E_{ABCD}}$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{23,2}{116} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7,1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_2(7 \mid 7,1 \mid 2)$$

Bewertungsvorschlag:

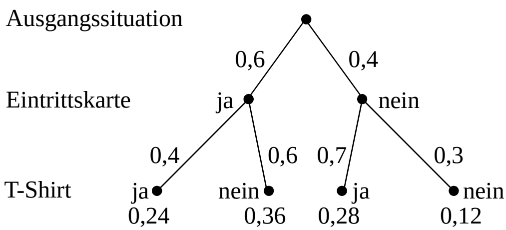
a)	Nachweisen der Lage von g_1	5 BE
b)	Aufstellen der Ebenengleichung	5 BE
	Nachweisen der Orthogonalität der Ebenen	2 BE
c)	Nachweisen der Gleichschenkligkeit von ΔABC	2 BE
	Berechnen des Flächeninhalts	3 BE
d)	Ermitteln der Koordinaten von C und D	2 BE
	Berechnen des Volumens	5 BE
	Berechnen der Punkte S_1, S_2	6 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.1

a) Wahrscheinlichkeit, mit der der Schüler eine Eintrittskarte kauft:

Veranschaulichung der Bedingung mit Hilfe eines Baumdiagramms:

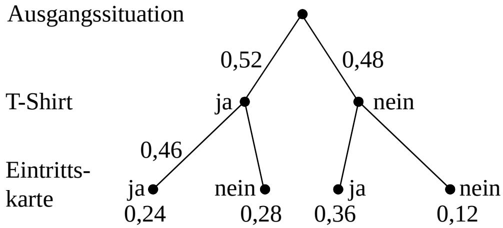
E: „Schüler kauft eine Eintrittskarte“
T: „Schüler kauft ein T-Shirt“



$P(E) = 0,6$; $P(E) = 0,4$

$P_E(T) = 0,4$; $P_{\bar{E}}(T) = 0,7$

Durch Vertauschen der ersten und zweiten Stufe ergibt sich:



$P_T(E) + P_T(\overline{E}) =$
$= 0{,}24 + 0{,}28 = 0{,}52$

$P_{\overline{T}}(E) + P_{\overline{T}}(\overline{E}) =$
$= 0{,}36 + 0{,}12 = 0{,}48$

$P_T(E) = P(T \cap E) : P(T)$
$\quad = 0{,}24 : 0{,}52 \approx 0{,}46$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 46 % besitzt der Schüler mit T-Shirt auch eine Eintrittskarte.

Weiterer Lösungsweg:

Anwendung der BAYESschen Formel:

$$P_T(E) = \frac{P_E(T) \cdot P(E)}{P_E(T) \cdot P(E) + P_{\overline{E}}(T) \cdot P(\overline{E})}$$

b) Normalverteilung der Zufallsgröße X:

Für die Zufallsgröße X gilt: $n = 500$, $p = 0{,}6$;

folglich ist die Streuung $n \cdot p \cdot (1 - p) = 120 > 9$ und somit ist eine Approximation der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung möglich.

Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 310 Karten verkauft werden:

$P(X \geq 310) = 1 - P(X \leq 309)$;

$$P(X \leq 309) \approx \Phi\left(\frac{309 + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{309 + 0{,}5 - 300}{\sqrt{120}}\right)$$

$$\approx \Phi(0{,}8672) \approx 0{,}8078 \text{ (lt. Tabelle)}$$

Folglich ist $P(X \geq 310) \approx 1 - 0{,}8078 \approx 0{,}192$, d.h. etwa 19 %.

c) Notwendige Anzahl Lehrerkarten zur Finanzierung:

Gesicherte Finanzierung bei mindestens 310 verkauften Karten soll mit mindestens 70%iger Wahrscheinlichkeit eintreten:

Wegen $P(X \geq 310) = 1 - P(X \leq 309) \geq 0{,}7$ und der Approximation durch eine Normalverteilung ergibt sich

$$1 - \Phi\left(\frac{309 + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right) \geq 0{,}7, \quad \text{d.h. mit } p = 0{,}6\text{:} \quad 1 - \Phi\left(\frac{309 + 0{,}5 - n \cdot 0{,}6}{\sqrt{n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \geq 0{,}7.$$

Wegen $\Phi(-X) = 1 - \Phi(X)$ gilt mit $\Phi(X) \leq 0{,}3$ auch

$\Phi(-X) \geq 0{,}7$ und damit lt. Tabelle $\quad -(\frac{309 + 0{,}5 - n \cdot 0{,}6}{\sqrt{n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \geq 0{,}53.$

Daraus folgt:

$-309{,}5 + 0{,}6n - 0{,}53\sqrt{0{,}24n} \geq 0$

$n - 0{,}4327\sqrt{n} - 515{,}83 \qquad \geq 0$

Substitution: $\sqrt{n} = z$ liefert $\quad n \geq 525{,}75, \quad$ d.h. $\quad n \geq 526.$

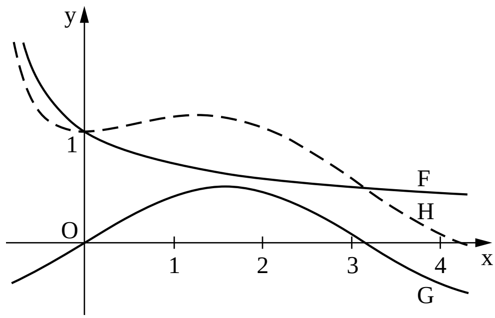
Weil von 500 Schülern auszugehen ist, müssen mindestens 26 Lehrern Eintrittskarten angeboten werden.

Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnen der bedingten Wahrscheinlichkeit	6 BE
b)	Nachweisen der Normalverteilung	2 BE
	Berechnen der Wahrscheinlichkeit	7 BE
c)	Berechnen der Mindestanzahl	10 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.2

a) Graph H von h(x) im Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 4$



b) Beweis mittels vollständiger Induktion:

(I) Induktionsanfang:

Für n = 1 gilt nach der behaupteten Formel

$f(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-1)\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{3}{2}}$

Aus $f(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$ folgt nach den Differentiationsregeln ebenfalls:

$f'(x) = -\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(II) Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung:
  Für ein beliebiges, aber festes k gilt
  $$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2k-1)}{2^k}(x+1)^{-\frac{2k+1}{2}}$$
- Induktionsbehauptung:
  Dann gilt auch für den Nachfolger von k
  $$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2(k+1)-1)}{2^{k+1}}(x+1)^{-\frac{2(k+1)+1}{2}} \quad \text{d.h.}$$
  $$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2^{k+1}}(x+1)^{-\frac{2k+3}{2}} \qquad (*)$$
- Induktionsbeweis:
  Für die Ableitung von $f^{(k)}(x)$ gilt:
  $$f^{(k+1)}(x) = \left[(-1)^k \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k}(x+1)^{-\frac{2k+1}{2}}\right]'$$
  $$= (-1)^k \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k}(x+1)^{-\frac{2k+1}{2}-1} \cdot \left(-\frac{2k+1}{2}\right)$$
  $$= (-1)^{(k+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2^{k+1}}(x+1)^{-\frac{2k+3}{2}} \quad (**)$$

(*) und (**) stimmen überein:

Wie die k-te Ableitung lässt sich analog auch die (k + 1)-te Ableitung bilden.

Wegen der in (I) und (II) gefundenen Beweise ist die angegebene Formel für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ bewiesen.

c) Approximation der Funktion h(x) durch eine ganzrationale Funktion:

Allgemein lässt sich eine ganzrationale Funktion dritten Grades in folgender Form schreiben:

$$y = p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$p''(x) = 6ax + 2b,$$
$$p'''(x) = 6a$$

Für diese Funktion p(x) sollen folgende Bedingungen gelten:

(1) $p(0) = h(0)$ und $h(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

(2) $p'(0) = h'(0)$ und $h'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 3a0^2 + 2b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$

(3) $p''(0) = h''(0)$ und $h''(0) = \frac{3}{4}$, also $\frac{3}{4} = 6a \cdot 0 + 2b \Rightarrow \quad b = \frac{3}{8}$

(4) $p'''(0) = h'''(0) \Rightarrow h'''(0) = -\frac{19}{8}$, also $-\frac{19}{8} = 6a \Rightarrow a = -\frac{19}{48}$

Für die Funktion dritten Grades ergibt sich folglich:
$p(x) = -\frac{19}{48}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + 1$

Nachweis, dass h kein bestimmtes Integral besitzt:
Da die untere Intervallgrenze nicht zum DB von h(x) gehört, existiert das bestimmte Integral nicht.

Uneigentliches Integral $\int_{-1}^{0} h(x)\,dx$:

Es gilt $\int h(x)\,dx = \int [(x+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sin x]\,dx$
$= 2\,(x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos x + c.$

Für das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} [2 \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos x]\Big|_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \quad \text{ergibt sich}$$

$$\lim_{n \to \infty} [2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - (2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos(-1 + \frac{1}{n}))] = \lim_{n \to \infty} [\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\cos(-1 + \frac{1}{n})]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(-1) \approx 1{,}77$$

Da der Grenzwert existiert, existiert auch das uneigentliche Integral.

Weitere mögliche Schreibweise:

$$\int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -1 \\ a > -1}} \int_{a}^{0} h(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -1 \\ a > -1}} [2\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\cos x]\Big|_{a}^{0}$$

$$= \lim_{\substack{a \to -1 \\ a > -1}} (2 - \frac{1}{2} - 2\sqrt{a+1} + \frac{1}{2}\cos a) = \lim_{\substack{a \to -1 \\ a > -1}} (1{,}5 - 2\sqrt{a+1} + \frac{1}{2}\cos a)$$

$$= 1{,}5 + \frac{1}{2}\cos(-1) \approx 1{,}77$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Zeichnen des Graphen	3 BE
b)	Beweisen mittels vollständiger Induktion	7 BE
c)	Ermitteln einer Gleichung für die Funktion p	8 BE
d)	Begründen und Berechnen des uneigentlichen Integrals	7 BE
		25 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3.3

a) Parabelgleichung:

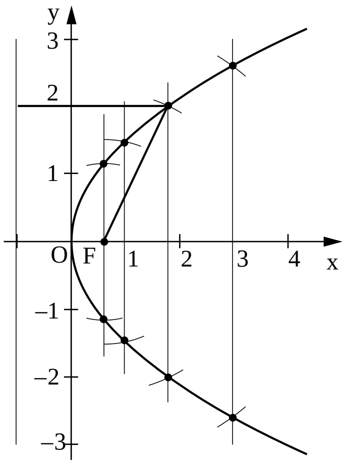
Scheitelpunkt $S(0 \mid 0)$; $y^2 = 2px$; wegen P als Parabelpunkt ergibt sich für p

$4^2 = 2 \cdot p \cdot 7 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{16}{14} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{16}{7}\,x$

Brennpunkt der Parabel:

$F(\frac{p}{2} \mid 0) = F(\frac{4}{7} \mid 0)$

Parabelkonstruktion:



Tangentenkonstruktion:

- Durch den gegebenen Parabelpunkt P wird eine Parallele zur Symmetrieachse der Parabel gezeichnet. Q sei ein beliebiger Punkt im Inneren der Parabel.
- Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle FPQ$ ist die Senkrechte zur Parabeltangente in P.

b) Koordinaten der Berührungspunkte B_1 und B_2:

Es gilt für eine Parabeltangente mit $S(0 \mid 0)$ lt. Tafelwerk $y \cdot y_B = p \cdot (x + x_B)$.

Mit $Q(-3{,}5 \mid 1)$ und $p = \frac{16}{14}$ erhält man daraus:

(I) $y_B = \frac{8}{7} \cdot (-3{,}5 + x_B) = -4 + \frac{8}{7}\,x_B$.

Für die Berührungspunkte B_1 bzw. B_2 gilt weiterhin:

(II) $y_B{}^2 = \frac{16}{7}\,x_B$

Aus den Bedingungen (I) und (II) folgt:

$(-4 + \frac{8}{7}x_B)^2 = \frac{16}{7}x_B$ bzw.

$16 - \frac{64}{7}x_B + \frac{64}{49}x_B^2 - \frac{16}{7}x_B = \frac{64}{49}x_B^2 - \frac{80}{7}x_B + 16 = 0,$ also

$x_B^2 - 8{,}75x_B + 12{,}25 = 0 \Rightarrow x_{B_1} = 7$ bzw. $x_{B_2} = 1{,}75.$

Für die Punkte B_1 und B_2 ergibt sich:

$B_1(7 \mid 4)$ und $B_2(1{,}75 \mid -2)$

c) Allgemeingültigkeit einer Aussage:

Richtigkeit der Aussage am Beispiel von Q, B_1, B_2:

Wegen $y_Q = 1$ und $M(\frac{7+1{,}75}{2} \mid \frac{4+(-2)}{2})$ mit $y_M = 1$ ist die Aussage im Beispielfall wahr.

Allgemein gilt für die Tangenten durch $Q(x_Q \mid y_Q)$ an die Parabel:

$y_Q \cdot y_B = p(x_Q + x_B)$ und $y_B^2 = 2px_B$, d.h. $y_Qy_B - px_Q = px_B$;

für px_B eingesetzt in $y_B^2 = 2px_B$ ergibt

$y_B^2 - 2y_Qy_B + 2px_Q = 0$ und damit $y_{B_{1/2}} = y_Q \pm \sqrt{y_Q^2 - 2px_Q}$

Da der Mittelpunkt der Strecke $\overline{B_1B_2}$ zu betrachten ist, heißt das für y_M:

$y_M = \frac{1}{2}[y_Q + \sqrt{y_Q^2 - 2px_Q} + y_Q - \sqrt{y_Q^2 - 2px_Q}]$

$y_M = \frac{1}{2}[2y_Q] = y_Q$

Bewertungsvorschlag:

a)	Angeben einer Parabelgleichung und der Koordinaten von F	3 BE
	Konstruieren von Parabelpunkten; Zeichnen der Parabel	4 BE
	Angeben einer Konstruktionsbeschreibung	4 BE
b)	Berechnen der Koordinaten der Berührungspunkte	7 BE
c)	Überprüfen der Richtigkeit der Aussage bez. M_a/Q_a	2 BE
	Nachweisen der Allgemeingültigkeit der Aussage	5 BE
		25 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1998 / 99

Gymnasium

Thüringen

Hinweis:
Die Prüfungsteilnehmer hatten von den Aufgaben 1.1 und 1.2 ***eine*** *und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3* ***zwei*** *zur Bearbeitung auszuwählen.*

Aufgabe 1.1

Für jede reelle Zahl a mit $a \geq 1$ ist eine Funktion f_a gegeben durch
$y = f_a(x) = a + \sin ax \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Wie muss der Parameter a gewählt werden, damit die Funktion f_a Nullstellen besitzt?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

b) Bestimmen Sie für die Funktion f_a alle möglichen Extremstellen!
Weisen Sie nur für die kleinste positive Extremstelle x_E die Art des Extremums nach!
Berechnen Sie für diese Stelle x_E den Funktionswert $f_a(x_E)$!
Die Punkte $E(x_E; f_a(x_E))$ liegen auf einer Kurve.
Geben Sie deren Gleichung an!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 8)

c) Die Tangente an den Graphen f_a im Punkt $(0; f_a(0))$ schneidet die x-Achse in einem Punkt S.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die (2n)-te Ableitung der Funktion f_a gilt:
$f_a^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin ax \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

e) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_3 im Intervall $0 \leq x \leq 7$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Begründen Sie, dass die Graphen der Funktionen f_1 und f_3 im angegebenen Intervall nur genau einen Punkt $B(x_B; 2)$ gemeinsam haben!
Die y-Achse und diese beiden Graphen begrenzen im angegebenen Intervall ein Flächenstück vollständig.
Berechnen Sie dessen Inhalt!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 7)

f) Gegeben sei die Folge (c_i) mit $i = 1; 2; 3; \ldots$, wobei c_i der Wert der i-ten Ableitung der Funktion f_1 an der Stelle $x = 0$ ist.
Geben Sie die ersten fünf Glieder der Folge (c_i) an!
Es sei (s_i) die zugehörige Partialsummenfolge mit $s_i = c_1 + c_2 + \ldots + c_i$.
Geben Sie die ersten fünf Glieder der Partialsummenfolge (s_i) an!
Wie groß ist s_{1999}?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

g) Gegeben ist eine Funktion g durch $y = g(x) = 1 + \sqrt{3} \cdot \cos x$.
Berechnen Sie alle Schnittpunkte der Graphen von f_1 und g im Intervall $0 \le x \le 2\pi$!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe 1.2

Für jede natürliche Zahl a mit a > 1 ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x^a}{x^2 - 4} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq -2,\ x \neq 2).$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f_a auf Nullstellen, Polstellen und den Graphen von f_a auf Symmetrie in Abhängigkeit von a!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

b) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung f_a' gilt:

$$y = f_a'(x) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x^{a-1}((a-2) \cdot x^2 - 4a)}{(x^2 - 4)^2}$$

Ermitteln Sie die Nullstellen von f_a' in Abhängigkeit von a!
Berechnen Sie für a = 3 die Koordinaten der zugehörigen Punkte des Graphen von f_3!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 7)

c) Außer an den Polstellen besitzt der Graph von f_3 eine weitere Asymptote.
Geben Sie für jede Asymptote deren Gleichung an!
Skizzieren Sie die Asymptoten und den Graphen von f_3 im Intervall $-6 \le x \le 6$ in ein Koordinatensystem!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 5)

d) Begründen Sie unter Verwendung der Asymptoten, dass der Punkt $(2\sqrt{3}\,;\ \frac{1}{2}\sqrt{3})$ ein lokaler Minimumpunkt des Graphen von f_3 ist!
Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaft von f_3, um die Art des zweiten Extrempunktes zu begründen!
Begründen Sie außerdem, dass der Punkt (0; 0) der Wendepunkt des Graphen von f_3 ist!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

e) Für welche reelle Zahl b ist die Funktion
F_3 mit $F_3(x) = bx^2 + \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2 - 4)$ für $x > 2$ eine Stammfunktion von f_3?

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

f) Der Graph von f_3 und die Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{1}{6}x$, $x = 4$ und $x = 6$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Inhalt!

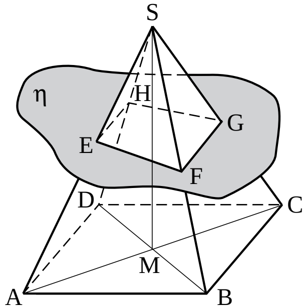
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

g) Auf dem Graphen von f_3 liegt ein Punkt $P(x_p; f_3(x_p))$ mit $x_p > 2$.
Q sei der Fußpunkt des Lotes von P auf der x-Achse.
Die Punkte O(0; 0), Q, P seien die Eckpunkte eines Dreiecks.
Ermitteln Sie x_p für den Fall, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ minimal wird!
(Auf den Nachweis des lokalen und globalen Minimums wird verzichtet.)
Gegen Sie den minimalen Flächeninhalt an!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ABCD durch die Punkte A(3; –2; 1), B(3; 4; –1), C(–1; 4; –1), D(–1; –2; 1) und der Spitze S(1; 4; 9) gegeben.



Skizze nicht maßstäblich

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes M der Diagonalen der Grundfläche!
Weisen sie nach, dass die Pyramide ABCDS gerade ist!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

b) Die Seitenkanten der Pyramide durchstoßen eine Ebene η in den Punkten E, F(2; 4; 4), G(0; 4; 4) und H(0,5; 2,5; 7) (siehe Skizze).
Geben sie eine parameterfreie Gleichung für η an!
Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes E der Kante $\overline{AS}$ mit der Ebene η!
(Kontrollergebnis: z.B. η: $2y + z = 12$)

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

c) Zeigen Sie, dass das Viereck EFGH ein gleichschenkliges Trapez ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

d) Berechnen sie das Volumen der schiefen Pyramide EFGHS!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Ebene ε_t durch die Gleichung
$(11 - 10t) \cdot y + 3 \cdot z = 41 - 10t$ gegeben.

e) Die Menge aller Ebenen ε_t hat eine gemeinsame Schnittgerade g.
Beschreiben Sie die Lage der Ebene ε_t und der Schnittgeraden g im Koordinatensystem!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

f) Ermitteln sie für jede der folgenden Lagebeziehungen alle Werte des Parameters t!
(1) ε_t ist mit η identisch.
(2) ε_t hat mit dem Dreieck BCS gemeinsame Punkte.
(Hinweis: Beachten Sie die besondere Lage des Dreiecks BCS im Koordinatensystem!)

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Aufgabe 2.2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1; 3; 2) und B(3; 5; 10) sowie die Ebenenschar ε_t: $3tx + (t - 3)y + tz = 12t + 1$ $(t \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Die Gerade g, die durch die Punkte A und B verläuft, durchstößt die Ebene ε_1 in einem Punkt D.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D und die Größe des Winkels, unter dem die Gerade g die Ebene ε_1 schneidet!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A', der durch die Spiegelung des Punktes A an der Ebene ε_1 entsteht!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ADA'!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Alle Ebenen der Schar ε_t schneiden sich in einer Geraden s.
Geben Sie eine Gleichung für die Gerade s an!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

e) Gegeben ist eine weitere Gerade h durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Zeigen Sie, dass die Gerade h und die Gerade g (aus Teilaufgabe a)) windschief zueinander verlaufen, und bestimmen Sie den Abstand dieser Geraden!
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte G auf g und H auf h so, dass $\overline{GH}$ der Abstand der Geraden g und h ist!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 6)

Aufgabe 2.3

Ein Unternehmer zahlt einem Taucher der Südsee für jede abgelieferte Muschel 5 Cent (Hinweis: Ein Euro sind 100 Cent.).
Erfahrungsgemäß haben 16 % dieser Muscheln genau eine Perle. Die übrigen haben keine Perle.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Unternehmer für einen Euro, den er einem Taucher zahlt, genau 3 Perlen erhält?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 1)

b) Ein Urlauber kauft dem Unternehmer 5 von 20 Muscheln ab.
Von diesen 20 Muscheln enthalten genau 3 je eine Perle. Dies ergab eine vorangegangene Untersuchung.
Äußerlich sind die Muscheln nicht zu unterscheiden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Urlauber genau 2 Perlen erworben hat?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

c) Wie viele Muscheln muss ein Urlauber von den 20 Muscheln (aus Teilaufgabe b)) mindestens kaufen, damit er mit mehr als 25 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine Perle bekommt?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 2)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Perlen, die der Unternehmer für 5 Euro aus den Muscheln erhält, um mehr als die Hälfte der Standardabweichung von der erwarteten Perlenzahl abweicht?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

e) Auf dem Schreibtisch des Unternehmers liegen gut gemischt Perlen der Größen A und B. Von der Größe A sind genau 3 Stück vorhanden. Der Unternehmer entnimmt 2 Perlen mit einem Griff. Die Wahrscheinlichkeit, jeweils genau eine Perle von beiden Sorten zu erhalten, beträgt $p = \frac{3}{5}$.
Wie viele Perlen der Größe B lagen auf dem Tisch?
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 4)

f) Erfahrungsgemäß entsprechen 2 % der Perlen nicht dem Qualitätsstandard und gelten als fehlerhaft.
Ein vom Unternehmer eingesetztes Prüfverfahren sondert 3 % aller Perlen als fehlerhaft aus.
Bei diesem Prüfverfahren werden von den fehlerfreien Perlen 1,5 % irrtümlich als fehlerhaft ausgesondert.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Aussondern einer fehlerhaften Perle!
(Erreichbare Bewertungseinheiten: 3)

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.1

a) Da $-1 + a \leq a + \sin ax \leq 1 + a$ und für Nullstellen außerdem $a + \sin ax = 0$ gilt, folgt $-1 + a \leq 0 \leq 1 + a$.
Wegen $a \geq 1$ ist diese Gleichung nur für $a = 1$ erfüllt, d.h. nur für $a = 1$ hat eine Funktion $f_a(x) = a + \sin ax$ Nullstellen.

b) $f_a'(x) = a\cos ax$; $f_a''(x) = -a^2 \sin ax$

$f_a'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos ax = 0$

$$ax_{E_k} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Mögliche Extremstellen:

$$x_{E_k} = \frac{\pi}{2a} + \frac{k\cdot\pi}{a}$$

Kleinste positive Extremstelle x_E für $k = 0$:

$x_E = \frac{\pi}{2a}$

$f_a''(\frac{\pi}{2a}) = -a^2 \sin\frac{\pi}{2} = -a^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokales Maximum

$f_a(\frac{\pi}{2a}) = a + \sin\frac{\pi}{2} = a + 1$

$\Rightarrow$ Extrempunkt:

$E(\frac{\pi}{2a}; a + 1)$

Ortskurve der Extrempunkte $E(x_E; f_a(x_E))$:

Aus $x_E = \frac{\pi}{2a}$ folgt $a = \frac{\pi}{2x_E}$. Nach Einsetzen in y_E erhält man $y_E = \frac{\pi}{2x_E} + 1$.
Die Extrempunkte (mit der jeweils kleinsten positiven Extremstelle) liegen alle auf der Kurve $y = \frac{\pi}{2x} + 1$.

c) Gleichung der Tangente:

$m_t = f_a'(0) = a\cos 0 = a$; $f_a(0) = a$

Allgemeine Tangentengleichung:

$y - y_0 = m_t(x - x_0)$

Eingesetzt: $y - a = a(x - 0)$

$y = ax + a$

Schnittpunkte der Tangente mit der x-Achse:

$ax + a = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$; $S(-1; 0)$

d) $f_a^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin ax \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

I. Induktionsanfang $n = 1$: $f_a^{(2)}(x) = (-1)^1 a^2 \sin ax = -a^2 \sin ax = f_a''(x)$ siehe b)

II. Induktionsschluss:

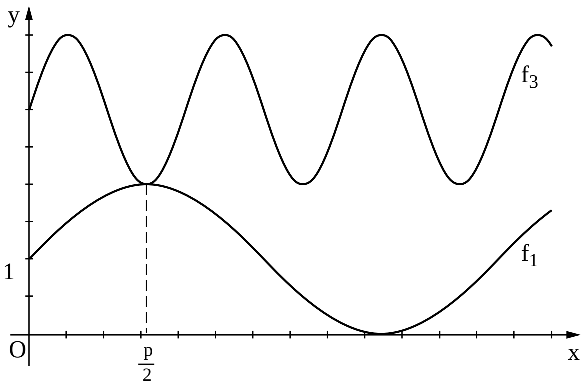
Induktionsvoraussetzung $n = k$: $f_a^{(2k)}(x) = (-1)^k a^{2k} \sin ax$

Induktionsbehauptung $n = k + 1$: $f_a^{(2k+2)}(x) = (-1)^{k+1} a^{2k+2} \sin ax$

Induktionsbeweis:
$$\begin{aligned} f_a^{(2k+2)}(x) &= [f_a^{(2k)}(x)]'' = [(-1)^k a^{2k} \sin ax]'' \\ &= [(-1)^k a^{2k} \cos ax \cdot a]' \\ &= [(-1)^k \cdot a^{2k+1} \cos ax]' \\ &= (-1)^k \cdot a^{2k+1} (-1) \sin ax \cdot a \\ &= (-1)^{k+1} a^{2k+2} \sin ax \end{aligned}$$

Wegen der unter I. und II. geführten Beweise ist die Ausgangsaussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ wahr.

e) $f_1(x) = 1 + \sin x$;
$f_3(x) = 3 + \sin 3x$



Für die Wertebereiche von f_1 und f_3 gilt:

$0 \leq f_1(x) \leq 2$ $\quad$ $2 \leq f_3(x) \leq 3 \quad \Rightarrow$ einziger gemeinsamer Funktionswert ist $y = 2$

$1 + \sin x = 2$	$3 + \sin 3x = 2$
$\sin x = 1$	$\sin 3x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Im vorgegebenen Intervall $0 \leq x \leq 7$ existiert für $k = 0$ eine Lösung:

$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad$ Berührungspunkt $B(\frac{\pi}{2}; 2)$

Flächeninhalt:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f_3(x) - f_1(x)]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x - \sin x + 2)\,dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{3}\cos 3x + \cos x + 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\pi + \cos\tfrac{\pi}{2} + \pi + \tfrac{1}{3} - 1 = \pi - \tfrac{2}{3} \quad \text{(FE)}$$

f) Folge (c_i):

$f_1(x) = 1 + \sin x$

$f_1'(x) = \cos x$	$f_1'(0) = 1 = c_1$	$s_1 = 1$
$f_1''(x) = -\sin x$	$f_1''(0) = 0 = c_2$	$s_2 = 1 + 0 = 1$
$f_1'''(x) = -\cos x$	$f_1'''(0) = -1 = c_3$	$s_3 = 1 - 1 = 0$
$f_1^{(4)}(x) = \sin x$	$f_1^{(4)}(0) = 0 = c_4$	$s_4 = 0 + 0 = 0$
$f_1^{(5)}(x) = \cos x$	$f_1^{(5)}(0) = 1 = c_5$	$s_5 = 0 + 1 = 1$

Da allgemein $s_{4n+1} = 1$, $s_{4n+2} = 1$, $s_{4n+3} = 0$, $s_{4n+4} = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt $s_{1999} = s_{4\cdot 499 + 3} = s_3$, also $s_{1999} = 0$.

g) Für die Schnittstellen der Graphen von g und f_1 gilt:

$1 + \sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x$

$\sqrt{3}\cos x = \sin x \quad |:\cos x \neq 0$

$\tan x = \sqrt{3} \quad \Rightarrow$ für das Intervall $0 \le x \le 2\pi$: $\quad x_1 = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{4}{3}\pi$

Mit $y_1 = 1 + \sin\frac{\pi}{3}$ bzw. $y_2 = 1 + \sin\frac{4}{3}\pi$ ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(\frac{\pi}{3};\, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ und $S_2(\frac{4}{3}\pi;\, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.1	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
30 BE	1 BE	8 BE	3 BE	5 BE	7 BE	3 BE	3 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 1.2

a) Nullstellen: Aus $\frac{1}{2a} \cdot \frac{x^a}{x^2 - 4} = 0$ folgt $x^a = 0$, also $x_0 = 0$.

Polstellen: Aus $2a(x^2 - 4) = 0$ folgen $x_{P_1} = -2$; $x_{P_2} = 2$.

Symmetrie:

$f_a(-x) = \frac{1}{2a}\,\frac{(-x)^a}{(-x)^2 - 4} = \frac{1}{2a}\,\frac{(-x)^a}{x^2 - 4}$

(1) a gerade (a = 2n; n ∈ ℕ): $\frac{1}{2a}\frac{x^a}{x^2-4} = f_a(x) \Rightarrow$ axialsymmetrisch bez. y-Achse

(2) a ungerade (a = 2n + 1; n ∈ ℕ): $\frac{1}{2a}\frac{-x^a}{x^2-4} = -f_a(x) \Rightarrow$ punktsymm. bez. Koordinatenurspr.

b) $f_a'(x) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{ax^{a-1}(x^2-4)-x^a-2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x^{a-1}(ax^2-4a)-2x^{a+1}}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{1}{2a}\cdot\frac{x^{a-1}(ax^2-4a-2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x^{a-1}[(a-2)x^2-4a]}{(x^2-4)^2}$

$f_a'(x) = 0$:

(1) $x^{a-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$ für alle $a \in \mathbb{N},\ a > 1$

(2) $(a-2)x^2 - 4a = 0$, also $x^2 = \frac{4a}{a-2} \quad \Rightarrow$ Für a = 2 existieren keine weiteren Nullstellen.

Für a > 2 folgen $x_2 = +\sqrt{\frac{4a}{a-2}} = 2\sqrt{\frac{a}{a-2}}$; $x_3 = -\sqrt{\frac{4a}{a-2}} = -2\sqrt{\frac{a}{a-2}}$

Für a = 3 gilt: $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 2\sqrt{3}$; $f_3(\pm 2\sqrt{3}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(\pm 2\sqrt{3})^3}{(\pm 2\sqrt{3})^2-4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad P_1(0; 0),\ P_2(2\sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3}),\ P_3(-2\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\sqrt{3})$

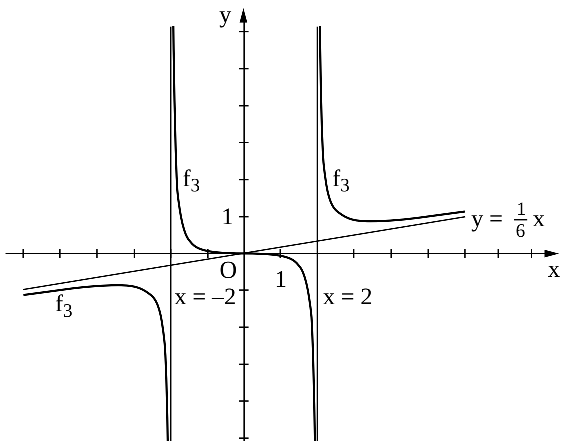
c) $y = f_3(x) = \frac{1}{6}\frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x^3}{6x^2-24}$; Polasymptoten: $x = 2;\ x = -2$

Aus $x^3 : (6x^2 - 24) = \frac{1}{6}x + \frac{4x}{6x^2-24}$

$\underline{-(x^3 - 4x)}$

$4x$ folgt die Gleichung der weiteren Asymptote: $y = \frac{1}{6}x$

Skizze (Graph f_3 und Asymptoten):

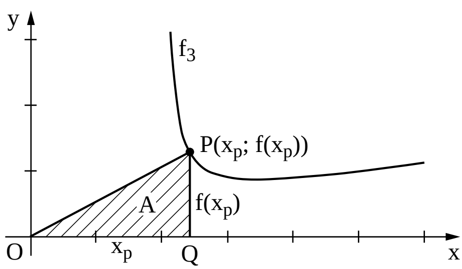


d) Wir betrachten das Verhalten der Funktion f_3 bei Annäherung an die Asymptote $x = 2$ (für $x > 2$) und bei Annäherung an die Asymptote $y = \frac{1}{6}x$.
Es gilt: $\lim\limits_{x \to 2+0} f_3(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f_3(x) = \infty$.
Da die Funktion f_3 wegen der Differenzierbarkeit in $]2; \infty[$ dort auch stetig ist, ist $(2\sqrt{3}\,; \frac{1}{2}\sqrt{3})$ lokaler Minimumpunkt. Da f_3 wegen a) punktsymmetrisch ist, muss $(-2\sqrt{3}\,; -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ lokaler Maximumpunkt sein. Aus den Polasymptoten bei $x = \pm 2$ und der Punktsymmetrie ergibt sich auch der Wendepunkt bei $(0; 0)$.

e) F_3 ist Stammfunktion von f_3, wenn gilt $F_3'(x) = f_3(x)$:
$F_3'(x) = 2bx + \frac{1}{3}\,\frac{2x}{x^2-4} = f_3(x)$
$$\frac{12bx(x^2-4)+4x}{6(x^2-4)} = \frac{x^3}{6(x^2-4)} \quad \Rightarrow 12bx^3 - 48bx + 4x = x^3$$
Die Gleichung ist erfüllt, wenn $12b = 1$ und $-48b + 4 = 0$.
Für beide Gleichungen erhält man widerspruchsfrei $b = \frac{1}{12}$.

f) Flächeninhalt:
$$A = \int_4^6 \left(f_3(x) - \frac{1}{6}x\right)dx = \left[\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}\ln(x^2-4) - \frac{1}{12}x^2\right]_4^6$$
$$= \frac{1}{3}(\ln 32 - \ln 12) = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{3} \quad \approx 0{,}33 \text{ (FE)}$$

g) Da das Dreieck OPQ rechtwinklig ist, gilt:
$$A(x) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{x^3}{6(x^2-4)} = \frac{x^4}{12(x^2-4)}\,; \quad (x > 2)$$
$$A'(x) = \frac{1}{12}\cdot\frac{4x^3(x^2-4) - x^4\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{12}\cdot\frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2-4)^2}$$
$A'(x) = 0$: $2x^3(x^2-8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \notin DB$, $x_2 = -\sqrt{8} \notin DB$, $x_3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$$A(2\sqrt{2}) = \frac{16\cdot 4}{12(8-4)} = \frac{4}{3} \text{ (FE)}$$



Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 1.2	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
30 BE	4 BE	7 BE	5 BE	4 BE	3 BE	3 BE	4 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.1

a) Die Diagonalen der Grundfläche schneiden einander im Punkt M(1; 1; 0).

Die Pyramide ABCDS ist gerade, wenn gilt:

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MS}$, d.h. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$ und

$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MS}$, d.h. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 - 9 = 0$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = -9 + 9 = 0 \quad \text{w.z.b.w.}$$

b) Mit $\vec{n}^* = \overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und F(2; 4; 4) folgt

$$\eta: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2y - 8 + z - 4 = 0, \quad \text{also} \quad 2y - z = 12$$

Lösungsvariante:

$$\eta: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(I) $x = 2 + r + s \Rightarrow s = x - 2 - r$ (*)

(II) $y = 4 + s$

(III) $z = 4 - 2s$

(*) in (II), (III) $y = 4 + x - 2 - r \quad | \cdot 2$

$\underline{z = 4 - 2x + 4 + 2r}$

$\Rightarrow \eta: \quad 2y + z = 12$

Durchstoßpunkt E der Kante $\overline{AS}$ mit Ebene η:

$$\text{AS: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$AS \cap \eta = E$: $2(-2 - 3t) + (1 - 4t) = 12$, also $t = -\frac{3}{2}$

$$\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ 7\right)$$

c) $$|\overrightarrow{EF}| = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 9} = \frac{\sqrt{46}}{2}; \quad |\overrightarrow{HG}| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 9} = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

$|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{HG}|$

$$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{EH}, \quad \text{also} \quad FG \parallel EH$$

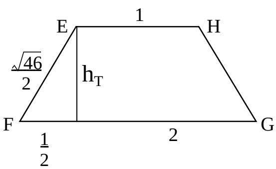
⇒ Viereck EFGH ist ein gleichschenkliges Trapez.

Flächeninhalt:

$|\overrightarrow{FG}| = 2$, $|\overrightarrow{EH}| = 1$

$h_T^2 = \frac{46}{4} - \frac{1}{4} = \frac{45}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\sqrt{5}$ (LE)

$A_T = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{9}{4}\sqrt{5}$ (FE) $\approx 5{,}03$ (FE)



d) Höhe der Pyramide EFGHS ≙ $d(S; \eta) = h_p$:

$$h_p = \left|\frac{2 \cdot y_S + z_S - 12}{\sqrt{4+1}}\right| = \left|\frac{8 + 9 - 12}{\sqrt{5}}\right| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ (LE)}$$

⇒ Volumen: $V_P = \frac{1}{3} A_T \cdot h_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{15}{4}$ (VE)

e) Ebenen ε_t:

ε_t: $(11 - 10t)y + 3z = 41 - 10t$ $(t \in \mathbb{R})$

Alle Ebenen ε_t liegen parallel zur x-Achse bzw. senkrecht zur y-z-Ebene. Gleiches gilt für ihre Schnittgerade.

f) Parameter t:

(1) ε_t: $(11 - 10t)y + 3z = 41 - 10t$ η: $2y + z = 12$ bzw. $6y + 3z = 36$

$\varepsilon_t = \eta \quad \Rightarrow \quad 11 - 10t = 6 \quad$ und $\quad 41 - 10t = 36$

$\qquad\qquad\qquad t = \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad t = \frac{1}{2}$

(2) Die Ebene, in der $\triangle BCS$ liegt, verläuft parallel zur x-z-Ebene, denn $B_y = C_y = S_y = 4$.
Für B und C $\in \varepsilon_t$ gilt: $(11 - 10t)\cdot 4 + 3(-1) = 41 - 10t \quad \Rightarrow \quad t = 0$
Für S $\in \varepsilon_t$ gilt: $(11 - 10t)\cdot 4 + 3\cdot 9 = 41 - 10t \quad \Rightarrow \quad t = 1$
Ergebnis: $0 \le t \le 1$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.1	a)	b)	c)	d)	e)	f)
15 BE	2 BE	3 BE	3 BE	2BE	2 BE	3 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.2

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\qquad$ ε_1: $3x - 2y + z = 13$

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$D = g \cap \varepsilon_1$: $\quad 3(1 + 2r) - 2(3 + 2r) + (2 + 8r) = 13$, $\quad$ also $\quad r = \frac{7}{5}$

$$\vec{x}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{29}{5} \\ \frac{66}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 19 \\ 29 \\ 66 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(3{,}8;\ 5{,}8;\ 13{,}2)$$

Schnittwinkel $\sphericalangle(\varepsilon_1; g)$:

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}) = \dfrac{6 - 4 + 8}{\sqrt{4 + 4 + 64}\cdot\sqrt{9 + 4 + 1}} = \dfrac{10}{\sqrt{1008}}$

$\Rightarrow \quad \sphericalangle(\varepsilon_1; g) \approx 18{,}36°$

b) Koordinaten des Punktes A':

$d(A, \varepsilon_1) = \left|\dfrac{3 - 1 - 2 - 3 + 2 - 13}{\sqrt{9 + 4 + 1}}\right| = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$

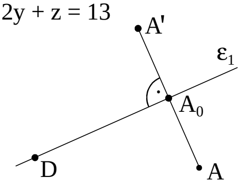
$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot d(A, \varepsilon_1)\, \vec{n}_{1_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A'(7; -1; 4)$

c) Flächeninhalt des Dreiecks ADA':

$A_{\triangle ADA'} = 2\cdot A_{\triangle ADA_0} = |\overline{A_0A}|\cdot|\overline{A_0D}| \qquad$ mit $A_0 = \overline{AA'} \cap \varepsilon_1$

Aus AA': $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und ε_1: $3x - 2y + z = 13$



folgt nach Einsetzen: $A_0(4; 1; 3)$

$$\Rightarrow \quad A_{\triangle ADA'} = \sqrt{14}\cdot\left|\begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 4{,}8 \\ 10{,}2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{5}\sqrt{14}\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ 51 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{14}\cdot\sqrt{1 + 24^2 + 51^2} = \frac{1}{5}\sqrt{44492} \approx 42{,}19 \text{ (FE)}$$

Lösungsvariante:

$$A_{\triangle ADA'} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA'}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 2{,}8 \\ 11{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2{,}8\cdot 2 - 11{,}2\cdot(-4) \\ 11{,}2\cdot 6 - 2{,}8\cdot 2 \\ 2{,}8\cdot(-4) - 2{,}8\cdot 6 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 50{,}4 \\ 61{,}6 \\ -28 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{50{,}4^2 + 61{,}6^2 + (-28)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7118{,}72} \approx 42{,}19 \text{ (FE)}$$

d) Der Richtungsvektor $\vec{a}$ der Schnittgeraden s muss senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}_{\varepsilon_t}$ von ε_t stehen:

$$\vec{n}_{\varepsilon_t} = \begin{pmatrix} 3t \\ t-3 \\ t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{n}_{\varepsilon_t}\cdot\vec{a} = 3t - 3t = 0$$

Einen Punkt der Schnittgeraden erhält man, indem man in ε_1: $3x - 2y + z = 13$ und ε_{-1}: $-3x - 4y - z = -11$ z.B. $x = 0$ setzt und die x- und y-Koordinaten berechnet:

$$\begin{array}{rcl} -2y + z &=& 13 \\ -4y - z &=& -11 \\ \hline -6y &=& 2 \end{array} \qquad \text{also } y = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad z = 13 + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{37}{3}$$

$$\Rightarrow \quad s: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{37}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e) Geraden h und g:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \neq s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow h \nparallel g$

(2) h_{1_g}:
$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 8 + 3r = 1 + 2t \\ \text{(II)} & 4 + 3r = 3 + 2t \\ \text{(III)} & 13 + 7r = 2 + 8t \\ \hline \text{(I)} - \text{(II)} & 4 = -2 \end{array}$$
$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ kein Schnittpunkt (2)

Aus (1) und (2) folgt: g und h verlaufen zueinander windschief.

Abstandsberechnung:

(1) Ebene E, die h enthält und parallel zu g liegt

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{l} x = 8 + 3r + 2s \\ y = 4 + 3r + 2s \\ z = 13 + 7r + 8s \\ \hline x - y = 4, \end{array}$$

also $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

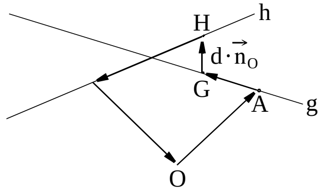
(2) Für den Abstand gilt

$d(g, h) = d(g, E) = \left|\frac{1 - 3 - 4}{\sqrt{2}}\right| = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (LE)

Für die Koordinaten der Punkte G und H gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t_G\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} - r_H\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{array}{l} 1 + 2t_G + 3 - 8 - 3r_H = 0 \\ 3 + 2t_G - 3 - 4 - 3r_H = 0 \\ 2 + 8t_G - 13 - 7r_H = 0 \\ \hline 2t_G - 3r_H = 4 \\ 2t_G - 3r_H = 4 \quad |\cdot(-4) \\ 8t_G - 7r_H = 11 \\ \hline \end{array}$$



Man erhält: $5r_H = -5$, also $r_H = -1 \Rightarrow H(5; 1; 6)$
$2t_G = 4 + 3r_H = 1 \quad \Rightarrow \quad t_G = \frac{1}{2}$, also $\quad G(2; 4; 6)$

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.2	a)	b)	c)	d)	e)
15 BE	3 BE	2 BE	2 BE	2 BE	6 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2.3

a) Binomialverteilung:
$n = 20; \quad p = 0{,}16; \quad k = 3$
$P(X = 3) = B(3; 20; 0{,}16) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}16^3 \cdot 0{,}84^{17} \approx 0{,}241$

b) Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{17}{3}}{\binom{20}{5}} \approx 0{,}1316$$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}25$

$$1 - \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{17}{n}}{\binom{20}{n}} > 0{,}25 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\binom{17}{n}}{\binom{20}{n}} < 0{,}75$$

(n: Anzahl der Muscheln, die der Urlauber kaufen muss)

Lösung durch Probieren:

$$n = 1: \quad \frac{\binom{17}{1}}{\binom{20}{1}} = \frac{17}{20} = 0{,}85 > 0{,}75 \qquad n = 2: \quad \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{136}{190} \approx 0{,}716 < 0{,}75$$

Der Urlauber muss mindestens 2 Muscheln kaufen.

Lösungsvariante:

Will man die Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung lösen, erhält man
$n^3 + 57n^2 - 1082n + 11970 = 0$.
Diese Gleichung hat die Näherungslösung 1,73398.

d) 5 Euro = 500 Cent ≙ 100 Perlen

Binomialverteilung mit $p = 0{,}16$; $n = 100$:

$\mu = E(X) = n \cdot p = 16$

$\sigma^2 = V(X) = n \cdot p(1-p) = 13{,}44 > 0$ Näherung durch $\Phi(X)$ möglich

$\sigma \approx 3{,}666$; $\frac{\sigma}{2} \approx 1{,}83$

$$P(|X-16| > 1{,}83) = 1 - P(15 \le X \le 17)$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{17-16+0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}84}}\right) + \Phi\left(\frac{15-16-0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}84}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(0{,}41) + \Phi(-0{,}41) = 2 - 2\Phi(0{,}41) \approx 0{,}6818$$

e) Anzahl der Perlen mit der Größe B : n

Ziehen ohne Zurücklegen:

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{n}{1}}{\binom{n+3}{2}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{3n}{\frac{(n+3)(n+2)}{1 \cdot 2}} = \frac{6n}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{5}$$

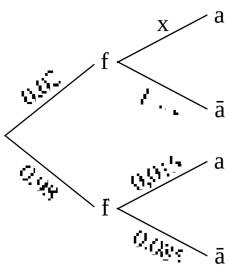
$$\Rightarrow \quad 3n^2 - 15n + 18 = 0, \quad \text{also } n_1 = 2;\ n_2 = 3$$

Auf dem Tisch lagen 2 oder 3 Perlen der Größe B.

f) Aussondern einer fehlerhaften Perle:

f : Perle fehlerhaft; a: Perle wird ausgesondert

x: Wahrscheinlichkeit für das Aussondern einer fehlerhaften Perle



$P(a) = 0{,}02 \cdot x + 0{,}98 \cdot 0{,}015 = 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}765$

Die Wahrscheinlichkeit für das Aussondern einer fehlerhaften Perle beträgt also 0,765.

Bewertungsvorschlag:

Aufgabe 2.3	a)	b)	c)	d)	e)	f)
15 BE	1 BE	2 BE	2 BE	3 BE	4 BE	3 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1998 / 99

Gymnasium

Berlin / Beethoven-OS Steglitz

Aufgabe 1

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_\lambda\colon x \longmapsto f_\lambda(x) = \frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}}$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $D_{f_\lambda} = \mathbb{R}$.

a_1) Untersuchen Sie das Verhalten dieser Funktionen für $x \to \pm\infty$!

a_2) Weisen Sie nach, dass die Schar nur monoton wachsende Funktionen enthält!

a_3) Der Graph einer Funktion f_λ werde mit G_λ bezeichnet. Zeigen Sie, dass jeder Graph G_λ punktsymmetrisch zu $P(0 \mid 2{,}5)$ ist!

a_4) Fertigen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und einer Wertetabelle mit $x \in \{1; 2; 3; 4\}$ für das Intervall $-4 \le x \le 4$ eine Zeichnung des Graphen G_1 an! (Einheit = 2 cm; Ursprung in Blattmitte)

b_1) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung der Funktionenschar

$$F_\lambda\colon x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)\,dt;\ x \in \mathbb{R}!$$

Dabei bedeute f_λ wieder die oben angegebene Funktionenschar.

b_2) Weisen Sie nach, dass die Graphen aller Funktionen F_λ für $x \to \infty$ die Geraden mit der Gleichung $y = 5x$ als Asymptote haben!

c_1) Laut Teilaufgabe a_2) besitzt jede Funktion f_λ eine Umkehrfunktion f_λ^{-1}. Bestimmen Sie deren Funktionsterm und größtmöglichen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$!

c_2) Geben Sie den Betrag des Integrales $\int_0^{2,5} f_\lambda^{-1}(t)\,dt$ an, ohne f_λ^{-1} zu integrieren!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 35)

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g_λ durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sin\sqrt{\pi x} & \text{für} \quad 0 < x \le \pi \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases};$$

$g_\lambda(x) = \lambda \sin x$ für $0 \le x \le \pi;\ \lambda \in \mathbb{R}^+$.

a_1) Zeigen Sie, dass die Funktion f an der Stelle 0 stetig ist!

a_2) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte des Graphen der Funktion f!

a_3) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen einschließt!

b) Für $x > 0$ besitzen die Graphen der Funktionen f und g_λ zwei gemeinsame Punkte an den Stellen x_1 und $x_2 = \pi$. Die Graphen von g_λ und f und die Ordinatenachse bilden zwei Flächen.

b_1) Bestimmen Sie ohne Berechnung von x_1 den Parameterwert λ so, dass die Inhalte der Flächen übereinstimmen!

b_2) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (0 \leq x \leq \pi)$ eine Umkehrfunktion F^{-1} besitzt!

b_3) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Umkehrfunktion F^{-1} in $\mathbb{R}$ an!

b_4) Berechnen Sie F(x) für $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = \frac{\pi}{2}$!

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 30)

Aufgabe 3

Gegeben Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \\ \text{II} & 6x_1 & + & 0x_2 & + & 8x_3 & = & 40 \\ \text{III} & 18x_1 & - & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 62 \end{array}$$

a_1) Führen Sie mit Hilfe von Zeilenumformungen eine Rangbestimmung für das Gleichungssystem durch! Geben Sie die allgemeinen Bedingungen für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems an!

a_2) Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems!
Die drei Gleichungen I, II, III lassen sich als Gleichungen dreier Ebenen E_1, E_2, E_3 auffassen. Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung (hinsichtlich der Lage der Ebenen) die Lösung hat!

a_3) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen

$$E_1: \ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6 = 0$$
$$E_2: \ 6x_1 + 0x_2 + 8x_3 - 40 = 0$$

a_4) Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte, die den gleichen orientierten Abstand von E_1 und E_2 haben, eine Ebene bildet!
Geben Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform an!
Erläutern Sie mit kurzer Begründung, ob für $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ die Menge der Punkte, die von E_1 den a-fachen orientierten Abstand wie von E_2 haben, eine Ebene bildet!
(In a_3) und a_4) werde eine orthonormierte Basis vorausgesetzt.)

(Erreichbare Bewertungseinheiten: 35)

Erwartungsbild zu Aufgabe 1

a$_1$) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}(e^{-\lambda x} + 1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{e^{-\lambda x} + 1} = 5$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}(e^{-\lambda x} + 1)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{e^{-\lambda x} + 1} = 0$

a$_2$) Die Monotonie der Funktionen wird mit dem Monotoniekriterium untersucht. Dieses Kriterium besagt: Eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktionen f ist – monoton wachsend, falls $f'(x) \geq 0$
– monoton fallend, falls $f'(x) \leq 0$.

$$f_\lambda'(x) = \frac{5\lambda e^{\lambda x}(1 + e^{\lambda x}) - 5\lambda e^{\lambda x}e^{\lambda x}}{(1 + e^{\lambda x})^2} = \frac{5\lambda e^{\lambda x} + 5\lambda(e^{\lambda x})^2 - 5\lambda(e^{\lambda x})^2}{(1 + e^{\lambda x})^2} = \frac{5\lambda e^{\lambda x}}{(1 + e^{\lambda x})^2}$$

Weil $5\lambda e^{\lambda x} > 0$ und $(1 + e^{\lambda x})^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $f_\lambda'(x) > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Demzufolge sind alle Funktionen f_λ (streng) monoton wachsend.

a$_3$) Der Graph einer Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ ist genau dann punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sind die Graphen G_λ punktsymmetrisch zum Punkt $P(0\,|\,2{,}5)$, dann müssen die Graphen G_λ durch Verschiebung um 2,5 Einheiten in Richtung der negativen Ordinate in ursprungsymmetrische Graphen übergehen. Die zugehörige Funktionsvorschrift lautet: $g_\lambda(x) = f_\lambda(x) = 2{,}5$

Laut Def. untersucht man (1) $g_\lambda(-x) = f_\lambda(-x) - 2{,}5$
(2) $-g(x) = -f_\lambda(x) - 2{,}5$

$$g_\lambda(-x) = f_\lambda(-x) - 2{,}5 = \frac{5e^{\lambda(-x)}}{1 + e^{\lambda(-x)}} - 2{,}5 = \frac{5e^{-\lambda x}}{1 + e^{-\lambda x}} - \frac{2{,}5(1 + e^{-\lambda x})}{1 + e^{-\lambda x}}$$

$$= \frac{5e^{-\lambda x} - 2{,}5(1 + e^{-\lambda x})}{1 + e^{-\lambda x}} = \frac{5e^{-\lambda x} - 2{,}5 - 2{,}5e^{-\lambda x}}{1 + e^{-\lambda x}} = \frac{2{,}5(e^{-\lambda x} - 1)}{1 + e^{-\lambda x}}$$

$$= \frac{2{,}5(1 - e^{\lambda x})e^{-\lambda x}}{(e^{\lambda x} + 1)e^{-\lambda x}} = \frac{2{,}5(1 - e^{\lambda x})}{1 + e^{\lambda x}}$$

$$-g_\lambda(x) = -\frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} + 2{,}5 = 2{,}5 - \frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} = \frac{2{,}5(1 + e^{\lambda x}) - 5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} = \frac{2{,}5(1 - e^{\lambda x})}{1 + e^{\lambda x}}$$

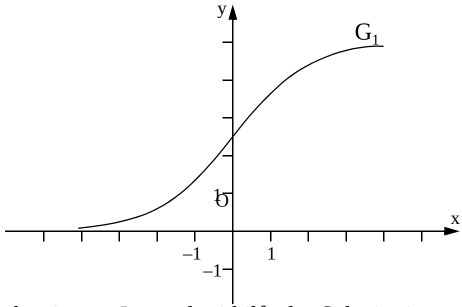
Also gilt: $g_\lambda(-x) = -g_\lambda(x)$

Somit wurde gezeigt, dass der Graph G_λ punktsymmetrisch zu $P(0\,|\,2{,}5)$ ist.

a$_4$)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	0,1	0,2	0,6	1,3	2,5	3,7	4,4	4,8	4,9

In der folgenden Skizze gilt aus Platzgründen 1 LE ≙ 0,5 cm, gefordert ist 1 LE ≙ 2 cm.



b_1) Es wird das unbestimmte Integral mithilfe des Substitutionsverfahrens gelöst.

Wir setzten: $u = 1 + e^{\lambda x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$; $dx = \frac{du}{\lambda e^{\lambda x}}$

Dann ist $\int \frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}}\,dx = \int \frac{5e^{\lambda x}}{u}\,\frac{du}{\lambda e^{\lambda x}} = \frac{5}{\lambda}\int \frac{du}{u} = \frac{5}{\lambda}\ln u + C$.

Die Resubstitution liefert: $\int \frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}}\,dx = \frac{5}{\lambda}\ln(1 + e^{\lambda x}) + C$

Nun ist: $F_\lambda(x) = \lim\limits_{A \to -\infty} \int\limits_A^x f_\lambda(t)dt = \lim\limits_{A \to -\infty} \left[\frac{5}{\lambda}\ln(1 + e^{\lambda t})\right]_A^x$

$$= \frac{5}{\lambda}\lim_{A \to -\infty}[\ln(1 + e^{\lambda x}) - \ln(1 + e^{\lambda A})] = \frac{5}{\lambda}\ln(1 + e^{\lambda x})$$

b_2) Eine ganzrationale Funktion g heißt genau dann Asymptote einer Funktion f für $x \to \infty$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty}[f(x) - g(x)]$ existiert und gleich Null ist.

Es muss also gelten: $\lim\limits_{x \to \infty}(F_\lambda(x) - 5x) = 0$

$$\lim_{x \to \infty}\left[\frac{5}{\lambda}\ln(1 + e^{\lambda x}) - 5x\right] = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{5}{\lambda}\ln(1 + e^{\lambda x}) - \frac{5}{\lambda}\lambda x\right]$$

$$= \frac{5}{\lambda}\lim_{x \to \infty}[\ln(1 + e^{\lambda x}) - \ln e^{\lambda x}]$$

$$= \frac{5}{\lambda}\lim_{x \to \infty}\ln\frac{1 + e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} = \frac{5}{\lambda}\lim_{x \to \infty}\ln(e^{-\lambda x} + 1) = \frac{5}{\lambda}\ln 1 = 0,$$

da $e^{-\lambda x} \to 0$ für $x \to \infty$.

Das bedeutet, dass $g(x) = 5x$ die Asymptote aller Funktionen F_λ für $x \to \infty$ ist.

c_1) Wenn eine Funktion über einem Intervall streng monoton ist, dann ist sie dort umkehrbar. Dies trifft laut Aufgabenteil a_2) auf alle Funktionen f_λ zu.

Es gilt: $y = f_\lambda(x) = \frac{5e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}}$, also $y(1 + e^{\lambda x}) = 5e^{\lambda x} \Rightarrow y = 5e^{\lambda x} - ye^{\lambda x} = e^{\lambda x}(5 - y)$

$e^{\lambda x} = \frac{y}{5-y}$, also $\lambda x = \ln\frac{y}{5-y}$ und damit $x = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{y}{5-y}$

Somit gilt: $f_\lambda^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{x}{5-x}$

Die Funktion $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{x}{5-x}$ ist nur für $\frac{x}{5-x} > 0$ definiert, denn der natürliche Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert:

(1) $x > 0$ und $5 - x > 0$, also $x > 0$ und $x < 5$, d.h. $x \in\ ]0; 5[$

(2) $x < 0$ und $5 - x < 0$, also $x < 0$ und $x > 5$, dies ist unmöglich

Für den Definitionsbereich gilt: $D_{f_\lambda^{-1}} =]0; 5[$.

c$_2$) $\int\limits_0^{2,5} f_\lambda^{-1}(x)dx = \lim\limits_{A \to -\infty}\int\limits_A^0 f_\lambda(x)dx = F_\lambda(0)$

Unter Verwendung von b_1) folgt dann:

$F_\lambda(0) = \frac{5}{\lambda}\ln(1 + e^{\lambda\cdot 0}) = \frac{5}{\lambda}\ln(1 + 1) = \frac{5}{\lambda}\ln 2$

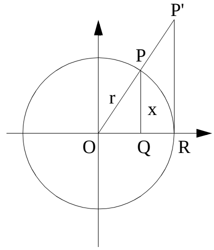
Bewertungsvorschlag:

a)	Berechnung der Grenzwerte	4 BE
	Monotonieuntersuchung mit Hilfe der 1. Ableitung	4 BE
	Nachweis der Punktsymetrie	5 BE
	Tabelle und Skizze	4 BE
b)	Bestimmung der integralfreien Darstellung	8 BE
	Asymptotennachweis	5 BE
c)	Umkehrfunktions- und Definitionsbereichsbestimmung	3 BE
	Lösung des Integrales	2 BE
		35 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 2

a) Eine Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn sie an der Stelle x_0 definiert ist, der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Da laut Definition $f(0) = 1$ gilt, muss $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}} = 1$ gezeigt werden. Dazu reicht es aus, $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ zu zeigen, denn $\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{\pi x} = 0$.



Da $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ eine gerade Funktion ist, reicht es aus, $f(x)$ für $x \to +0$ zu untersuchen.

Für alle $x \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[$ gilt: $A_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2} r \sin x \cdot r \cos x$;

$= \frac{1}{2} r^2 \sin x \cos x$

$A_{\text{KreissektorOPR}} = \frac{1}{2} r^2 x$; $A_{\Delta OP'R} = \frac{1}{2} r(r \tan x) = \frac{1}{2} r^2 \tan x$

Aus $A_{\Delta OPQ} < A_{\text{KreissektorOPR}} < A_{\Delta OP'R}$ folgt $\frac{1}{2} r^2 \sin x \cos x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 \tan x$.

Also gilt: $\sin x \cos x < x < \tan x$ und folglich $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

Damit folgt $\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ (für alle $x \in\ ]0;\ \frac{\pi}{2}[$).

Wegen $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ folgt auch, dass $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ gilt.

Nun ist: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sin \sqrt{\pi x}$

Wir setzen $y = \sqrt{\pi x}$. Dann ist $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\pi x} = 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

Damit ist die dritte Bedingung der Stetigkeit, nämlich $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ erfüllt.

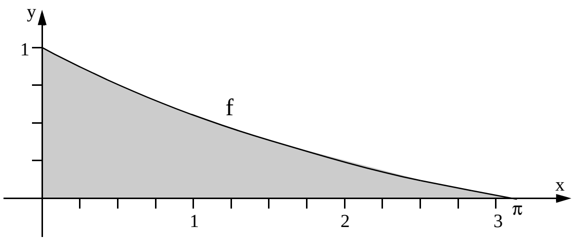
Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

a_2) Schnittpunkt mit Ordinatenachse: Per Definition von $f(x)$ gilt $f(0) = 1$, also ist $S_y(0 \mid 1)$.

Schnittpunkt mit Abzissenachse: Aus $y = f(x) = 0$ erhält man $\frac{\sin \sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}} = 0$,

also $\sin \sqrt{\pi x} = 0$ und $x = \pi$. Man erhält somit $S_x(\pi \mid 0)$.

a_3) Skizze:
(nicht verlangt)



$$A = \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}}\, dx$$

Berechnung des unbestimmten Integrals mithilfe des Substitutionsverfahrens:

$$u = \sqrt{\pi x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi x}};\quad dx = \frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi}\, du$$

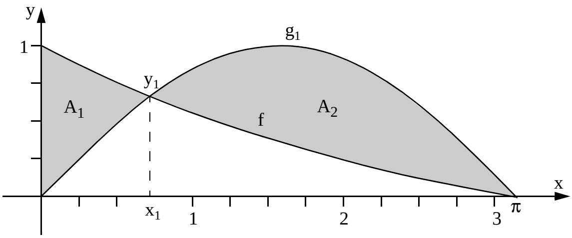
Die Integrationsgrenzen ändern sich in diesem Fall nicht. Somit ergibt sich:

$$A = \int_0^{\pi} \frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}}\, dx = \int_a^b \frac{\sin u}{\sqrt{\pi x}} \frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi}\, du = \frac{2}{\pi}\int_a^b \sin u\, du = \left[-\frac{2}{\pi}\cos u\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos\pi + \frac{2}{\pi}\cos 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}273\ (\text{FE})$$

Der Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt etwa 1,27 FE.

b_1) Skizze:



$$A_1 = \int_0^{x_1} (f(x) - g_\lambda(x))dx;\ A_2 = \int_{x_1}^{\pi} (g_\lambda(x) - f(x))dx;\ \text{Es soll } A_1 = A_2 \text{ gelten.}$$

$$A_1 = \int_0^{x_1} \left(\frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}} - \lambda\sin x\right)dx = \int_0^{x_1} \frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}}\, dx - \lambda\int_0^{x_1} \sin x\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\sqrt{\pi x}\,\right]_0^{x_1} + [\lambda\cos x]_0^{x_1} = -\frac{2}{\pi}\cos\sqrt{\pi x_1} + \lambda\cos x_1 + \frac{2}{\pi} - \lambda$$

$$A_2 = \int_{x_1}^{\pi} \left(\lambda\sin x\, dx - \frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}}\right)dx = \left[-\lambda\cos x + \frac{2}{\pi}\cos\sqrt{\pi x}\,\right]_{x_1}^{\pi}$$

$$= \lambda - \frac{2}{\pi} + \lambda\cos x_1 - \frac{2}{\pi}\cos\sqrt{\pi x_1}$$

Aus $A_1 = A_2$ folgt $\frac{4}{\pi} = 2\lambda$ und damit $\lambda = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$

b_2) Wenn eine Funktion in einem Intervall streng monoton ist, dann ist sie dort umkehrbar. Folglich ist die Monotonie von F(x) zu zeigen:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\frac{2}{\pi}\cos\sqrt{\pi x} + \frac{2}{\pi}$$

Um die Monotonie zu beweisen, wird zunächst die 1. Ableitung gebildet.

$$F'(x) = \frac{2}{\pi}\sin\sqrt{\pi x} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{\pi x}} = \frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{\pi x}} > 0 \text{ (für alle } 0 < x < \pi)$$

Da die 1. Ableitung stets größer als Null ist, ist F(x) streng monoton wachsend, demzufolge besitzt die Funktion F(x) eine Umkehrfunktion $F^{-1}(x)$.

b$_3$) Es gilt $D_{F^{-1}} = W_F$ und $F(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\sqrt{\pi x} + \frac{2}{\pi}$. Da $-1 \le \cos\sqrt{\pi x} \le x$

und damit $0 \le F(x) \le \frac{4}{\pi}$, folgt der Wertebereich von F: $W_F = [0; \frac{4}{\pi}]$.

Folglich ist der Definitionsbereich der Umkehrfunktion F^{-1} $D_{F^{-1}} = [0; \frac{4}{\pi}]$.

b$_4$) Aus $F(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\sqrt{\pi x} + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}(1 - \cos\sqrt{\pi x})$ folgt:

$$F(\tfrac{\pi}{3}) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{3}}) \approx 0{,}790 \text{ und } F(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}) \approx 1{,}022$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Nachweis der Stetigkeit	4 BE
	Angabe der Schnittpunkte	3 BE
	Flächenberechnung	7 BE
b)	Bestimmung des Parameters λ	10 BE
	Nachweis der Existenz der Umkehrfunktion	2 BE
	Angabe des Definitionsbereichs	2 BE
	Berechnung von $F(\frac{\pi}{3})$ und $F(\frac{\pi}{2})$	2 BE
		30 BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3

a$_1$) Es handelt sich um ein inhomogenes lineares Gleichungssystem.
Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit solch eines Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ von m Gleichungen mit n Variablen ist, dass der Rang der Koeffizientenmatrix A mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A; \vec{b})$ übereinstimmt, d.h. dass $rg(A) = rg(A; \vec{b})$ ist. Wir bilden die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -6 \\ 6 & 0 & 8 & 40 \\ 18 & -3 & 10 & 62 \end{pmatrix} \begin{array}{r|r} -3 & -9 \\ 1 & \\ & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 14 & 58 \\ 0 & 6 & 28 & 116 \end{pmatrix} \begin{array}{|r} \\ -2 \\ 1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 14 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demzufolge ist $rg(A) = rg(A; \vec{b}) = 2$.

Die Lösungsmannigfaltigkeit eines lösbaren inhomogenen Gleichungssystems besteht aus allen Vektoren der Form $\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{x^*}$, wobei $\vec{x_0}$ ein partikulärer Lösungsvektor des inhomogenen Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{x^*}$ ein beliebiger Lösungsvektor des zugehörigen homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{o}$ ist. Die Lösungsmannigfaltigkeit besteht genau dann aus einem einzigen Vektor, wenn das homogene System nur trivial lösbar ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit eines inhomogenen Systems ist daher $rg(A) = rg(A; \vec{b}) = n$. Die Lösungsmannigfaltigkeit eines homogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{o}$ von m Gleichungen mit n Variablen ist ein Unterraum des $V^{(n)}$, d.h., mit $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ sind auch $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ und $\lambda\vec{x_1}$ Lösungsvektoren, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig ist.
Der Rang des Lösungsraumes ist $s = n - rg(A)$. Ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich der Anzahl der Variablen, so ist $s = 0$, d.h., der Lösungsraum besteht nur aus dem Nullvektor. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für nichttriviale Lösbarkeit ist daher $rg(A) < n$. Diese Bedingung ist besonders dann erfüllt, wenn die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Variablen ist. Eine hinreichende Bedingung für nichttriviale Lösungen ist daher $m < n$.

a_2) Berechnung einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems:
Aus Aufgabe a_1) erhält man die folgenden Gleichungen:

$$x_1 - 0{,}5x_2 - x_3 = -3$$

$$x_2 + \frac{14}{3}x_3 = \frac{58}{3}$$

Setzt man $x_3 = 0$, dann erhält man daraus $x_2 = \frac{58}{3}$ und $x_1 = \frac{20}{3}$.

Das bedeutet: $\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{58}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$.

Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$x_1 - 0{,}5x_2 - x_3 = 0$ und $x_2 + \frac{14}{3}x_3 = 0$

Mit $x_3 = 1$ folgen $x_2 = -\frac{14}{3}$ und $x_1 = -\frac{4}{3}$, also $\rho_n = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$.

Dann ist $\mathbb{L}_m = \{\alpha \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Die Lösungsmenge L des inhomogenen Systems ist somit:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{58}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Die Lösung entspricht der Berechnung des Schnittbildes der Ebenen E_1, E_2, E_3.

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{58}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a$_3$) E_1: $2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6 = 0$ bzw. $\vec{x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 6 = 0$

E_2: $6x_1 + 8x_3 - 40 = 0$ bzw. $\vec{x} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - 40 = 0$

Damit ergeben sich die Normalenvektoren:

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, also $|\vec{n}_1| = \sqrt{9} = 3$, und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, also $|\vec{n}_2| = \sqrt{100} = 10$

Mit $\cos\alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$ folgt $\alpha \approx 82{,}3°$.

a$_4$) Wir bilden die HESSEsche Normalform:

E_1: $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 6 = 0$; $|\vec{n}_1| = 3 \Rightarrow E_1$: $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 2 = 0$

E_2: $\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

Folglich ist $d_1 = \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + 2$; $d_2 = \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} - 4$

Orientierter Abstand des Punkte P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ von E_1 und E_2:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - 2; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - 4$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - 2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - 2 = 0$$

P liegt auf der Ebene $E: \begin{pmatrix} 0,6 + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0,8 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 2 = 0.$

Analog gilt für den a-fachen orientierten Abstand: $e_1 = ae_2$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - 2 = a\left(\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - 4\right) \Rightarrow \left(a\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{p} - 4a + 2 = 0$$

$E: \begin{pmatrix} 0,6a + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0,8a - \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - (4a - 2) = 0.$

Bewertungsvorschlag:

a)	Rangbestimmung	4 BE
	Aussagen über die Lösbarkeit	5 BE
b)	Berechnung spezieller Lösungen	4 BE
	Begründung des Vorgehens	9 BE
c)	Schnittwinkelberechnung	3 BE
d)	Bestimmung der HESSEschen Normalformen	6 BE
	Orientierter Abstand; Bestimmung der Gleichung der Ebene	2 BE
	Analoge Betrachtung für a-fachen orientierten Abstand	2 BE
		35 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1998 / 99

Gymnasium

Berlin / Stauffenberg-Gymnasium

1. Aufgabe

Gegeben ist die Funktionsschar f_k mit $k \in \mathbb{R}$ und $D(f_k) = \mathbb{R}^+ : f_k(x) = \dfrac{k + \ln x}{x}$

a) Weisen Sie nach, dass für die dritte Ableitung von fk(x) gilt:

$$f_k'''(x) = \frac{11 - 6k - 6\ln x}{x^4}$$

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der Abszissenachse sowie die lokalen Extrem- und Wendepunkte der Graphen von f_k!

c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} f_k(x)$!

. Ermitteln Sie das Verhalten der Scharfunktionen f_1 und $f_{0,1}$ für $x \to 0$ mittels Testeinsetzungen!
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und $f_{0,1}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem im Intervall $0 < x \leq 4{,}5$! (1 LE = 2 cm)
Geben Sie die jeweiligen Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte (ggf. näherungsweise) an!

d) Untersuchen Sie auf der Grundlage von Fallunterscheidungen und mithilfe von Grenzwertbetrachtungen den Einfluss des Parameters k auf die Lage der Nullstellen der Scharfunktionen!

e) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass $F_k^*(x) = k \cdot \ln x + 0{,}5 \cdot \ln^2 x$ die Gleichung einer Stammfunktion von $f_k(x)$ ist!

f) Führen Sie den Nachweis, dass der Flächeninhalt der Fläche A_k, die durch den Graph der Funktion f_k, die Abszissenachse und die Parallele zur Ordinatenachse durch den Hochpunkt von f_k eingeschlossen wird, von k unabhängig ist!

2. Aufgabe

Es wird eine Funktion mit folgender Gleichung betrachtet: $f_k(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{9 + x^2}}$

a) Geben Sie für diese Funktion den größtmöglichen Definitionsbereich an.
Berechnen Sie die Nullstellen und weisen Sie anschließend nach, dass f(x) für $x \to -\infty$ bzw. $x \to \infty$ jeweils einen Grenzwert besitzt!
Geben Sie die Gleichungen der jeweiligen Asymptoten an!

b) Untersuchen Sie die Funktion auf Extrempunkte!
Geben Sie im Falle ihres Vorhandenseins deren Koordinaten an!
Die Funktion f besitzt genau einen Wendepunkt!
Begründen Sie seine Existenz ohne Heranziehung von Ableitungsfunktionen!
Berechnen Sie anschließend seine Koordinaten mit Hilfe der Differentialrechnung!
(Hinweis: Hinsichtlich der Existenz von Wendestellen soll die Untersuchung einer notwendigen Bedingung genügen.)

c) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion im Intervall $-9 \leq x \leq 9$ sowie die entsprechenden Asymptoten!

d) Weisen Sie nach, dass der Inhalt der Fläche, die im ersten Quadranten vom Graph der Funktion $f(x)$ und der Geraden mit der Gleichung $x = b$ (mit $b > 0$) eingeschlossen wird, für $b \to \infty$ keinen (eigentlichen) Grenzwert besitzt!

e) Zeigen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion $\overline{f}$ besitzt! Geben Sie ihre Zuordnungsvorschrift sowie den Definitions- und den Wertebereich an!

f) Gegeben ist die Funktionsschar: $f_k(x) = \dfrac{3kx}{\sqrt{9 + x^2}}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

Vergleichen Sie den Verlauf der Graphen von f_k mit dem des Graphen von f für folgende Fälle:
(I) $0 < k < 1$ (II) $k = 1$ (III) $1 < k$

Der Graph von $f_k(x)$ sowie die Gerade mit der Gleichung $g(x) = \frac{1}{3}x$ umschließen im I. Quadranten eine Fläche vollständig. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $k \in \mathbb{R}^+$ mit $k > \frac{1}{3}$ gibt, für die die eingeschlossene Fläche einen Inhalt von 6 FE hat! (Hinweis: Das hier nachzuweisende Integral hat den Wert
$I = \left[3k \cdot \sqrt{9 + x^2} - \dfrac{x^2}{6}\right]_0^{3\sqrt{9k^2 - 1}}$.)

3. Aufgabe

Gegeben sind die Koordinatengleichungen zweier Ebenen:

E_1: $4x - 7y + 4z = 0$
E_2: $x - 2y - 2z = 0$

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung dieser Ebenen!
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung für das Schnittgebilde und berechnen Sie den Schnittwinkel, anderenfalls den Abstand beider Ebenen zueinander!

b) Wählen Sie einen beliebigen Punkt $P_0 \neq (0 \mid 0 \mid 0)$ aus, der auf der Ebene
E_3: $7x - 13y - 2z = 0$ liegt!
Zeigen Sie, dass dieser Punkt zu E_1 den gleichen Abstand hat wie zu E_2!

c) Weisen Sie nach, dass alle Punkte P (x | y | z) der Ebene E_3 die in Teilaufgabe b) genannte Eigenschaft besitzen!
Beschreiben Sie ohne weitere Rechnung die Lage der Ebene E_3 bezüglich der Ebenen E_1 und E_2 !

d) Die Ebene E_3 wird ferner von einer Kugel mit der Gleichung

K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$ geschnitten.

Weisen Sie nach, dass der Schnittkreismittelpunkt die Koordinaten
M* $\left(\frac{99}{74} \,\middle|\, \frac{17}{74} \,\middle|\, \frac{118}{37}\right)$ hat.

Berechnen Sie den Radius r* des Schnittkreises K*!

Erwartungsbild zu Aufgabe 1:

a) Bilden der ersten, zweiten und dritten Ableitung:

$f_k(x) = (k + \ln x)x^{-1}$

$f_k'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}(k + \ln x) = \frac{1}{x^2}(1 - k + \ln x)$

$f_k''(x) = -\frac{2}{x^3}(1 - k + \ln x) - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}(-3 + 2k + 2\ln x)$

$f_k'''(x) = -\frac{3}{x^4}(-3 + 2k + 2\ln x) + \frac{2}{x^4} = \frac{11 - 6k - 6\ln x}{x^4}$

b) Nullstellen: $\frac{k + \ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = -k$, also $x = \frac{1}{e^k}$; $N(e^{-k} \mid 0)$

Lokale Extrema:

$f_k'(x) = 0$ und $f_k''(x) \neq 0$:

$1 - k - \ln x = 0 \Rightarrow x_e = e^{1-k}$; $y_e = \frac{k + \ln e^{1-k}}{e^{1-k}} = e^{k-1}$

$f_k''(e^{1-k}) = \frac{-3 + 2k + 2(1-k)}{e^{3(1-k)}} = \frac{-1}{e^{3-k}} < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(e^{1-k} \mid e^{k-1})$

Wendepunkt:

$f_k''(x) = 0$ und $f_k'''(x) \neq 0$:

$-3 + 2k + 2\ln x = 0 \Rightarrow x = e^{0,5(3-2k)} = e^{1,5-k}$; $y = \frac{1,5 - (k+k)}{e^{1,5-k}} = 1,5e^{k-1,5}$

$f_k'''(e^{1,5-k}) = \frac{11 - 6k - 6(1,5-k)}{e^{4(1,5-k)}} = \frac{2}{e^{6-4k}} \neq 0$

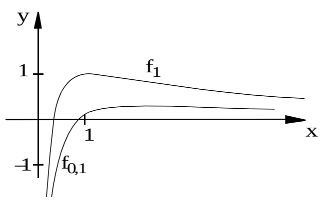
$\Rightarrow$ Wendepunkt $W(e^{1,5-k} \mid 1,5e^{k-1,5})$

c) Randverhalten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{k + \ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{0,1 + \ln x}{x} = -\infty$

(Für $x \to \infty$ wächst der Nenner schneller als der Zähler, der gesamte Term geht gegen null. Für $x \to 0$ und $0 \leq x \leq 1$ wird ln x negativ und mit sehr kleinen Werten für x wird auch der Zähler negativ, damit nähert sich der gesamte Term $-\infty$.)

Skizze:



Nullstellen: $N_1(0{,}368\,;\,0)$ $N_{0.1}(0{,}90\,;\,0)$
Extrempunkte: $H_{0,1}(2{,}46\,;\,0{,}41)$ $H_1(1\,;\,1)$
Wendepunkte: $W_1(1{,}65\,;\,0{,}91)$ $W_{0,1}(4{,}06\,;\,0{,}37)$

d) Parametereinfluss auf x_n:
Es werden 3 Fälle betrachtet:
$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-k} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-k} = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0} e^{-k} = 1$

e) Partielle Integration:

$$\int\frac{k+\ln x}{x}dx = \int\frac{k}{x}dx + \int\frac{\ln x}{x}dx = k\cdot\ln x + \int\frac{\ln x}{x}dx$$

Mit $u(x) = \ln x$; $v'(x) = \frac{1}{x}$ folgen $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = \ln x$ und damit

$$\int\frac{\ln x}{x}dx = \ln x\cdot\ln x - \int\frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx = \ln^2 x - \int\frac{\ln x}{x}dx$$

$$\Rightarrow 2\int\frac{\ln x}{x}dx = \ln^2 x \text{ , also } \int\frac{\ln x}{x}dx = 0{,}5\ln^2 x$$

Es gilt also $\int\frac{k+\ln x}{x}dx = k\ln x + 0{,}5\ln^2 x = F_k{}^*(x)$,

d.h., $F_k{}^*(x)$ ist eine Stammfunktion von $f_k(x)$.

f) Nachweis:

$$A_k = \int\limits_{e^{-k}}^{e^{1-k}} \frac{2k+\ln x}{x}dx = [k\ln x + 0{,}5\ln^2 x]_{e^{-k}}^{e^{1-k}}$$

$= k(1-k) + (1-k)^2 + k^2 - 0{,}5k^2 = 0{,}5$ (A_k ist also von k unabhängig.)

Bewertungsvorschlag:

a)	Bilden der drei Ableitungen	5 BE
b)	Nullstellen	3 BE
	Extremum	3 BE
	Wendepunkt	3 BE
c)	Randverhalten	3 BE
	Testeinsetzungen	2 BE
	Skizze	6 BE
d)	Parametereinfluss	3 BE
e)	Partielle Integration	3 BE
f)	Nachweis	<u>3 BE</u>
		34 BE

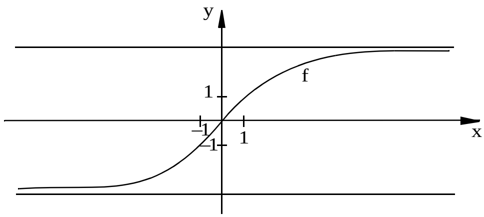
Erwartungsbild zu Aufgabe 2:

a) Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
Nullstelle: $3x = 0 \Rightarrow N(0 \mid 0)$
Randverhalten:
Es gilt
$$\frac{3x}{\sqrt{9 + x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2\left(\frac{9}{x^2} + 1\right)}} = \frac{3x}{|x| \cdot \sqrt{\frac{9}{x^2} + 1}} = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{\left(\frac{9}{x^2} + 1\right)}} & \text{für } x > 0 \\[2ex] \dfrac{-3}{\sqrt{\left(\frac{9}{x^2} + 1\right)}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
Also ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{\sqrt{9 + x^2}} = \pm 3$,
es existieren demzufolge zwei waagerechte Asymptoten: $y_1 = 3$ und $y_2 = -3$.

b) Lokale Extrema:
$f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$:
$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9 + x^2}} - \frac{3x \cdot 2x}{2(9 + x^2)} = \frac{3(9 + x^2) - 3x^2}{\sqrt{9 + x^2} \cdot \sqrt{(9 + x^2)^2}} = \frac{27}{\sqrt{(9 + x^2)^3}}$$
Da $27 \neq 0$ ist, existieren keine Extrema.

Wendepunkt:
Die Funktion muss einen Wendepunkt besitzen, weil sie
1. zentralsymmetrisch ist: $f(x) = -f(x)$
$$\frac{3x}{\sqrt{9 + x^2}} = -\frac{3(-x)}{\sqrt{9 + (-x)^2}}$$
2. streng monoton steigend ist: Wenn $x_1 < x_2$, dann ist $f(x_1) < f(x_2)$:
$$\frac{3x}{\sqrt{9 + x^2}} < \frac{3(x + 1)}{\sqrt{9 + (x + 1)^2}}$$
Koordinaten des Wendepunktes:
$$f''(x) = \frac{81(9 + x^2)^{2,5} \cdot 2x}{2} = -\frac{81x}{\sqrt{9 + x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0;\ y = 0, \text{ also } W(0 \mid 0)$$

c) Skizze:



d) Nachweis:

$$A(b) = \int_0^b \frac{3x}{\sqrt{9+x^2}}dx = \frac{3}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(b)} z^{-0,5}dz \qquad (\text{mit } z = 9 + x^2)$$

$$= 3(\sqrt{9+b^2} - 3)$$

$\lim\limits_{b \to \infty} A(b) = \infty$, d.h. , es existiert kein (eigentlicher) Grenzwert.

e) Es existiert eine Umkehrfunktion wegen $x \in \mathbb{R}$:

Aus $[f(x)]^2 = \frac{9x^2}{9+x^2}$ folgt $\frac{1}{[f(x)]^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{9}$ bzw. $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{[f(x)]^2} - \frac{1}{9}$.

Also ist $x^2 = \frac{9 \cdot [f(x)]^2}{9 - [f(x)]^2}$ und

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{9x^2}{9-x^2}} \qquad x \in \mathbb{R} \text{ im Intervall } I =]-3\,;3[\ ;\ y \in \mathbb{R}$$

f) Vergleich:

$$f_k(x) = \frac{3kx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$0 < k < 1$: Die Asymptoten liegen im Intervall $-3 < y < 3$, der Graph verläuft flacher.

$k = 1$: Verlauf wie bei $f(x)$.

$1 < k$: Die Asymptoten liegen außerhalb des Intervalls $-3 \le y \le 3$.

Bestimmen von k für A = 6 (FE):

Berechnen von b: $f_k(x) = g(x)$

$$\frac{3kx}{\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{3}x \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{81k^2 - 9} \text{ , also } b = 3\sqrt{9k^2-1}$$

$$A = 6 = \int_0^{\sqrt{9k^2-1}} \left(\frac{3kx}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{x}{3}\right)dx = \left[3k\sqrt{9+x^2} - \frac{x^2}{6}\right]_0^{3\sqrt{9k^2-1}}$$

$\Rightarrow k_1 = 1 \qquad (k_2 = -\frac{1}{3}$ entfällt, wegen $k < 0)$

Bewertungsvorschlag:

a)	Definitionsbereich, Nullstelle, Grenzwerte und Asymptotengleichungen	5 BE
b)	kein Extremum Wendepunkt und Existenznachweis	6 BE
c)	Skizze	4 BE
d)	Nachweis	3 BE
e)	Umkehrfunktion	4 BE
f)	Bestimmung von k	<u>11BE</u>
		33BE

Erwartungsbild zu Aufgabe 3:

a) Lagebeziehung:

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich : $y + 12z = 0$, also $y = -12z$
$4x - 7z + 4z = 4x + 84z + 4z = 0$, also $x = -22z$

Wählt man z.B. $z = 1$, so erhält man die Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -22 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{81 \cdot 9}} = \frac{10}{27} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 68,26°$$

b) Zum Beispiel: $P_0(2 ; 0 ; 7)$

Abstand P_0 von E_1: $\vec{x}_p \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = 4$

Abstand P_0 von E_2: $\vec{x}_p \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4$

Die Beträge der beiden Abstände sind gleich, die Vorzeichen verschieden, das heißt, der Punkt P_0 liegt zwischen den beiden Ebenen.

c) Es kann E_3: $z = -\frac{13}{2}y + \frac{7}{2}x$

in die Abstandsgleichungen von E_1 bzw. E_2 eingesetzt werden. Die Abstände berechnen sich dann zu

$d_1 = \left|2x - \frac{11}{3}y\right|$ und $d_2 = \left|-2x + \frac{11}{3}y\right|$. Also gilt: $d_1 = d_2$

Lösungsvariante:
Eine zweite Nachweismöglichkeit ergibt sich, indem man $g \subset E_3$ zeigt und anschließend die Winkelgleichheit nachprüft. E_3 halbiert den Raumwinkel zwischen E_1 und E_2.

d) Abstand von M* zu M:

$$d = (7x - 13y - 2z) \cdot \frac{1}{\sqrt{222}}$$

Einsetzen der Koordinaten des Kreismittelpunktes:

$d = (7 \cdot 2 - 13 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{222}} = \frac{21}{\sqrt{222}} < 3$, es gibt einen Schnittkreis.

Koordinaten von M*:

$$(\overrightarrow{x_{M*}} - \overrightarrow{x_M}) = -d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\overrightarrow{x_{M*}} = -d\vec{e}_n + \overrightarrow{x_M} = -\frac{21}{\sqrt{222}} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{222}} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{74} \cdot \begin{pmatrix} 99 \\ 17 \\ 236 \end{pmatrix},$$

also $M\left(\frac{99}{74} ; \frac{17}{74} ; \frac{118}{37}\right)$

Radius r*:

$$r^* = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{441}{222}} = \sqrt{\frac{519}{74}} \approx 2,648$$

Bewertungsvorschlag:

a)	Untersuchung der Lagebeziehung	6 BE
b)	Abstandsberechnung	8 BE
c)	Nachweis der Lage von E_3	3 BE
d)	Schnittkreisberechnung	7 BE
		24 BE

Abiturprüfung
Leistungskurs

1998 / 99

Gymnasium

Brandenburg / Sängerstadt-Gymnasium
Finsterwalde

Hinweis:
Für die folgende Prüfungsarbeit wurde antragsgemäß der symbolische Taschenrechner TI-92 als besonderes Hilfsmittel zugelassen. Der TI-92 nutzt ein Computeralgebrasystem, welches das symbolische Arbeiten mit mathematischen Ausdrücken und Formeln (Vereinfachen von Termen, Lösen von Gleichungen, Differenzieren, Integrieren usw.) automatisiert und grafische Darstellungen erlaubt. Der TI-92 stand jedem Schüler des Leistungskurses mit Beginn des Kurshalbjahres 13/I zur Verfügung, d.h., er durfte im Unterricht, in der häuslichen Arbeit, bei allen Leistungsüberprüfungen und Klausuren in 13/I und 13/II eingesetzt werden.
In den angegebenen Erwartungsbildern wird durch einen Klammervermerk „TI 92: ...“ auf Arbeitsschritte aufmerksam gemacht, wo die Rechnernutzung angebracht oder zumindest günstig ist.

Aufgabe 1:

Das Bevölkerungswachstum ist weltweit ein ernstes Problem, im Januar 1999 lebten erstmals über 6 Mrd. Menschen auf der Erde. Unser Globus kann nur eine gewisse maximale Population ertragen. Die Art und Weise, in der sich die Bevölkerung zeitlich verändert, ist abhängig von ihrer Größe, von Umweltbedingungen und von der Verfügbarkeit notwendiger Ressourcen.
Eine UN-Langzeit-Prognose der Weltbevölkerung gibt folgende Daten an:

1960	3,02 Mrd.	2050	10,02 Mrd.
1990	5,30 Mrd.	2100	11,19 Mrd.
2000	6,23 Mrd.	2150	11,54 Mrd.
2025	8,47 Mrd.		

Stabilisation (nach 2200) 11,6 Mrd.

Es soll nun untersucht werden, nach welchem mathematischen Modell die UN-Prognose erstellt wurde.

a) Zunächst werden die Differenzialgleichungen vom Typ

$$\frac{dB(t)}{dt} = aB^n(t) \text{ mit } B(0) = B_0 \qquad B_0 > 0 \qquad (*)$$

betrachtet, dabei ist die Wachstumsrate $\frac{dB(t)}{dt}$ der Größe $B(t)$ proportional zu einer Potenz dieser Größe. Für die Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt hier $a > 0$, da es sich um einen Wachstumsprozess handelt, für n werden nachfolgend spezielle Werte angenommen.

a_1) Zeigen Sie, dass mit $B_e(t) = B_0 e^{at}$ gegebene exponentielle Wachstumsfunktionen die Differenzialgleichung (*) für n = 1 erfüllen!

a_2) Lösen Sie das Anfangswertproblem (*) mit der Methode *Trennung der Variablen* für folgende weitere Fälle:

$n = 0$ lineares Wachstum $(B_l(t))$

$n = 2$ hyperbolisches Wachstum $(B_h(t))$

$n = -1$ parabolisches (genauer: „Wurzel-") Wachstum $(B_w(t))$

Zeigen Sie, dass für $n \neq 1$ die Lösung von (*) allgemein lautet:

$$B(t) = \left((1-n)at + B_0^{1-n}\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

a_3) Bestimmen Sie aus den Daten der UN-Prognose von 1990 (t = 0) und 2000 die jeweiligen Konstanten a in den vier Wachstumsfunktionen $B_e(t)$, $B_l(t)$, $B_h(t)$ und $B_w(t)$ auf 6 Nachkommastellen genau!
Zeichnen Sie die Graphen der vier Wachstumsfunktionen in einem geeigneten gemeinsamen Koordinatensystem für den Zeitraum von 1960 bis 2150!
Tragen Sie die Werte der UN-Prognose punktuell mit in das Koordinatensystem ein!

a_4) Berechnen Sie die jeweilige prozentuale Abweichung der Werte aus den mathematischen Modellen von den Werten der UN-Prognose für die Jahre 2050 und 2150!
Werten Sie die Güte der Modelle und beurteilen Sie, ob die UN bei ihrer Langzeit-Prognose eines der vier Modellfunktionen zur Grundlage hatte!

b) In einem weiteren Modell gehen wir von einem logistischen Ansatz mit der Differenzialgleichung

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lambda K B(t)\left(1 - \frac{B(t)}{K}\right) \quad \text{und} \quad B(0) = B_0 \quad (B_0 > 0) \qquad (**)$$

aus, darin sind λ und K Konstanten mit $\lambda > 0$ und $K > 0$.

b_1) Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung $B_{log}(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\dfrac{K}{B_0} - 1\right)e^{-\lambda K t}}$

Lösung für (**) ist!

b_2) Untersuchen Sie die Graphen von $B_{log}(t)$ auf Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte!

b_3) Beurteilen Sie, ob die UN bei ihrer Langzeit-Prognose die logistische Modellfunktion zur Grundlage hatte!
Begründen Sie Ihre Meinung konkret!

b_4) Für welchen Zeitpunkt (Jahreszahl) liefert das logistische Modell näherungsweise einen Bevölkerungszuwachs pro Jahr, der kleiner ist als 0,05 Mrd. Menschen?

b_5) Berechnen Sie den Wert für eine mittlere konstante Anzahl von Menschen, die im Zeitraum von 1990 bis 2150 die gleichen Auswirkungen auf unseren Globus hinterlassen hätte wie die Bevölkerung nach dem logistischen Modell in diesem Zeitraum!

c) M. E. Gilpin und F. J. Ayala haben in *Global models of growth and competition* (Proc. Nat. Acad. Sci 70 (1973) 3590-3593) vorgeschlagen, die logistische Differenzialgleichung (**) zu ersetzen durch

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lambda K B(t)\left(1 - \left(\frac{B(t)}{K}\right)^{\Theta}\right) \qquad (***)$$

mit der Konstanten $\Theta > 0$, wobei $\Theta \leq 1$ bzw. $\Theta > 1$ zu wählen sei, je nachdem, ob die Population aus wirbellosen oder aus Wirbeltieren besteht.
Lösen Sie die verallgemeinerte logistische Differenzialgleichung (***) unter der Anfangsbedingung $B_0 > 0$ bei $t = 0$!

Aufgabe 2:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind mit $a \in \mathbb{R}$ eine Ebenenschar E_a

$$E_a: \qquad (1-a)x_1 + x_2 + ax_3 + a = 0$$

und mit $b \in \mathbb{R}$ eine Geradenschar g_b

$$g_b: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1-b \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen E_1 und E_{-1} aus der Schar E_a!
Welche Beziehung gilt zwischen zwei Parameterwerten a_1 und a_2, damit die zugehörigen Ebenen E_{a_1} und E_{a_2} aus der Schar E_a senkrecht aufeinander stehen?

b) Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die in jeder Ebene der Schar E_a enthalten ist!

c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes G(1; 1; 0) von der Ebene E_{-1}!
Welche weitere Ebene aus der Schar E_a hat denselben Abstand von G(1; 1; 0) wie Ebene E_{-1}?

d) Welche Gerade der Schar g_b geht durch den Koordinatenursprung O (0; 0; 0)?

e) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden s

$$s: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

und den Geraden der Schar g_b in Abhängigkeit vom Parameterwert b (gegenfalls Schnittpunkte oder Abstände angeben)!

f) Für welche Werte von $a,\ b \in \mathbb{R}$ schneiden sich die Geraden aus g_b und Ebenen aus E_a in genau einem Punkt? Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes allgemein an und bestimmen Sie a und b für den speziellen Fall, dass der Koordinatenursprung O (0, 0; 0) dieser Schnittpunkt ist!

Erwartungsbild zu Aufgabe 1:

a_1) Einsetzen von $B_e(t) = B_0e^{at}$ in die DGL ergibt eine wahre Aussage:

(TI-92: Differenzialoperator)

– DGL für n = 1: $\frac{dB(t)}{dt} = B'(t) = aB(t)$

– Aus $B(t) = B_0e^{at}$ folgt $B'(t) = aB_0e^{at}$ (linke Seite der DGL)

– Aus $B_e(t) = B_0e^{at}$ folgt $aB(t) = aB_0e^{at}$ (rechte Seite der DGL)

⇒ Die exponentiellen Wachstumsfunktionen $B_e(t)$ erfüllen die DGL für n = 1.

a_2) Lösen der DGL für weitere Fälle mittels Variablentrennung:

(TI-92: Integraloperator)

Für $n \neq 1$ erhält man allgemein aus der unbestimmten Integration von

$\int B^{-n}dB = \int a dt$ (Beim Ausführen der unbest. Integration werden die beiden entstehenden Konstanten auf der rechten Seite zu C zusammengefasst.):

$$\frac{1}{1-n}B^{1-n} = at + C \Rightarrow \quad B = ((1-n)(at+C))^{\frac{1}{1-n}} \quad .$$

Mit $B(0) = ((1-n)C)^{\frac{1}{1-n}} = B_0 \quad \Rightarrow C = \frac{B_0^{1-n}}{1-n}$

folgt als Lösungsfunktion für die Fälle $n \neq 1$:

$$B(t) = \left((1-n)\left(at + \frac{B_0^{1-n}}{1-n}\right)\right)^{\frac{1}{1-n}} = ((1-n)at + B_0^{1-n})^{\frac{1}{1-n}}$$

Als Spezialfälle ergeben sich dann: $n = 0 \Rightarrow B_1(t) = at + B_0$

$$n = 2 \Rightarrow B_h(t) = \frac{1}{-at + \frac{1}{B_0}}$$

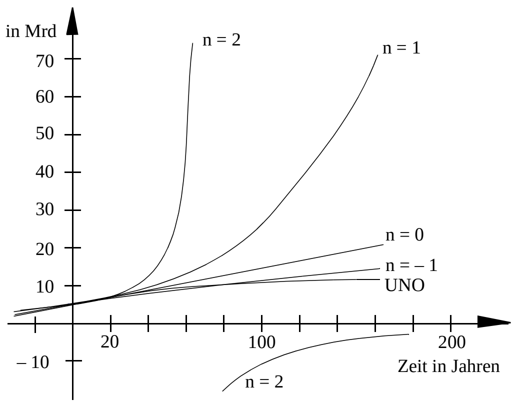
$$n = -1 \Rightarrow B_w(t) = \sqrt{2at + B_0^2}$$

Lösungsvariante: Spezialfälle für n zuerst einzeln betrachten

a_3) Gleichungen aufstellen und Werte der Konstanten a berechnen
(TI-92: „SOLVE“-Funktion)

n = 1	$6,23 = 5,30e^{10a_1}$	$a_1 = 0,016167$
n = 0	$6,23 = 10a_0 + 5,3$	$a_0 = 0,093$
n = 2	$6,23 = \dfrac{1}{-10a_2 + \dfrac{1}{5,3}}$	$a_2 = 0,002817$
n = –1	$6,23 = \sqrt{20a_{-1} + 5,3^2}$	$a_{-1} = 0,002771$

Graphen der Wachstumsfunktionen:
– Grafik-Darstellung des TI-92 nach geeigneter Eingabe der Funktionsterme nutzen.
– Ansonsten siehe Tabelle der berechneten Werte unter a_4).
– Für den Graphen von $B_h(t)$ muss eine ungerade Polstelle bei $t_p = \dfrac{1}{aB_0} \approx 66,98$ beachtet werden.



a_4) Prozentuale Abweichung der Modellwerte von den Prognose - Werten:

Berechnungen zur grafischen Darstellung der Wachstumsfunktionen
(Bevölkerungszahlen in Mrd):

			exp.	linear	hyperb.	parabol.
Jahr	t in Jahren	UNO	n=1	n=0	n=2	n=-1
1960	-30	3,02	3,26	2,51	3,66	
1990	0	5,3	5,30	5,30	5,30	5,30
2000	10	6,23	6,23	6,23	6,23	6,23
2025	35	8,47	9,33	8,56	11,10	8,10
2050	60	10,02	13,98	10,88	50,87	9,61
2100	110	11,19	31,38	15,53	-8,25	12,08
2150	160	11,54	70,42	20,18	-3,82	14,13
prozentuale Abweichungen zur UN-Prognose:						
2050			39,53%	8,58%	407,65%	-4,05%
2150			510,19%	74,87%	-133,07%	22,44%

Richtigkeit der Modelle beurteilen:

– keines von den vier Wachstumsmodellen kann Grundlage der UN-Prognose gewesen sein (zu große Abweichungen; Stabilisation wird nicht erfasst)

– völlig ungeeignet sind der exponentielle und hyperbolische Ansatz

b_1) Funktionsterm von $B_{log}(t)$ in die DGL (**) einsetzen und wahre Aussage zeigen: *(TI-92: „STO“- und „SO-DASS“-Operator)*

linke Seite: $$\frac{dB}{dt} = \frac{K^2(K-B_0)\lambda B_0 e^{K\lambda t}}{(B_0 e^{K\lambda r} + K - B_0)^2} = \lambda K B(t)\left(1 - \frac{B(t)}{K}\right)$$ (= rechte Seite)

b_2) Kurvendiskussion für Graphen von $B_{log}(t)$:

(TI-92: Differenzialoperator, „SOLVE“-Funktion, „SO-DASS“-Operator)

Asymptoten: $\lim\limits_{t \to \infty} B_{log}(t) = K \qquad \lim\limits_{t \to -\infty} B_{log}(t) = 0$

Extrempunkte: $$\frac{dB_{log}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{K^2(K-B_0)\lambda B_0 e^{K\lambda t}}{(B_0 e^{K\lambda t} + K - B_0)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ nur erfüllbar für $K = 0$, $B_0 = 0$ und / oder $K = B_0$. Da diese Fälle lt.Voraussetzung hier nicht gegeben sind, existieren also keine Extrempunkte.

Wendepunkte: Es gilt $\frac{d^2(B)}{dt^2} = 0 \Rightarrow t_w = \frac{\ln\frac{K-B_0}{B_0}}{K\lambda}$ (lt. Vor.)

und $\frac{d^3B}{dt^3}(t_w) = -\frac{K^4\lambda^3}{8} \neq 0$ (lt. Vor.)

$$\Rightarrow W\left(\frac{\ln\frac{K\text{-}B_0}{B_0}}{K\lambda}; \frac{K}{2}\right)$$

b_3) Beurteilung der Langzeitprognose:

Die Abweichungen zwischen den Werten aus dem logistischen Modell und den Prognose- Werten sind unbedeutend. Die Stabilisation der Werte für $t \to \infty$ wird im logistischen Modell richtig erfasst.

Grundlage für die UN-Prognose war also ein logistisches Modell.

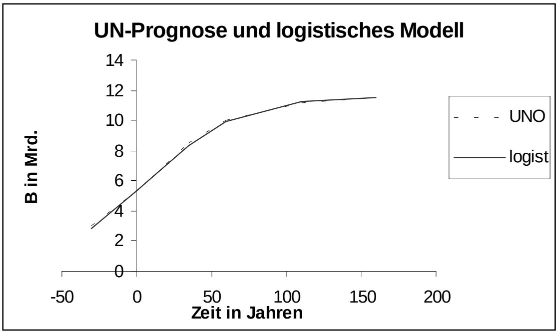
Begründung:

Die grafische Darstellung der speziellen logistischen Wachstumsfunktion mit Wendepunkt W(5,38; 5,80) zeigt Übereinstimmung mit den Werten der Prognose (auch hinsichtlich der Stabilisierung)

oder/und:

Angabe der prozentualen Abweichung: *(TI–92: “TABLE“)*

Berechnungen zur grafischen Darstellung			
der log. Wachstumsfunktionen			
(Bevölkerungszahlen in Mrd):			
	t in Jahren	UNO	logist
1960	-30	3,02	2,82
1990	0	5,3	5,30
2000	10	6,23	6,23
2025	35	8,47	8,37
2050	60	10,02	9,89
2100	110	11,19	11,21
2150	160	11,54	11,52
prozentuale Abweichungen zur UN-Prognose:			
2050			-1,29%
2150			-0,17%



(Tabelle und grafische Darstellung sind vom Schüler nicht explizit gefordert, erweisen sich aber als hilfreich zur Begründung für die Güte des logistischen Modells)

b_4) Da der Zuwachs durch die 1. Ableitung repräsentiert wird, folgt *(TI-92: Differenzialoperator)*

$$\frac{dB_{log,sp}}{dt}(t) = 0,05 \text{ , also } t_1 \approx 57,07 \text{ oder } t_2 \approx -46,31 \text{ (entfällt)}$$

⇒ Im Laufe des Jahres 2047 sinkt der Bevölkerungszuwachs nach dem logistischen Modell unter 0,05 Mrd. Menschen.

b_5) Mittelwert über bestimmtes Integral berechnen: *(TI-92: Integraloperator)*

$$\text{Mit } A = \int_0^{160} B_{log,sp}(t)dt \approx 1575,82 \text{ folgt } \bar{B} = \frac{1}{160-0}A \approx 9,85$$

Eine konstante Zahl von ca. 9,85 Mrd. Menschen würde im Zeitraum von 1990 bis 2150 die gleichen Auswirkungen hinterlassen wie die Bevölkerungsentwicklung nach dem logistischen Modell.

c) Da es sich um eine BERNOULLI-DGL handelt, wird substituiert und die Lösungsmethode nach LAGRANGE angewandt.

Umformung der DGL ergibt: $\frac{dB}{dt} = \lambda KB - \lambda K^{1-\theta}B^{1+\theta}$

Substitution: $Z = B^{1-(\theta+1)} = B^{-\theta}$

$\Rightarrow$ lineare Ersatz- DGL.: $$\frac{dZ}{dt} + \lambda K\theta Z(t) = \lambda\Theta K^{1-\theta}$$

Allgemeine Lösungen der homogenen Ersatz- DGL. durch TdV:

$$Z_h(t) = Ce^{\lambda K\theta t}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Ersatz- DGL. durchVdK:

$$C(t) = Ke^{-\lambda K\theta t}\text{, also } Z_p(t) = \frac{1}{K^\theta}$$

Allgemeine Lösung der Ersatz- DGL. durch Überlagerung:

$$Z_a(t) = Z_h(t) + Z_p(t) = Ce^{-\lambda K\theta t} + \frac{1}{K^\theta}$$

Rücksubstitution: $$B(t) = \frac{K}{(CK^\theta e^{-\lambda K\theta t} + 1)^{\frac{1}{\theta}}}$$

AWP: $$C = \frac{\left(\frac{K}{B_0}\right)^\theta - 1}{K^\theta}$$

Lösung: $$B(t) = \frac{K}{\left\{1 + \left[\left(\frac{K}{B_0}\right)^\theta - 1\right]e^{-\lambda K\theta t}\right\}^{\frac{1}{\theta}}}$$

Erwartungsbild zu Aufgabe 2:

a) Ebenengleichung für E_1 und E_{-1}: E_1: $x_2 + x_3 + 1 = 0$

E_{-1}: $2x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$

Schnittwinkel:*(TI-92: „DOTP“-Funktion)*

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \text{ bzw. } \cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{0}{\sqrt{12}} = 0$$

$\Rightarrow \varphi = 90°$

Zwei beliebige Ebenen E_{a_1} und E_{a_2} stehen aufeinander senkrecht, wenn

$\begin{pmatrix} 1-a_1 \\ 1 \\ a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1-a_2 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$, wenn also $(1-a_1)(1-a_2) + 1 \cdot 1 + a_1 \cdot a_2 = 0$ und

demzufolge $a_1 = \dfrac{a_2 - 2}{2a_2 - 1}$.

b) Die Gerade, die in jeder Ebene der Schar E_a enthalten ist, ist die gemeinsame Schnittgerade zweier beliebiger Ebenen E_a.

z.B. $E_1 \cap E_{-1}$: E_1: $x_2 + x_3 + 1 = 0$

E_{-1}: $2x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$

$2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \,;\, x_3 = -x_2 - 1$

Mit $x_2 = \mu$ ergibt sich als Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösungsvariante: In analoger Weise ist auch eine allgemeine Lösung $E_{a_1} \cap E_{a_2}$ möglich.

c) Die Abstandsberechnung erfolgt mithilfe der HESSEschen Normalform der Ebenengleichung von E_{-1}: *(TI-92: „NORM“- und „SOLVE“-Funktion)*

$$d(G, E_{-1}) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1^2)}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Für alle Ebenen E_a, die denselben Abstand von G haben, wie die Ebene E_1, muss gelten:

$$d(G, E_a) = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{(1-a) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + a \cdot 0 + a}{\sqrt{(1+a)^2 + 1^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{2a^2 - 2a + 2}}$$

$\Rightarrow 6 = \sqrt{12a^2 - 12a + 12}$, also $a^2 - a - 2 = 0$ und $a_1 = -1$, $a_2 = 2$

Somit hat E_2 denselben Abstand von G wie die Ebene E_1.

d) Aus $O \in g_b$ folgt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1-b \end{pmatrix}$. $\quad \Rightarrow \lambda = -1 \,;\, b = 1$

Die Gerade g_1 verläuft durch den Koordinatenursprung.

e) Lagebeziehung zwischen der Geraden s und der Schar g_b:

(1) Vergleich der Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1-b \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind, können Parallelität und Identität ausgeschlossen werden.

(2) Für den Abstand von windschiefen Geraden s und g_b gilt:

(TI-92: „CROSSP“-Funktion)

$$d = \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1-b \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1-b \end{pmatrix} \right|} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} -b+2 \\ -2b+1 \\ -b-1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-b+s)^2 + (-2b+1)^2 + (-b-1)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{4(-b+2) - 2(-2b+1) + 4(-b-1)}{\sqrt{6(b^2 - b + 1)}} \right| = \left| \frac{-4b+2}{\sqrt{6(b^2 - b + 1)}} \right|$$

Die Geraden schneiden einander, wenn d null ist, wenn also gilt:

$-4b + 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

Demzufolge existiert für $b = \frac{1}{2}$ ein Schnittpunkt, für $b \neq \frac{1}{2}$ sind die Geraden windschief mit dem Abstand $d = \left| \frac{-4b+2}{\sqrt{6(b^2 - b + 1)}} \right|$.

(3) Schnittpunkt $S = g_{\frac{1}{2}} \cap s$ berechnen:

(TI-92: „SOLVE“-Funktion oder „DET“-Kalkül)

Lösen des Gleichungssystems (I) $1 + \frac{1}{2}\lambda = -3 - \mu$

(II) $1 + \lambda = 3 + \mu$

(III) $0 + \frac{1}{2}\lambda = -4 - \mu$

liefert $\mu = -\frac{10}{3}$; $\lambda = -\frac{4}{3}$. $\Rightarrow S\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

f) Koordinaten der Geradenschar in Gleichung für E_a einsetzen:

$(1-a)(1+\lambda b) + (1+\lambda) + a(\lambda(1-b)) + a = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{a(2b-1)-b-1}$

Für $a(2b-1)-b-1 = 0$ gibt es keine Lösung für λ und damit auch keinen Schnittpunkt.

Für alle anderen Fälle ergibt das Einsetzen von $\lambda = \frac{2}{a(2b-1)-b-1}$

mit dem TI-92 in die Schargleichung von g_b den allgemeinen Schnittpunkt S:

$S\left(\frac{2b}{a(2b-1)-b-1} + 1 ; \frac{2}{a(2b-1)-b-1} + 1 ; \frac{-2(b-1)}{a(2b-1)-b-1}\right)$

Ist der Koordinatenursprung O(0; 0; 0) dieser Schnittpunkt, dann gilt:

(1) $-2(b-1) = 0$, also $b = 1$.

(2) Aus $\frac{2b}{a(2b-1)-b-1} + 1 = 0$ folgt $a = \frac{1-b}{2b-1}$

(Analog gilt: $\frac{2}{a(2b-1)-b-1} = 0 \Rightarrow a = \frac{b-1}{2b-1}$)

Mit $b = 1$ folgt in jedem Fall $a = 0$.

E_0 und g_1 schneiden also einander im Koordinatenursprung, wenn $a = 0$ und $b = 1$.