Mathematik

Informationen für die Hand der Lehrerin/des Lehrers

Grundkurs ☐ ☒ Leistungskurs

Jede Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik (Leistungskurs) wird aus 3 Aufgaben gebildet. Für die Bildung der Prüfungsaufgabe gilt:

- **Die Fachlehrerin/der Fachlehrer stellt aus den übermittelten Aufgabensätzen die Prüfungsaufgabe nach folgenden Vorgaben zusammen:**

- **Leistungskurs: Die Prüfungsaufgabe wird aus 3 Aufgaben – mindestens einer aus jeder Aufgabengruppe – gebildet.**

Für die einzelnen Aufgaben werden lediglich Bewertungspunkte, keine Teilnoten vergeben. Die Notenbildung erfolgt über die Punktzahl der gesamten Prüfungsaufgabe gemäß Nr. IV.

Im Folgenden wird als Beispiel eine Prüfungsaufgabe mit 3 Aufgaben bereitgestellt.

I. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	X
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

Aufgabenstellung entnommen aus Jahnke/Wuttke, Mathematik-Analysis, Cornelsen, vgl. auch: Schriftliche Abiturprüfung Mathematik, Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben, Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Bildung und Sport.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*

   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen

2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Graphikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

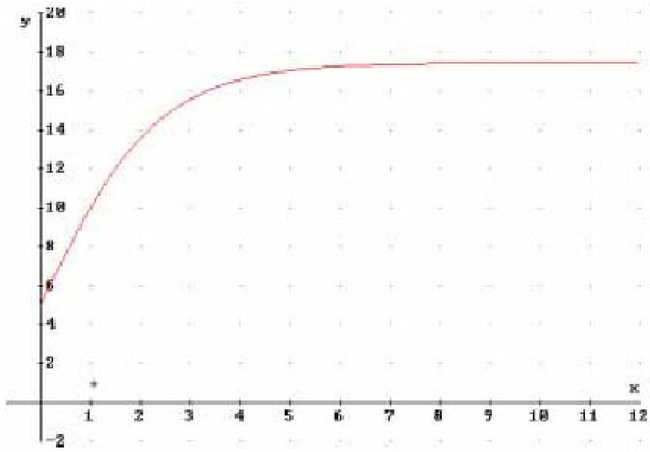
Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen I. Aufgabe

	Lösungsskizze
a)	Lösung der Gleichung 2: $r(t) = k \cdot e^{-ct}$, denn $r'(t) = k \cdot (-c) \cdot e^{-ct} = -c \cdot r(t)$. Es reicht als Lösung auch $r(t) = e^{-ct}$, da der „Fehler“ bei der Berechnung von V’ bemerkt wird und k als Faktor ergänzt werden kann. Vorgegebene Funktion V erfüllt (1): V(t) wird nach t abgeleitet: $V'(t) = V(0) \cdot \left[\frac{b}{c} \cdot (1 - e^{-ct})\right]' \cdot e^{\frac{b}{c} \cdot (1-e^{-ct})} = V(t) \cdot b \cdot e^{-ct}$ entspricht der Behauptung (mit der speziellen Lösung von $r(t) = b \cdot e^{-ct}$, also $k = r(0) = b$).
b)	$V_{speziell}(t) = 5 \cdot e^{1,25 \cdot (1-e^{-0,8t})}$ Definitionsbereich nach dem Text der Aufgabe R^+_0, Wertebereich $V(t) > 0$ für alle t aus dem Definitionsbereich, da $e^x > 0$ für alle $x \in R$. Rechter Rand $(t \to \infty)$: $e^{-0,8t}$ strebt gegen 0, daher gilt $V(t) \to 5 \cdot e^{1,25} \approx 17,45$. Werte für t = 0, Extrema: $V(0) = 5$ (Startwert gegeben), $V'(t) = V(t) \cdot e^{-0,8t}$ ist stets >0 für alle t, also keine Extremwerte, $V'(0) = 5$: Steigung an der y-Achse beträgt fast 80°. Wendepunkt: $V''(t) = V'(t) \cdot e^{-0,8t} - 0,8 \cdot V(t) \cdot e^{-0,8t} = V(t) \cdot e^{-0,8t} \cdot (e^{-0,8t} - 0,8)$ V’’(t) kann nur 0 werden, wenn die rechte Klammer 0 ist, denn die anderen beiden Faktoren sind stets positiv: $e^{-0,8t} - 0,8 = 0 \Rightarrow -0,8 \cdot t_w = \ln 0,8 \Rightarrow t_w \approx 0,28$, $V(t_w) = 5 \cdot e^{0,25} \approx 6,42$. Wendepunkt in W(0,28 | 6,42), da Vorzeichenwechsel von V’’ bei t_w.

Skizze:



Verallgemeinerung:

Definitionsbereich und Wertebereich unverändert.

Rechter Rand analog: $V(t) \to V(0) \cdot e^{\frac{b}{c}}$. $V(0)$ gegebener (positiver) Startwert.

Werte für t = 0, Extrema:

$V'(t) = V(t) \cdot b \cdot e^{-ct} > 0$, daher keine Extremwerte.

$V'(0) = V(0) \cdot b$: Steigung

Wendepunkte:

$V''(t) = V'(t) \cdot b \cdot e^{-ct} - c \cdot V(t) \cdot b \cdot e^{-ct} = V(t) \cdot b \cdot e^{-ct} \cdot (b \cdot e^{-ct} - c)$

$V''(t)$ kann nur 0 werden, wenn die rechte Klammer 0 ist (analog zu $V_{speziell}$):

$b \cdot e^{-ct} - c = 0 \Rightarrow t_w = -\frac{1}{c} \cdot \ln\frac{b}{c}$.

Fall 1: b > c $\Rightarrow$ t_W ist negativ, daher nicht im Definitionsbereich, keine Wendepunkte.

Fall 2: b < 0 $\Rightarrow$ $W\left[-\frac{1}{c} \cdot \ln\frac{b}{c} \quad / \quad V(0) \cdot e^{\frac{b}{c}\cdot(1-\frac{b}{c})}\right]$, Begründung wie oben.

Im Fall b = c läge der vermeintliche Wendepunkt auf dem Rand des Definitionsbereiches, ist also keiner.
Der Graph der allgemeinen Funktion V verläuft daher prinzipiell so wie bei $V_{speziell}$.

c) Gleichung (2) drückt aus, dass die Wachstumsrate exponentiell abnimmt.
(c > 0, also –c < 0 und $e^x > 0$ für alle $x \in R$)

Gleichung (1) bedeutet, dass das Volumen des Tumors entsprechend der Wachstumsrate wächst: Volumenänderung (lokal) = Wachstumsrate • Volumen.

Das Wachstum wird nach dem Modell (s. auch Untersuchungen zu Teilaufgabe b) für großes t nicht nur stets langsamer, sondern der Tumor strebt gegen ein maximales Ausmaß, welches nicht überschritten wird (Verhalten am rechten Rand).

d)	Zu untersuchen bleibt das Verhalten am linken Rand, also $t \to -\infty, e^{-\text{großeZahl}} \to \infty$, damit geht der gesamt Exponent gegen $-\infty$, also $V(t) \to 0$. Die x-Achse ist daher Asymptote am linken Rand des Definitionsbereichs. Nach den Erkenntnissen aus den Lösungen in der Teilaufgabe b) liegt in Abhängigkeit von der Größe der Parameter b und c mit b > c noch der Wendepunkt links von der y-Achse. Der Wendepunkt ist der Punkt mit der maximalen Wachstumsrate. Geht man davon aus, dass der Tumor zum Zeitpunkt t = 0 entdeckt wird, so hat er im Fall b > c schon sein größtes Wachstum hinter sich (WP im II. Quadranten), ist also schon im fortgeschrittenen Stadium, während er sich im Fall b < c noch in der Anfangsphase befindet, in der er Raum und Ressourcen für eine ständig steigende Wachstumsgeschwindigkeit hat. (Auch eine Untersuchung der speziellen Funktion in Teilaufgabe b) wäre angemessen.)

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien I. Aufgabe

Teil-aufgabe		**Anforderung**	**Lösungsqualität Anforderungs-bereich**		
Teilaufgabe I.a		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	ermittelt Lösungen der Gleichung (2).		3	
	2	berechnet die Ableitung von V(t)		3	
	3	zeigt, dass der in der Aufgabenstellung angegebene Ausdruck die Gleichung (1) erfüllt.			2
	4	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**0**	**6**	**2**
Teilaufgabe I.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt die spezielle Funktion konkret an, ermittelt den Definitionsbereich und den Wertebereich der speziellen Funktion	5		
	2	untersucht bei der speziellen Funktion das Randverhalten und die Existenz von Extrema	5		
	3	untersucht die spezielle Funktion auf die Existenz von Wendepunkten		6	
	4	skizziert den Graphen der speziellen Funktion	2		
	5	gibt Verallgemeinerungen für den Definitionsbereich und den Wertebereich der beliebige Funktion V an	2		
	6	untersucht bei der beliebige Funktion V das Randverhalten und die Existenz von Extrema (Verallgemeinerung)	3		

			I	II	III
	7	untersucht die notwendige Bedingung für die Existenz von Wendepunkten bei der beliebigen Funktion V		3	
	8	ermittelt mittels Fallunterscheidung unter Beachtung des Vorzeichenkriteriums mögliche Wendepunkte einschließlich Koordinaten		3	
	9	vergleicht den prinzipiellen Verlauf des Graphen der beliebigen Funktion V mit der speziellen Funktion		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**17**	**14**	**0**
Teilaufgabe I.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	interpretiert Gleichung (1)		2	
	2	interpretiert Gleichung (2)			3
	3	gibt mögliche Aussagen über das Tumorwachstum an			2
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe c)	**0**	**2**	**5**
Teilaufgabe I.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt hinreichend Eigenschaften der Funktion V für $t < 0$		4	
		Summe Teilaufgabe d)	**0**	**4**	**0**
		Summe Teilaufgaben a) – d)	**17**	**26**	**7**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe I in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

Für viele Tumorarten kann das Wachstum der Größe eines Tumors durch die folgenden beiden Gleichungen beschrieben werden:

$$(1)\ \frac{d}{dt}V(t) = r(t)\cdot V(t) \quad \text{und} \quad (2)\ \frac{d}{dt}r(t) = -c\cdot r(t).$$

Dabei stehen t für die Zeit mit $t \geq 0$, V(t) für das Tumorvolumen nach Ablauf der Zeit t und r(t) für die zeitabhängige Wachstumsrate des Tumors. c ist eine positive Konstante, $r(0) = b$ ist die anfängliche Wachstumsrate mit $b > 0$.

a) *Ermitteln Sie Lösungen der Gleichung* (2).

Zeigen Sie, dass $V(t) = V(0)\cdot e^{\frac{b}{c}\cdot(1-e^{-ct})}$ *die Gleichung* (1) *erfüllt.*

b) Es sei V(0) = 5, $b = 1$ und $c = 0{,}8$.

Untersuchen Sie diese spezielle Funktion $V_{speziell}$ *mit geeigneten Mitteln so, dass Sie eine Skizze des Graphen der Funktion anfertigen können.*
(Hinweis: $V''(t) = V(t)\cdot e^{-0{,}8t}\cdot(e^{-0{,}8t} - 0{,}8)$*)*

Ermitteln Sie, welche Eigenschaften eine beliebige Funktion V *in Abhängigkeit von* b *und* c *hat, nutzen Sie hierzu die Verallgemeinerung von Erkenntnissen, die Sie bei der Untersuchung der speziellen Funktion* $V_{speziell}$ *gewonnen haben.*

c) *Interpretieren Sie die Gleichungen* (2) *und* (1) *und geben Sie mögliche Aussagen über das Tumorwachstum nach diesem Modell an.*

d) Die Modellierung des Tumorwachstums mit der Funktion V von Teilaufgabe a) beginnt mit der Entdeckung des Tumors. Dieser Zeitpunkt wird $t = 0$ genannt.
Will man feststellen, ob das Modell auch bei einer besonders frühen Entdeckung noch die Realität hinreichend genau beschreibt, muss man Kenntnisse über Eigenschaften der Funktion V für $t < 0$ haben.

Beschreiben Sie diese Eigenschaften unter Verwendung Ihrer Erkenntnisse aus Teilaufgabe b).

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Graphikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

II. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	X
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

- Die Aufgabenstellung ist (weitgehend) entnommen aus „Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 1.12.1989 i.d.F. vom 24.5.2002.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - lineare Gleichungssysteme
   - Parameterformen von Geraden
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Graphikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen II. Aufgabe

	Lösungsskizze
a)	Richtung von F_1 (über Grund): $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, also α = 53° zwischen N und O, also zwischen NO und N 37° (Kurs 037) Richtung von F_2 (über Grund): $\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, daraus ergibt sich wie oben eine Richtung zwischen SO und O (Kurs 127) Der Abhebepunkt liegt in P(–10,5|–14|0), das Zentrum der Stadt in Z(0|0|0), denn s = 0,5 liefert $x_3 = 6$. Abstand $\overline{PZ} = 17{,}5$ km; Steigungswinkel für F_1: $\cos\varphi = 0{,}946$; $\varphi = 18{,}9°$
b)	Aus $37 = \|s\| \cdot \sqrt{21^2 + 28^2 + 12^2}$ folgt entsprechend der Aufgabenstellung s = 1; das Flugzeug taucht also in 12 km Höhe in die Wolken ein. F_2 bewegt sich parallel zur Erdoberfläche in der Ebene mit $x_3 = 12$. F_1 durchstößt diese Ebene im Punkt T(10,5|14|12), da s = 1 sein muss. T liegt nicht auf der Flugbahn von F_2 , denn –7,2+4t=10,5 liefert $t_0 = 4{,}425$, aber $-9{,}6+t_0(-3) \neq 14$. F_1 befindet sich genau über F_2 , wenn $\left\| \begin{array}{l} -10{,}5 + 21\cdot s = -7{,}2 + 4\cdot t \\ -14 + 28\cdot s = -9{,}6 - 3\cdot t \end{array} \right\|$. Als Lösung des Gleichungssystems erhält man s = 0,157143 und t = 0. (Einsatz CAS) Damit erhält man als Orte der Flugzeuge die Punkte $H_1(-7{,}2\|-9{,}6\|1{,}9)$, bzw. $H_2(-7{,}2\|-9{,}6\|12)$. die Flugzeuge befinden sich somit 10,1 km übereinander. $\overline{H_1H_2}$ ist nicht der Abstand der Flugbahnen, da $\overrightarrow{H_1H_2}$ nicht senkrecht auf der Flugbahn von F_1 steht.
c)	Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R mit dem Radius 85 km: $\left\| \begin{array}{l} (x_1 + 10{,}2)^2 + (x_2 + 13{,}6)^2 + x_3^2 = 85^2 \\ x_1 = -7{,}2 + 4t \\ x_2 = -9{,}6 - 3t \\ x_3 = 12 \end{array} \right\|$ Lösung: t = ± 16,8 (Einsatz von CAS)

	F_2 fliegt zwischen den Punkten $S_1(-7{,}2-16{,}8\cdot 4 \mid -9{,}6-16{,}8\cdot(-3) \mid 12)$ und $S_2(-7{,}2+16{,}8\cdot 4 \mid -9{,}6+16{,}8\cdot(-3) \mid 12)$ im Überwachungsbereich; seine Flugstrecke beträgt 168 km. (Alternative Lösungsmöglichkeiten sind gegeben (Pythagoras).)
d)	Gerade $g_1:\quad \vec{x} = \vec{v} + r\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}72\\96\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ enthält das gerade Stück der Grenze. Abstand der Geraden G_1G_2 von R: $d = \sqrt{(\vec{p}-\vec{v})^2 - \left((\vec{p}-\vec{v})\cdot\overrightarrow{u_0}\right)^2} = 69$ Ein im Nachbarland landendes Flugzeug kann hiernach noch 16 km hinter der Grenze vom Radar erfasst werden. Die berechnete Lösung berücksichtigt die Erdkrümmung nicht, die bei einer Entfernung von 85 km bereits zu mehr als 500 m Höhendifferenz führt (evtl. Rechnung z.B. über Satz des Pythagoras oder trigonometrisch oder analytisch). Damit wird ein landendes Flugzeug nicht mehr vom Radar erfasst.

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien II. Aufgabe

Teil-aufgabe		Anforderung	Lösungsqualität Anforderungs-bereich		
Teilaufgabe II.a		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt mit Hilfe der für die Himmelsrichtung relevanten Komponenten x_1 und x_2 der Richtungsvektoren von g und h die Flugrichtung (Himmelsrichtung) der beiden Flugzeuge		4	
	2	berechnet die Koordinaten des Abhebepunktes P und des Stadtzentrums Z		4	
	3	berechnet den Abstand zwischen P und Z	2		
	4	berechnet den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1	2		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**4**	**8**	
Teilaufgabe II.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	stellt den Lösungsansatz zur Berechnung des Parameters s dar und berechnet mit dessen Hilfe die Eintritthöhe des Flugzeugs in die Wolkendecke		4	
	2	gibt die Ebene, in der sich F_2 bewegt, als zur Erdoberfläche parallele Ebene an und berechnet den Schnittpunkt T als Schnittpunkt der Flugbahn von F_1 mit dieser Ebene		3	

	3	zeigt begründet, dass der Punkt T nicht auf der Flugbahn von F_2 liegen kann.	3		
	4	stellt das Gleichungssystem für die Bedingung, dass sich F_2 über F_1 befindet, auf und löst dieses mit Hilfe eines CAS		4	
	5	berechnet die Aufenthaltsorte und die Entfernung der Flugzeuge voneinander	2		
	6	begründet, dass der berechnete Abstand nicht der Abstand der Flugbahnen ist			2
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**5**	**11**	**2**
Teilaufgabe II.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	stellt das Gleichungssystem zur Berechnung der Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R auf		4	
	2	löst das Gleichungssystem mit CAS	2		
	3	berechnet die Koordinaten des Aus- und Eintrittspunktes (S_1 bzw. S_2) in den Überwachungsbereich	2		
	4	berechnet die Länge der Strecke zwischen den beiden berechneten Punkten (S_1 bzw. S_2)	2		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe c)	**6**	**4**	
Teilaufgabe II.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	stellt die Parameterform der Geradengleichung g_1 (Grenzlinie) auf	2		
	2	beschreibt den Lösungsweg zur Berechnung des Abstandes zwischen der Geraden g_1 und dem Punkt R			2
	3	berechnet den Abstand und deutet das Ergebnis		3	
	4	Erläutert mögliche im Lösungsansatz unberücksichtigte Argumente wie z.B. die Erdkrümmung			3
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe d)	**2**	**3**	**5**
		Summe Teilaufgaben a) – d)	**17**	**26**	**7**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe **II** in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet und die im Weiteren als flach angenommen wird. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung.
Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$, $s \in R$.

Ein zweites Flugzeug F_2 fliegt entlang der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

Die Längeneinheit ist 1 km.

a) *Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.*

Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.
Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P*.*
Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 .

b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km.
Ermitteln Sie die Höhe des Flugzeugs F_1*, wenn es in die Wolkendecke eintaucht.*
Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 *und* F_2 *auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.*
Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 *genau über* F_1 *befindet.*
Untersuchen Sie, ob der berechnete Abstand der Abstand der beiden Flugbahnen ist.

c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt R(-10,2|-13,6|0) eine Radarstation. Der Radar erreicht alle Punkte, die maximal 85 km von R entfernt sind.
Ermitteln Sie die Streckenlänge, die das Flugzeug F_2 *im Überwachungsbereich des Radars fliegt.*

d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte

$G_1(84|-3|0)$ und $G_2(12|-99|0)$.

Berechnen Sie die Entfernung von der Grenze eines im Nachbarland landenden Flugzeugs, das vom Radar R *(aus Teilaufgabe* c)*) gerade noch erfassbar ist.*

Erläutern Sie Argumente, welche die errechnete Lösung in der Realität in Frage stellen können.

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Graphikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

III. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	X

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Graphikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen III. Aufgabe

Lösungsskizze

a) Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt berechnet:

$$p(A)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\approx 0{,}313\,;\;p(B)=\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2}{10^6}\approx 0{,}006\,;\;p(C)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^6}\approx 0{,}151$$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist:

x_i	2	3	4	5	…	10	11	12	...	18	19	20
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{2}{10^2}$	$\frac{3}{10^2}$	$\frac{4}{10^2}$	…	$\frac{9}{10^2}$	$\frac{10}{10^2}$	$\frac{9}{10^2}$	…	$\frac{3}{10^2}$	$\frac{2}{10^2}$	$\frac{1}{10^2}$

Erwartungswert $E(X)=\frac{1}{10^2}(2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+...+18\cdot 3+19\cdot 2+20\cdot 1)=11$.

Berechnung der Varianz: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=137{,}50-121=16{,}5$. Also ist $\sigma=\sqrt{V(X)}\approx 4{,}06$.

c) $p_1 : p_{10} = 1:15 \;\Rightarrow\; p_{10}=15p_1$. Mit $p_i = i\cdot p_1$ für $1\le i\le 10$ folgt weiter $p_1\cdot(1+...+9+15)=1$

$\Rightarrow p_1=\frac{1}{60}$ und $p_{10}=\frac{1}{4}$. Also ist $1200\cdot p_{10}=300$ die Anzahl der Kugeln mit der Zahl 10.

d) Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $p_{10}=0{,}2$, die Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p_{10}=0{,}8$. Die Wahrscheinlichkeit für n Misserfolge in Serie ist $0{,}8^n$. Sie ist wegen

$0{,}8^n\le 0{,}01 \Leftrightarrow n\ln 0{,}8\le \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n\ge\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}\approx 20{,}6$ von der Mindestanzahl $n=21$ von Ziehungen an kleiner als 1%, die Erfolgswahrscheinlichkeit also größer als 99%.

e) $$p(\text{Pasch})=\sum_{i=1}^{10}p_i^2=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{10}+a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{10}a_i+a_i^2\right)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\sum_{i=1}^{10}a_i+\sum_{i=1}^{10}a_i^2 .$$

Aus $p_1+p_2+...+p_{10}=1$ und dem Hinweis $p_i=\frac{1}{10}+a_i$ folgt: $a_1+a_2+...+a_{10}=0$

Daher gilt $p(\text{Pasch})=\frac{1}{10}+\sum_{i=1}^{10}a_i^2$. Da $a_i^2\ge 0\;(1\le i\le 10)$ ist $p(\text{Pasch})$ am kleinsten, wenn auch jedes einzelne a_i gleich 0 ist, d.h. alle p_i gleich groß sind.

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien III. Aufgabe

Teilaufgabe		Anforderung	Lösungsqualität Anforderungsbereich		
		Der Prüfling	**I**	**II**	**III**
Teilaufgabe III.a	1	berechnet p(A),	3		
	2	berechnet p(B),		4	
	3	Berechnet p(C).	3		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**6**	**4**	
		Der Prüfling	**I**	**II**	**III**
Teilaufgabe III.b	1	stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X auf,		5	
	2	berechnet den Erwartungswert,	3		
	3	berechnet die Varianz,	4		
	4	berechnet die Standardabweichung.	2		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**9**	**5**	
		Der Prüfling	**I**	**II**	**III**
Teilaufgabe III.c	1	berechnet aus den gegebenen Daten durch Umformen und Einsetzen den Wert von p_{10},		6	
	2	berechnet die Anzahl der Kugeln mit der Zahl 10.		2	
		Summe Teilaufgabe c)		**8**	
		Der Prüfling	**I**	**II**	**III**
Teilaufgabe III.d	1	betrachtet eine Serie von Misserfolgen und bestimmt die Misserfolgswahrscheinlichkeit,	2		
	2	schätzt die Wahrscheinlichkeit für n Misserfolge ab,		4	
	3	bestimmt $n = 21$ durch Umformen oder Probieren.	2		
		Summe Teilaufgabe d)	**4**	**4**	

Teilaufgabe III.e		Der Prüfling	I	II	III
	1	setzt Wahrscheinlichkeit $p(\text{Pasch})$ an, setzt ein und formt um,		5	
	2	nutzt den Hinweis aus, um zu folgern $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 0$,			3
	3	interpretiert die Formel für $p(\text{Pasch})$, nennt und begründet die Bedingung für das Auftreten ihres Minimalwerts.			2
		Summe Teilaufgabe e)		**5**	**5**
		Summe Teilaufgaben a) – e)	**19**	**26**	**5**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe **III** in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

In einer Urne liegt eine unbekannte Anzahl gleichartiger Kugeln, die Zahldarstellungen (von nun an kurz: Zahlen) von „1“ bis „10“ tragen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit der Zahl „i“ zu ziehen, sei $p_i,\ 1 \leq i \leq 10$.
Aus der Urne wird stets mit Zurücklegen gezogen.

a) In dieser Teilaufgabe können Sie von lauter gleichen Wahrscheinlichkeiten $p_i,\ 1 \leq i \leq 10,$ ausgehen. Es werden sechs Kugeln gezogen und die Zahlen notiert.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Von den 6 Zahlen sind 3 gerade und 3 ungerade.
B: Unter den 6 Zahlen sind genau zweimal die 3 und zweimal die 6.
C: Alle 6 Zahlen sind verschieden.

b) Auch in dieser Teilaufgabe sind alle Wahrscheinlichkeiten p_i identisch.
Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen.
Die Zufallsvariable X gibt die Summe der Zahlen der beiden gezogenen Kugeln an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, *ihren Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.*

c) Angenommen, in der Urne seien jetzt 1200 Kugeln wieder mit den Zahlen von „1“ bis „10“. Für die Wahrscheinlichkeiten p_i, mit denen eine Kugel mit der Zahl „i“ gezogen wird, gelten die Bedingungen

(*) $p_i = i \cdot p_1$ für $1 \leq i \leq 9$
und (**) $p_1 : p_{10} = 1 : 15$.

Berechnen Sie den Wert von p_{10} *und die Anzahl der Kugeln mit der Zahl „10“ in der Urne.*

d) In dieser Teilaufgabe können Sie davon ausgehen, dass 20% der Kugeln in der Urne die Zahl „10“ tragen.

Ermitteln Sie die Mindestanzahl n *von Ziehungen einer Kugel aus der Urne (mit Zurücklegen), um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal eine Kugel mit der Zahl „10“ zu erhalten.*

e) Bei zwei gleichen Zahlen, die nacheinander gezogen werden, spricht man bekanntlich von einem Pasch.

Es werden also zweimal (nach wie vor mit Zurücklegen) je eine Kugel aus der Urne gezogen. Die Wahrscheinlichkeiten p_i, $1 \leq i \leq 10$, seien unbekannt.

Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit p(Pasch) *eines Pasches an.*

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch dann am kleinsten ist, wenn alle Wahrscheinlichkeiten p_i, $1 \leq i \leq 10$*, gleich groß sind.*

(Hilfe: Setzen Sie $p_i = \frac{1}{10} + a_i$ *für* $1 \leq i \leq 10$*.)*

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Graphikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

IV. Prüfungsaufgabe insgesamt:

1. Gesamtsumme der Punkte aus I., II. und III.: 150 Punkte

2. Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Die Zuordnung der Noten (einschließlich der jeweiligen Tendenzen) geht davon aus,

- dass die Note ausreichend (5 Punkte) erteilt wird, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der Gesamtleistung erbracht worden ist.
- dass die Note gut (11 Punkte) erteilt wird, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der Gesamtleistung erbracht worden ist.
- dass die Noten oberhalb und unterhalb dieser Schwellen den Notenstufen annähernd linear zugeordnet werden.

Daraus resultiert die folgende Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	143 – 150
sehr gut	14	135 – 142
sehr gut minus	13	128 – 134
gut plus	12	120 – 127
gut	11	113 – 119
gut minus	10	105 – 112
befriedigend plus	9	98 – 104
befriedigend	8	90 – 97
befriedigend minus	7	83 – 89
ausreichend plus	6	75 – 82
ausreichend	5	68 – 74
ausreichend minus	4	58 – 67
mangelhaft plus	3	49 – 57
mangelhaft	2	40 – 48
mangelhaft minus	1	30 – 39
ungenügend	0	0 – 29