Mathematik

Informationen für die Hand der Lehrerin/des Lehrers

Grundkurs ☐ ☒ Leistungskurs

Jede Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik (Leistungskurs) wird aus 3 Aufgaben gebildet. Für die Bildung der Prüfungsaufgabe gilt:

- **Die Fachlehrerin/der Fachlehrer stellt aus den übermittelten Aufgabensätzen die Prüfungsaufgabe nach folgenden Vorgaben zusammen:**
- **Leistungskurs: Die Prüfungsaufgabe wird aus 3 Aufgaben – mindestens einer aus jeder Aufgabengruppe – gebildet.**

Für die einzelnen Aufgaben werden lediglich Bewertungspunkte, keine Teilnoten vergeben. Die Notenbildung erfolgt über die Punktzahl der gesamten Prüfungsaufgabe gemäß Nr. IV.

Im Folgenden wird als Beispiel eine Prüfungsaufgabe mit 3 Aufgaben bereitgestellt.

I. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart	**CAS**	Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	✕
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen
2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

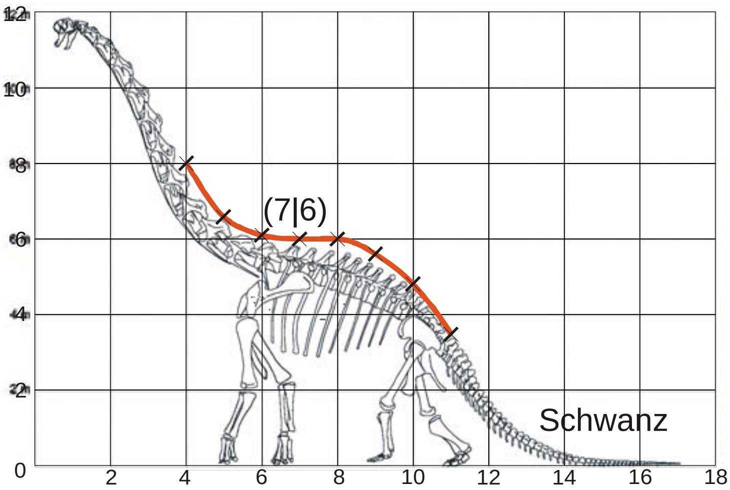
Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

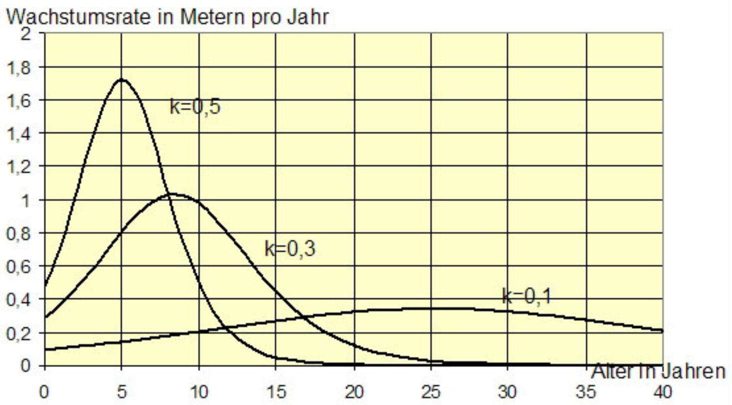
Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen I. Aufgabe

	Lösungsskizze
a)	Gewählt werden z.B. die folgenden Punkte $P_1(4\|8)$, $P_2(7\|6)$ und $P_3(11\|3{,}5)$. Zusätzlich ist bekannt, dass in $P_2(7\|6)$ ein Sattelpunkt vorliegt. Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen für eine Funktion f: (1) $f(4)=8$ (2) $f(7)=6$ (3) $f'(7)=0$ (4) $f''(7)=0$ (5) $f(11)=3{,}5$ Ansatz: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4\cdot ax^3+3\cdot bx^2+2\cdot cx+d$; $f''(x)=12\cdot ax^2+6\cdot bx+2\cdot c$ Es ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem: $\left(\begin{array}{ccccc\|c} 256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 8 \\ 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 & 6 \\ 1372 & 147 & 14 & 1 & 0 & 0 \\ 588 & 42 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 14641 & 1331 & 121 & 11 & 1 & 3{,}5 \end{array}\right)$ Mit der Lösung: $a=\frac{121}{24192}\approx 0{,}005 \wedge b=-\frac{4817}{24192}\approx -0{,}199 \wedge c=\frac{347}{128}\approx 2{,}71$ $\wedge d=-\frac{53725}{3456}\approx -15{,}545 \wedge e=\frac{33065}{864}\approx 38{,}27$ (Alternativ können weitere Punkte bzw. Randbedingungen angegeben werden. Auch die Wahl anderer Punkte ist denkbar und plausibel).
b)	Wertetabelle: <table><tr><td>x</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>8,0</td><td>6,6</td><td>6,1</td><td>6,0</td><td>6,0</td><td>5,6</td><td>4,8</td><td>3,5</td></tr></table>

	
c)	Den Schwanzbereich kann man z.B. mit Hilfe einer e-Funktion modellieren. Begründung: Der Verlauf in diesem Bereich ist charakteristisch für diese Funktionen (monoton, Steigung nimmt kontinuierlich zu, asymptotischer Verlauf). Der Funktionsterm wird nun mit Hilfe exponentieller Regression (ist implementiert in CAS bzw. in Tabellenkalkulationsprogrammen) bestimmt: Wähle für den Schwanzbereich folgende Punkte: x: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y: 3,5, 2, 0,8, 0,5, 0,3, 0,2, 0,1 Der Graph der Funktion $s(x) = 1886{,}076 \cdot 0{,}559658^x$ approximiert die Punkte recht gut. Allerdings enthält der Graph von s den Punkt (11|3,5) nicht ($s(11) \approx 3{,}2$). (Alternativ kann der Schwanz z.B. auch durch ein Polynom approximiert werden.) Der Kopfbereich hat die Form einer Parabel. Man kann voraussetzen, dass die Parabel ihren Scheitelpunkt im Punkt (0,8|11,8) hat. Der Punkt (4|8) liegt ebenfalls auf dem Graphen. Es gilt: $p(x) = c \cdot (x - 0{,}8)^2 + 11{,}8$. Einsetzen des zweiten Punktes ergibt: $c = -\frac{95}{256} \approx -0{,}37109$, womit auch dieser Teil des Rückens (begründet) modelliert ist.
d)	Z.B. kann man geeignete Polynome abschnittsweise so definieren, dass keine Unstetigkeitsstellen, Knicke oder Krümmungssprünge auftreten. (Splineinterpolation). Mit der Methode kann man den Rücken nahezu perfekt modellieren, indem man sehr viele einzeln zu berechnende Abschnitte zulässt. Mit wachsender Zahl von Abschnitten wachsen allerdings auch die Komplexität der Rechnung und deren Zeitaufwand. Der Graph des Polynoms 4. Grades modelliert bzgl. der Approximation den Rücken nicht allzu gut. (s. Abb. in der Lösung zu Teilaufgabe b), zu große Abstände des Graphen zum Rückenverlauf zwischen 7<x<10). Andererseits kann mit **einem** Polynom z.B. vom Grade 4 deutlich einfacher umgegangen werden als mit anderen Verfahren (z.B. Spline-Verfahren).
e)	Vorab wird eine konkrete Funktion, die die Größe in Abhängigkeit vom Alter (T) beschreibt: $g_{k,h}(T) = 0{,}4 + \int_0^T w_{k,h}(t)\,dt = 0{,}4 + \left.\frac{-625 \cdot h}{4 \cdot e^{k \cdot t} + 50}\right\|_0^T = 0{,}4 + \left(\frac{625}{54} - \frac{625}{4 \cdot e^{k \cdot T} + 50}\right) \cdot h$ $h_{\text{endgröße}} = \lim_{T \to \infty} g_{k,h}(T)$ stellt ein gutes Modell zur Berechnung seiner endgültigen Größe dar. Mit den

	konkreten Parametern (k=0,27; h=1,1) ergibt sich: $h_{endgröße} = \frac{7091}{540} \approx 13{,}13$. (q.e.d.) Um zu berechnen, wann die Wachstumsrate am größten ist, werden die Extrema von $w_{(0,27),(1,1)}$ bestimmt: Notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema: $w'_{(0,27),(1,1)}(t)=0$ $w'_{(0,27),(1,1)}(t) = \frac{182{,}25 \cdot e^{0,27t} \cdot (50 - 4 \cdot e^{0,27t})}{(50 + 4 \cdot e^{0,27t})^3} \cdot 1{,}1$ Es folgt: $\xrightarrow{CAS} t = \frac{\ln(12{,}5)}{0{,}27} \approx 9{,}355$. Mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums lässt sich die hinreichende Bedingung prüfen. Der Nenner ist immer positiv. Nur der Faktor $50 - 4 \cdot e^{0,27t}$ ist für das Vorzeichen relevant. Der Vorzeichenwechsel ist am Term zu erkennen. Der Graph der Funktion hat nur ein Maximum, d.h., der Brachiosaurier wächst – nach diesen Vorgaben – im Alter von ungefähr 9 Jahren am stärksten. Die Endgröße $h_{endgröße}$ des Dinosauriers hängt mit der Größe im gesuchten Alter $g(t_a)$ wie folgt zusammen: $$g(t_a) = h_{endgröße} \cdot 0{,}95 \approx 12{,}4735$$ Es folgt: $\xrightarrow{CAS} t_a \approx 20{,}4$. Das bedeutet, dass ein Dinosaurier, dessen Wachstum durch die Funktion $w_{(0,27),(1,1)}(t)$ beschrieben wird, nach ungefähr 20 Jahren 95% seiner Endgröße erreicht.
f)	Untersuche z. k=0,1; k=0,3 und k=0,5:  Vermutung aufgrund der Graphen: Je größer der Wert für k ist, je weiter verschiebt sich das Maximum des Graphens der Wachstumsrate nach links.
g)	h ist beliebig wählbar, da es auf den Zeitpunkt des größten Wachstums keinen Einfluss hat (wirkt wie ein „konstanter Faktor“). Bestimmung des Wertes für k: Zu lösen ist: $$\frac{w'_{k,h}(5)}{h} = \frac{625 \cdot k^2 \cdot e^{k \cdot 5} \cdot (25 - 2 \cdot e^{k \cdot 5})}{(25 + 2 \cdot e^{k \cdot 5})^3} = 0$$ Man erhält: $k = \frac{\ln(12{,}5)}{5} \approx 0{,}51$. Die 2. Lösung k=0 kann ausgeschlossen werden, da sie nicht im Definitionsbereich von k liegt. Bei einem k von ungefähr 0,51 hat der Saurier nach 5 Jahren den größten Wachstumsschub, d.h. die Wachstumsrate ist am größten.

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien I. Aufgabe

Teil-aufgabe		Anforderung	Lösungsqualität Anforderungsbereich		
		Der Prüfling	**I**	**II**	**III**
Teilaufgabe I.a	1	gibt geeignete Bedingungen für den Sattelpunkt an.	2		
	2	wählt weitere adäquate Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms.		3	
	3	bestimmt die Funktionsvorschrift.		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**2**	**5**	**0**
Teilaufgabe I.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	notiert eine geeignete Wertetabelle.	2		
	2	skizziert den Graphen.	3		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**5**	**0**	**0**
Teilaufgabe I.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt begründet geeignete Funktionstypen für den Kopf- und Schwanzbereich an.		4	
	2	gibt geeignete Bedingungen zum Modellieren des Kopf- und des Schwanzbereichs an.		4	
	3	bestimmt geeignete Funktionsterme zur Modellierung des Kopf- und Schwanzbereiches	6		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe c)	**6**	**8**	**0**
Teilaufgabe I.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt bezüglich der verwendeten Modellierung eine Alternative gegenüber der Modellierung mit einem Polynom bzw. der selbst gewählten Methode.	5		
	2	benennt zentrale Vor- bzw. Nachteile der gewählten Methoden		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe d)	**5**	**2**	**0**

		Der Prüfling	I	II	III
Teilaufgabe I.e	1	bestimmt durch Aufsummierung (Integration) die Endgröße des Brachiosaurus gemäß dem gegebenen Modell.		2	
	2	berücksichtigt bei der Berechnung der Endgröße die Anfangsgröße des Sauriers bei der Geburt additiv (Integrationskonstante).			2
	3	bestimmt das Maximum der Wachstumsrate und damit das Alter mit dem größten Wachstumsschub.		3	
	4	berechnet das Alter, in dem der Brachiosaurier – gemäß dem Modell – 95% seiner Endgröße erreicht hat.		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe e)	**0**	**7**	**2**
Teilaufgabe I.f		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt mit Begründungen die innermathematische Bedeutung des Parameters k.		3	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe f)	**0**	**3**	**0**
Teilaufgabe I.g		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt begründet an, dass h beliebig wählbar ist		2	
	2	bestimmt den Parameter k so, dass der größte Wachstumsschub im Alter von 5 Jahren auftritt.			3
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe g)	**0**	**2**	**3**
		Summe Teilaufgaben a) – g)	**18**	**27**	**5**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe I in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

Mathematik und Paläontologie

Computergrafiken gewinnen in unserer Gesellschaft immer größere Bedeutung. Nach den ersten Anfängen in den 80er Jahren hat sich die Computertechnik mittlerweile so weit entwickelt, dass wir sogar in der Lage sind, längst ausgestorbene Lebewesen wieder zum Leben zu erwecken. Nicht nur die Filmindustrie, sondern auch die Wissenschaft hat den Wert der neuen Techniken mittlerweile erkannt. Paläontologen rekonstruieren beispielsweise das Aussehen von Dinosauriern anhand ihrer Skelette. Das komplette Skelett eines ausgewachsenen Brachiosauriers wird im Museum für Naturkunde in Berlin ausgestellt. Das Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik an der TU Berlin hat das Knochengerüst vermessen und grafisch aufgearbeitet:

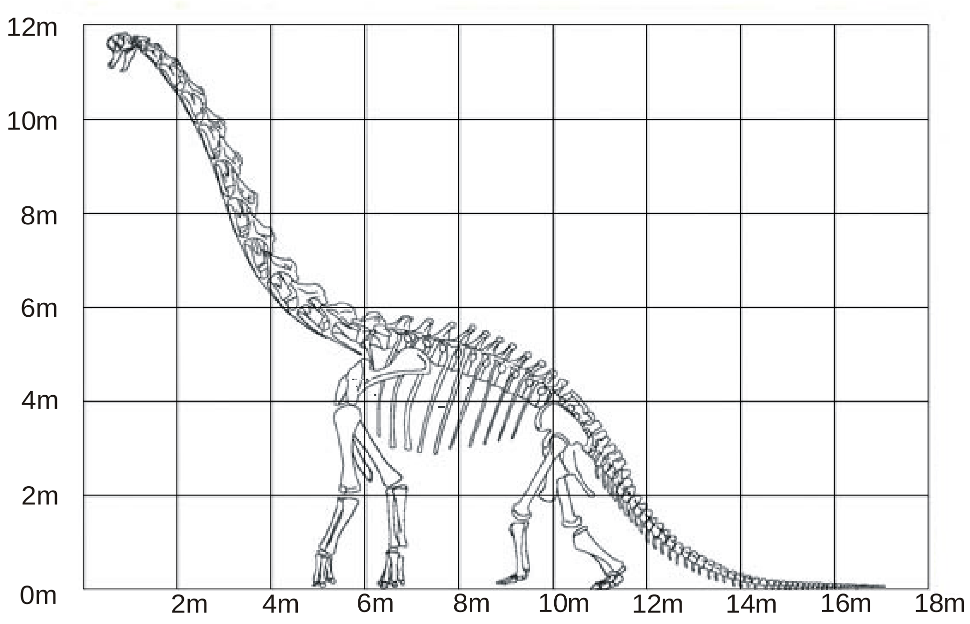


Abbildung 1 (Quelle: http://www.igg.tu-berlin.de/studium/forschung2.phtml)

Die **Haut** über der Wirbelsäule (mit Schwanz) soll mit Hilfe der Graphen von Funktionen modelliert werden. Ziel ist es, so weitere Daten und Informationen über den Saurier gewinnen zu können. Die Linie vom Kopf über die Wirbelsäule bis zum Schwanzende wird im Folgenden stets als **Rücken** bezeichnet.

a) *Ermitteln Sie eine Funktionsvorschrift, deren Graph den Rumpfbereich* ($x \in [4;11]$) *modelliert; gehen Sie dabei davon aus, dass in* P(7|6) *ein Sattelpunkt vorliegt.*

Hinweise: Mögliche Lösung: $\text{dino}(x) = \frac{121}{24192}x^4 - \frac{4817}{24192}x^3 + \frac{347}{128}x^2 - \frac{53725}{3456}x + \frac{33065}{864}$. Es handelt sich nicht um eine optimale Approximation. Achten Sie darauf, dass die von Ihnen gewählte Methode nicht zu viel Zeit in Anspruch nimmt.

b) *Zeichnen Sie den Graphen der Funktion aus Teil a) in die beigefügte Abb. 2 und notieren Sie Ihre Wertetabelle.*

c) *Modellieren Sie den verbleibenden Kopf- und Schwanzbereich jeweils durch geeignete Funktionen und begründen Sie in beiden Fällen Ihre Wahl (ggf. auch mit Hilfe einer Skizze).*

d) *Nennen Sie eine weitere, zu Teilaufgabe a) alternative Methode, die den Rumpfbereich des Saurierrückens funktional modelliert. (Berechnungen sind nicht durchzuführen).*

Benennen Sie die Vor- und Nachteile dieser und der in der Teilaufgabe a) beschriebenen Modellierung.

Brachiosaurier fingen auch klein an. Kurz nach dem Schlüpfen hatten die Tiere eine Größe von ungefähr 40cm. Ihre endgültige Höhe (Abstand vom Boden zur höchsten Stelle des Körpers) erreichten Brachiosaurier nach ungefähr 30 Jahren. Wie schnell die Tiere genau wuchsen, kann man heute nur noch anhand von Knochenfunden erahnen. Die Knochen weisen – ähnlich wie Bäume – Ringe auf, mit denen sich das Wachstum pro Jahr schätzen lässt.

Im Folgenden (Wachstumsmodell) wird davon ausgegangen, dass die Wachstumsrate von Tieren (in Metern pro Jahr) durch Funktionen des Typs

$$w_{k,h}(t) = \frac{2500 \cdot k \cdot e^{k \cdot t}}{\left(4 \cdot e^{k \cdot t} + 50\right)^2} \cdot h, \quad k,t,h \in \mathbb{R}^+$$

(t ist die Zeit in Jahren) gut beschrieben wird.

e) *Zeigen Sie, dass ein Brachiosaurier, dessen Wachstumsrate durch* $w_{k,h}(t)$ *mit* k=0,27 *und* h=1,1 *beschrieben wird, größer als 13m wird.*

Bestimmen Sie das Alter des Brachiosauriers, in dem er nach diesem Wachstumsmodell am stärksten wächst und das Alter, in dem er 95% seiner Endgröße erreicht hat.

f) *Beschreiben Sie für* h=1,1 *den Einfluss, den der Parameter* k *auf die Wachstumsrate der Brachiosaurier nimmt, untersuchen Sie dazu unterschiedliche Werte für* k.

g) *Bestimmen Sie geeignete Werte für* h *und* k *unter der Annahme, dass ein Brachiosaurier im Alter von 5 Jahren den größten Wachstumsschub hat.*

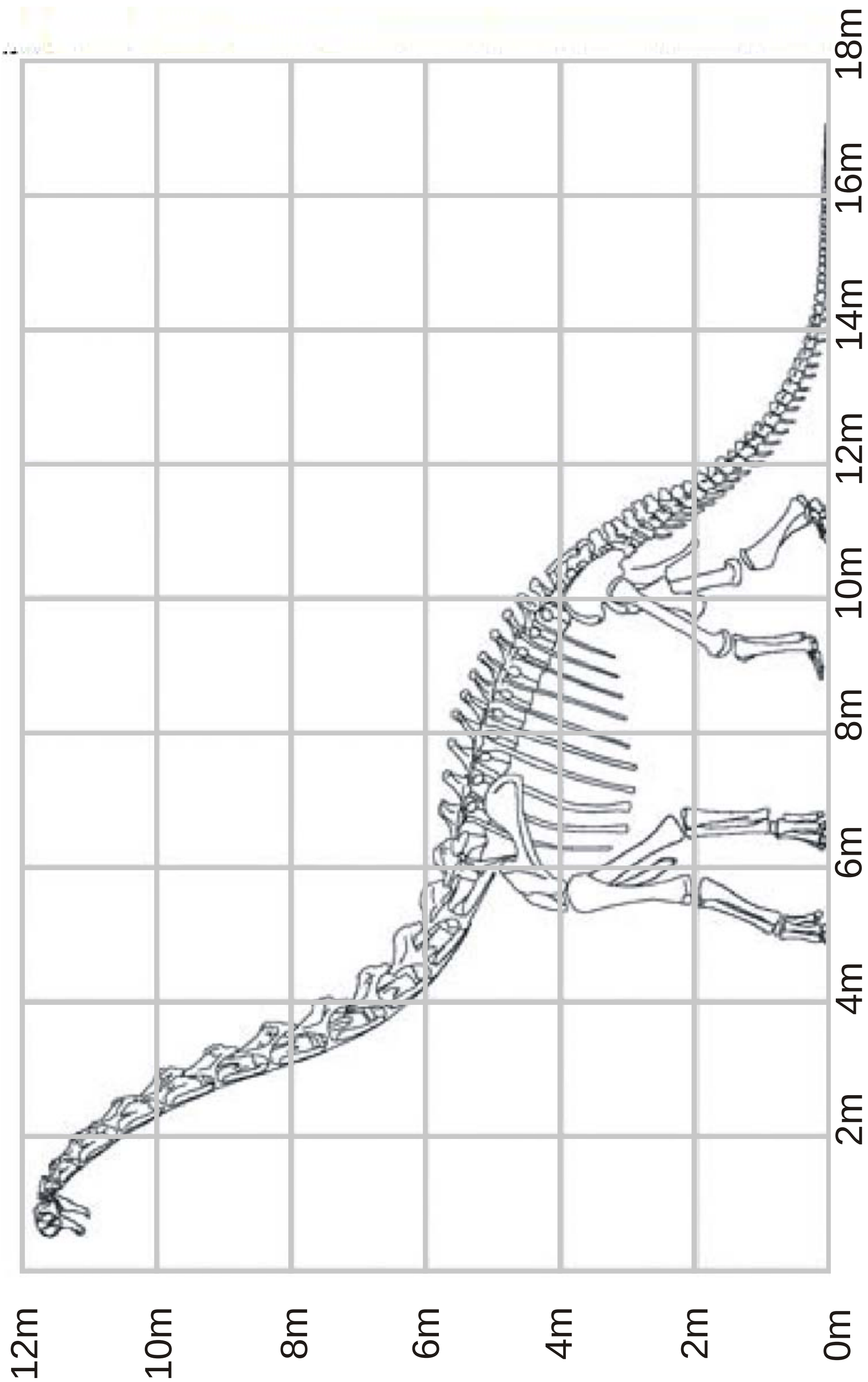


Abbildung 2

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

II. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	
Aufgabenart	**CAS**	Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	**X**
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*

   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandprobleme
   - Abbildungsmatrizen

2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen II. Teilaufgabe

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Koordinaten der Pyramidenpunkte: A(0|0|0), B(10|0|0), C(10|10|0), D(0|10|0), S(5|5|10)

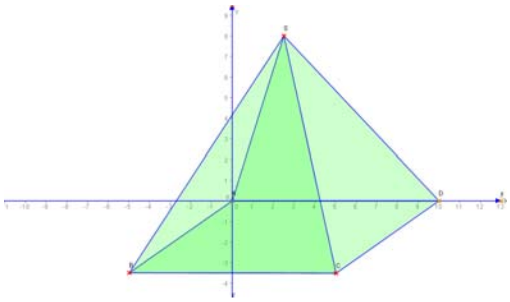
Abbildungsmatrix der Parallelprojektion $R^3 \to R^3$: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

bzw. der entsprechenden axonometrischen Abbildung $R^3 \to R^2$: $A = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbildungsgleichung: $\vec{x}\,' = P \cdot \vec{x}$ bzw. $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$

Koordinaten der Bildpunkte: A'(0|0|0), B'(0|-5|-4), C'(0|5|-4), D'(0|10|0), S'(0|2,5|8)

(bzw. A'(0|0), B'(-5|-4), C'(5|-4), D'(10|0), S'(2,5|8)).


</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
$E_{CDS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad k,l \in R$

Normalenvektor zu E_{CDS} : $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_{CDS} : 2x_2 + x_3 - 20 = 0$

Normalenvektor zu E_{ABC} : $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel φ zwischen E_{ABC} und E_{CDS} :

$\cos\ \varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 63{,}4^\circ$.
</td></tr>
</table>

c) (1) Schnitt von E_{BCP} und g_{AS} : $S_1(3|3|6)$ bzw. E_{BCP} und g_{DS} : $S_2(3|7|6)$.
Überprüfung der Trapezeigenschaften:
$\overrightarrow{S_1S_2} \parallel \overrightarrow{BC}$ und $|\overrightarrow{BS_1}| = |\overrightarrow{CS_2}|$.

Flächeninhalt A des Trapezes:
Trapezhöhe h ist Abstand der Geraden g_{BC} und $g_{S_1S_2}$,

Ebene F durch S_1 senkrecht zu $g_{S_1S_2}$: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 - 3 = 0$,

Schnitt von F mit g_{BC} liefert Q(10|3|0) ,

also h = $\left|\begin{pmatrix}10\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{85} \Rightarrow$ A = $\dfrac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{S_1S_2}|}{2} \cdot \sqrt{85} \approx 64{,}5$.

(2) $E_{BCP} : -6x_1 - 7x_3 + 60 = 0$. Da alle Ebenen parallel, muss gelten: $E_a : -6x_1 - 7x_3 + a = 0$,
für $S \in E_a$ folgt a = 100, für $A \in E_a$ folgt a = 0, also $0 \le a \le 100$.

d) Kugelradius r ist Abstand Kugelmittelpunkt M(5|5|0) zu einer Seitenfläche:

$E_{CDS} : \dfrac{2x_1 + x_3 - 20}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow d(M, E_{CDS}) = \dfrac{-10}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = 2 \cdot \sqrt{5}$

Kugelvolumen $V_K = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^3 = \dfrac{160 \cdot \sqrt{5}\pi}{3} \approx 374{,}4$

Oktaedervolumen $V_O = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 10^3 = \dfrac{2000}{3} \approx 666{,}7$

Vergleich: $V_K \approx 56$ % von V_O

e) Berechnung der neuen Spitzen S_n und S_n' :

S_n liegt auf $g_{MS} : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, s \in R$.

Aus $|AS_n| = 10$

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien II. Aufgabe

Teil-augabe		Anforderung	Lösungsqualität Anforderungs-bereich		
Teilaufgabe II.a		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt die Koordinaten der Pyramidenpunkte an	2		
	2	bestimmt Abbildungsmatrix und zugehörige Abbildungsgleichung		2	
	3	berechnet die Koordinaten der Bildpunkte	2		
	4	zeichnet die Pyramide		2	
		Summe Teilaufgabe a)	**4**	**4**	
Teilaufgabe II.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	bestimmt die Parameterform der Ebenengleichung und formt die Parameterform um in eine Koordinatenform	3		
	2	berechnet mit Hilfe der Formel (Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren) den Winkel zwischen zwei Ebenen als Winkel zwischen zwei Normalenvektoren dieser Ebenen		3	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Musterlösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden ebenfalls mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**3**	**3**	
Teilaufgabe II.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt den geplanten Lösungsweg zum Nachweis der Trapezeigenschaften		2	
	2	stellt die Gleichung der Ebene E_{BCP} auf	2		
	3	bestimmt die Gleichung der Geraden durch A und S bzw. D und S	2		
	4	berechnet die beiden fehlenden Eckpunkte des Trapezes als Schnittpunkt der Ebene E_{BCP} mit jeweils einer der beiden Geraden		2	
	5	weist die Trapezeigenschaften nach (Parallelität der Grundseiten, gleiche Länge der Schenkel)		2	
	6	beschreibt den geplanten Lösungsweg zur Berechnung des Flächeninhalts			2
	7	berechnet die Trapezhöhe, die Länge der Grundseiten und berechnet unter Verwendung der Formel den gesuchten Flächeninhalt		3	
	8	ersetzt in der Gleichung der Ebene E_{BCP} den konstanten Wert 60 durch einen Parameter a			2

			I	II	III
	9	berechnet für die Grenzlagen „Ebene durch S“ bzw. „Ebene durch A“ den Wert des Parameters a und gibt den zulässigen Bereich für den Parameter a an		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Musterlösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden ebenfalls mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe c)	**4**	**11**	**4**
Teilaufgabe II.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	bestimmt die Koordinaten des Kugelmittelpunktes und gibt an, dass der gesuchte Kugelradius dem Abstand des Mittelpunktes zu einer Seitenfläche entspricht		2	
	2	beschreibt ein Verfahren zur Berechnung des Abstandes „Punkt – Ebene“		2	
	3	gibt die Gleichung einer Ebene an, in der eine Seitenfläche liegt	2		
	4	berechnet den gesuchten Radius		2	
	5	berechnet unter Verwendung der jeweiligen Formel das Kugelvolumen, das Pyramidenvolumen und stellt die beiden berechneten Volumina in Beziehung		3	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Musterlösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden ebenfalls mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe d)	**2**	**9**	
Teilaufgabe II.e		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	erläutert, dass die neuen Spitzen auf der Geraden durch M und S liegen und zu jedem Eckpunkt des Quadrates den Abstand 10 haben müssen			2
	2	stellt für die formulierte Bedingung eine Gleichung auf		2	
	3	berechnet die Koordinaten der neuen Spitzen	2		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Musterlösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden ebenfalls mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe e)	**2**	**2**	**2**
		Summe Teilaufgaben a) - e)	**15**	**29**	**6**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe II in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

Eine senkrechte Pyramide hat eine quadratische Grundfläche ABCD mit der Seitenlänge 10 cm. Die Pyramidenspitze sei S(5 | 5 | 10) in einem kartesischen Koordinatensystem der Längeneinheit 1 cm. Die Grundfläche der Pyramide liege in der x_1x_2 – Ebene, die Grundkante AB mit A (0 | 0 | 0) auf der positiven x_1 – Achse.

a) Durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$ ist die Richtung einer Parallelprojektion in die x_2x_3 – Ebene gegeben.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix, die zugehörige Abbildungsgleichung sowie die Koordinaten der Bildpunkte aller Pyramidenpunkte.

Zeichnen Sie das Bild der Pyramide in der x_2x_3 – *Ebene.*

b) *Zeigen Sie, dass die durch die Punkte* C, D *und* S *festgelegte Ebene die Gleichung* $2x_2 + x_3 - 20 = 0$ *erfüllt.*

Ermitteln Sie das Winkelmaß des Winkels, der von der in dieser Ebene liegenden Seitenfläche der Pyramide mit der Grundfläche einschlossen wird.

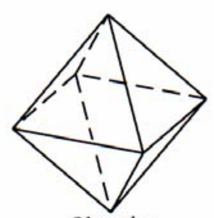
c) (1) Die Pyramide wird bis auf die Ebene, die die Punkte B, C und P(3 | 5 | 6) enthält, abgeschliffen.

Zeigen Sie, dass die Schlifffläche die Form eines gleichschenkligen Trapezes hat, und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

(2) Es gibt unendlich viele Ebenen, die zur Ebene durch B, C und P parallel sind und die Pyramide schneiden.

Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebenenschar E_a, *und geben Sie die zulässigen Werte für* a *an.*

d) Kristalle sind geometrische Körper mit ebenen Flächen und geraden Kanten. Durch Spiegelung an der x_1x_2 – Ebene entsteht aus der obigen Pyramide eine quadratische Doppelpyramide; viele Bergkristalle haben diese Form.



Oktaeder

Aus dem Kristall soll für ein Schmuckstück eine Kugel maximaler Größe geschliffen werden.

Vergleichen Sie das Kugelvolumen mit dem Gesamtvolumen der Doppelpyramide.

e) Unter optimalen Bedingungen bildet ein Bergkristall ein „platonisches“ Oktaeder, d.h. alle Kanten haben dieselbe Länge.

Aus der quadratischen Doppelpyramide in d) wird ein Oktaeder maximaler Größe geschliffen.

Ermitteln Sie die Koordinaten seiner Spitzen.

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

III. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart	**CAS**	Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	✘

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1.Inhaltliche Schwerpunkte

- Wahrscheinlichkeit
- Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

2. Medien/Materialien

./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen III. Aufgabe

	Lösungsskizze
a)	Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt berechnet: $p(A)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\approx 0{,}313$; $p(B)=\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2}{10^6}\approx 0{,}006$; $p(C)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^6}\approx 0{,}151$
b)	Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist: x_i: 2, 3, 4, 5, …, 10, 11, 12, ..., 18, 19, 20 $P(X=x_i)$: $\frac{1}{10^2}$, $\frac{2}{10^2}$, $\frac{3}{10^2}$, $\frac{4}{10^2}$, …, $\frac{9}{10^2}$, $\frac{10}{10^2}$, $\frac{9}{10^2}$, …, $\frac{3}{10^2}$, $\frac{2}{10^2}$, $\frac{1}{10^2}$ Erwartungswert $E(X)=\frac{1}{10^2}(2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+...+18\cdot 3+19\cdot 2+20\cdot 1)=11$. Berechnung der Varianz: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=137{,}50-121=16{,}5$. Also ist $\sigma=\sqrt{V(X)}\approx 4{,}06$.
c)	$p_1:p_{10}=1:15 \Rightarrow p_{10}=15p_1$. Mit $p_i=i\cdot p_1$ für $1\le i\le 10$ folgt weiter $p_1\cdot(1+...+9+15)=1$ $\Rightarrow p_1=\frac{1}{60}$ und $p_{10}=\frac{1}{4}$. Also ist $1200\cdot p_{10}=300$ die Anzahl der Kugeln mit der Zahl 10.
d)	Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $p_{10}=0{,}2$, die Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p_{10}=0{,}8$. Die Wahrscheinlichkeit für n Misserfolge in Serie ist $0{,}8^n$. Sie ist wegen $0{,}8^n\le 0{,}01 \Leftrightarrow n\ln 0{,}8\le \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n\ge\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}\approx 20{,}6$ von der Mindestanzahl $n=21$ von Ziehungen an kleiner als 1%, die Erfolgswahrscheinlichkeit also größer als 99%.
e)	$p(\text{Pasch})=\sum_{i=1}^{10}p_i^2=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{10}+a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{10}a_i+a_i^2\right)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\sum_{i=1}^{10}a_i+\sum_{i=1}^{10}a_i^2$. Aus $p_1+p_2+...+p_{10}=1$ und dem Hinweis $p_i=\frac{1}{10}+a_i$ folgt: $a_1+a_2+...+a_{10}=0$ Daher gilt $p(\text{Pasch})=\frac{1}{10}+\sum_{i=1}^{10}a_i^2$. Da $a_i^2\ge 0$ $(1\le i\le 10)$ ist $p(\text{Pasch})$ am kleinsten, wenn auch jedes einzelne a_i gleich 0 ist, d.h. alle p_i gleich groß sind.

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien III. Teilaufgabe

Teil-aufgabe		Anforderung	Lösungsqualität Anforderungs-bereich		
Teilaufgabe III.a		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	berechnet p(A),	3		
	2	berechnet p(B),		4	
	3	Berechnet p(C).	3		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**6**	**4**	
Teilaufgabe III.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X auf,		5	
	2	berechnet den Erwartungswert,	3		
	3	berechnet die Varianz,	4		
	4	berechnet die Standardabweichung.	2		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**9**	**5**	
Teilaufgabe III.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	berechnet aus den gegebenen Daten durch Umformen und Einsetzen den Wert von p_{10},		6	
	2	berechnet die Anzahl der Kugeln mit der Zahl 10.		2	
		Summe Teilaufgabe c)		**8**	
Teilaufgabe III.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	betrachtet eine Serie von Misserfolgen und bestimmt die Misserfolgswahrscheinlichkeit,	2		
	2	schätzt die Wahrscheinlichkeit für n Misserfolge ab,		4	
	3	bestimmt $n = 21$ durch Umformen oder Probieren.	2		
		Summe Teilaufgabe d)	**4**	**4**	

		Der Prüfling	I	II	III
Teilaufgabe III.e	1	setzt Wahrscheinlichkeit $p(\text{Pasch})$ an, setzt ein und formt um,		5	
	2	nutzt den Hinweis aus, um zu folgern $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 0$,			3
	3	interpretiert die Formel für $p(\text{Pasch})$, nennt und begründet die Bedingung für das Auftreten ihres Minimalwerts.			2
		Summe Teilaufgabe e)		**5**	**5**
		Summe Teilaufgaben a) – e)	**19**	**26**	**5**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe III in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

In einer Urne liegt eine unbekannte Anzahl gleichartiger Kugeln, die Zahldarstellungen (von nun an kurz: Zahlen) von „1“ bis „10“ tragen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit der Zahl „i“ zu ziehen, sei p_i, $1 \le i \le 10$.
Aus der Urne wird stets mit Zurücklegen gezogen.

a) In dieser Teilaufgabe können Sie von lauter gleichen Wahrscheinlichkeiten p_i, $1 \le i \le 10$, ausgehen. Es werden sechs Kugeln gezogen und die Zahlen notiert.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- *A: Von den 6 Zahlen sind 3 gerade und 3 ungerade.*
- *B: Unter den 6 Zahlen sind genau zweimal die 3 und zweimal die 6.*
- *C: Alle 6 Zahlen sind verschieden.*

b) Auch in dieser Teilaufgabe sind alle Wahrscheinlichkeiten p_i gleich.
Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen.
Die Zufallsvariable X gebe die Summe der Zahlen der beiden gezogenen Kugeln an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, ihren Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

c) Angenommen, in der Urne seien jetzt 1200 Kugeln wieder mit den Zahlen von „1“ bis „10“. Für die Wahrscheinlichkeiten p_i, mit denen eine Kugel mit der Zahl „i“ gezogen wird, gelten die Bedingungen

(*) $p_i = i \cdot p_1$ für $1 \le i \le 9$

und (**) $p_1 : p_{10} = 1 : 15$.

Berechnen Sie den Wert von p_{10} und die Anzahl der Kugeln mit der Zahl „10“ in der Urne.

d) In dieser Teilaufgabe können Sie davon ausgehen, dass 20% der Kugeln in der Urne die Zahl „10“ tragen.

Ermitteln Sie die Mindestanzahl n von Ziehungen einer Kugel aus der Urne (mit Zurücklegen), um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal eine Kugel mit der Zahl „10“ zu erhalten.

e) Bei zwei gleichen Zahlen, die nacheinander gezogen werden, spricht man bekanntlich von einem Pasch. Es werden also zweimal (nach wie vor mit Zurücklegen) je eine Kugel aus der Urne gezogen. Die Wahrscheinlichkeiten $p_i,\ 1 \le i \le 10$, seien unbekannt.

Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit p(Pasch) eines Pasches an.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch dann am kleinsten ist, wenn alle Wahrscheinlichkeiten $p_i,\ 1 \le i \le 10$*, gleich groß sind.*

(Hilfe: Setzen Sie $p_i = \frac{1}{10} + a_i$ *für* $1 \le i \le 10$.)

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

IV. Prüfungsaufgabe insgesamt:

1. Gesamtsumme der Punkte aus I., II. und III.: 150 Punkte

2. Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Die Zuordnung der Noten (einschließlich der jeweiligen Tendenzen) geht davon aus,

- dass die Note ausreichend (5 Punkte) erteilt wird, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der Gesamtleistung erbracht worden ist.
- dass die Note gut (11 Punkte) erteilt wird, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der Gesamtleistung erbracht worden ist.
- dass die Noten oberhalb und unterhalb dieser Schwellen den Notenstufen annähernd linear zugeordnet werden.

Daraus resultiert die folgende Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	143 – 150
sehr gut	14	135 – 142
sehr gut minus	13	128 – 134
gut plus	12	120 – 127
gut	11	113 – 119
gut minus	10	105 – 112
befriedigend plus	9	98 – 104
befriedigend	8	90 – 97
befriedigend minus	7	83 – 89
ausreichend plus	6	75 – 82
ausreichend	5	68 – 74
ausreichend minus	4	58 – 67
mangelhaft plus	3	49 – 57
mangelhaft	2	40 – 48
mangelhaft minus	1	30 – 39
ungenügend	0	0 – 29