Mathematik

Informationen für die Hand der Lehrerin/des Lehrers

Grundkurs ☐ ☒ Leistungskurs

Jede Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik (Leistungskurs) wird aus 3 Aufgaben gebildet. Für die Bildung der Prüfungsaufgabe gilt:

- **Die Fachlehrerin/der Fachlehrer stellt aus den übermittelten Aufgabensätzen die Prüfungsaufgabe nach folgenden Vorgaben zusammen:**

- **Leistungskurs: Die Prüfungsaufgabe wird aus 3 Aufgaben – mindestens einer aus jeder Aufgabengruppe – gebildet.**

Für die einzelnen Aufgaben werden lediglich Bewertungspunkte, keine Teilnoten vergeben. Die Notenbildung erfolgt über die Punktzahl der gesamten Prüfungsaufgabe gemäß Nr. IV.

Im Folgenden wird als Beispiel eine Prüfungsaufgabe mit 3 Aufgaben bereitgestellt.

I. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart	**CAS**	Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	X
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*

   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen

2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

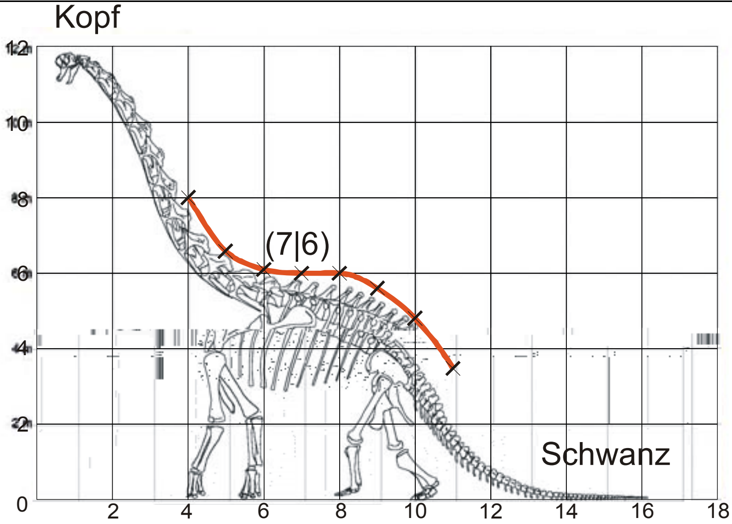
Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen I. Aufgabe

	Lösungsskizze
a)	Gewählt werden z.B. die folgenden Punkte $P_1(4\|8)$, $P_2(7\|6)$ und $P_3(11\|3{,}5)$. Zusätzlich ist bekannt, dass in $P_2(7\|6)$ ein Sattelpunkt vorliegt. Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen für eine Funktion f: (1) $f(4)=8$ (2) $f(7)=6$ (3) $f'(7)=0$ (4) $f''(7)=0$ (5) $f(11)=3{,}5$ Ansatz: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4\cdot ax^3+3\cdot bx^2+2\cdot cx+d$; $f''(x)=12\cdot ax^2+6\cdot bx+2\cdot c$ Es ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem: $\left(\begin{array}{ccccc\|c} 256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 8 \\ 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 & 6 \\ 1372 & 147 & 14 & 1 & 0 & 0 \\ 588 & 42 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 14641 & 1331 & 121 & 11 & 1 & 3{,}5 \end{array}\right)$ Mit der Lösung: $a=\frac{121}{24192}\approx 0{,}005 \wedge b=-\frac{4817}{24192}\approx -0{,}199 \wedge c=\frac{347}{128}\approx 2{,}71$ $\wedge d=-\frac{53725}{3456}\approx -15{,}545 \wedge e=\frac{33065}{864}\approx 38{,}27$ (Alternativ können weitere Punkte bzw. Randbedingungen angegeben werden. Auch die Wahl anderer Punkte ist denkbar und plausibel).
b)	Wertetabelle:

x	4	5	6	7	8	9	10	11
f(x)	8,0	6,6	6,1	6,0	6,0	5,6	4,8	3,5



c)	Den Schwanzbereich kann man z.B. mit Hilfe einer e-Funktion modellieren. Begründung: Der Verlauf in diesem Bereich ist charakteristisch für diese Funktionen (monoton, Steigung nimmt kontinuierlich zu, asymptotischer Verlauf). Der Funktionsterm wird nun mit Hilfe exponentieller Regression (ist implementiert in CAS bzw. in Tabellenkalkulationsprogrammen) bestimmt: Wähle für den Schwanzbereich folgende Punkte: x: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y: 3,5; 2; 0,8; 0,5; 0,3; 0,2; 0,1 Der Graph der Funktion $s(x)=1886{,}076\cdot 0{,}559658^x$ approximiert die Punkte recht gut. Allerdings enthält der Graph von s den Punkt (11|3,5) nicht ($s(11)\approx 3{,}2$). (Alternativ kann der Schwanz z.B. auch durch ein Polynom approximiert werden.) Der Kopfbereich hat die Form einer Parabel. Man kann voraussetzen, dass die Parabel ihren Scheitelpunkt im Punkt (0,8|11,8) hat. Der Punkt (4|8) liegt ebenfalls auf dem Graphen. Es gilt: $p(x)=c\cdot(x-0{,}8)^2+11{,}8$. Einsetzen des zweiten Punktes ergibt: $c=-\frac{95}{256}\approx -0{,}37109$, womit auch dieser Teil des Rückens (begründet) modelliert ist.
d)	Z.B. kann man geeignete Polynome abschnittsweise so definieren, dass keine Unstetigkeitsstellen, Knicke oder Krümmungssprünge auftreten. (Splineinterpolation). Mit der Methode kann man den Rücken nahezu perfekt modellieren, indem man sehr viele einzeln zu berechnende Abschnitte zulässt. Mit wachsender Zahl von Abschnitten wachsen allerdings auch die Komplexität der Rechnung und deren Zeitaufwand. Der Graph des Polynoms 4. Grades modelliert bzgl. der Approximation den Rücken nicht allzu gut. (s. Abb. in der Lösung zu Teilaufgabe b), zu große Abstände des Graphen zum Rückenverlauf zwischen 7<x<10). Andererseits kann mit **einem** Polynom z.B. vom Grade 4 deutlich einfacher umgegangen werden als mit anderen Verfahren (z.B. Spline-Verfahren).
e)	Vorab wird eine konkrete Funktion, die die Größe in Abhängigkeit vom Alter (T) beschreibt, aufgestellt: $g_{k,h}(T)=0{,}4+\int_0^T w_{k,h}(t)\,dt=0{,}4+\left.\frac{-625\cdot h}{4\cdot e^{k\cdot t}+50}\right\|_0^T=0{,}4+\left(\frac{625}{54}-\frac{625}{4\cdot e^{k\cdot T}+50}\right)\cdot h$ $h_{endgröße}=\lim_{T\to\infty} g_{k,h}(T)$ stellt ein gutes Modell zur Berechnung seiner endgültigen Größe dar. Mit den

konkreten Parametern (k=0,27; h=1,1) ergibt sich: $h_{endgröße} = \frac{7091}{540} \approx 13{,}13$. (q.e.d.)

Um zu berechnen, wann die Wachstumsrate am größten ist, werden die Extrema von $w_{(0,27),(1,1)}$ bestimmt:

Notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema: $w'_{(0,27),(1,1)}(t)=0$

$$w'_{(0,27),(1,1)}(t) = \frac{182{,}25 \cdot e^{0,27t} \cdot (50 - 4 \cdot e^{0,27t})}{(50 + 4 \cdot e^{0,27t})^3} \cdot 1{,}1$$

Es folgt: $\xrightarrow{CAS} t = \frac{\ln(12{,}5)}{0{,}27} \approx 9{,}355$.

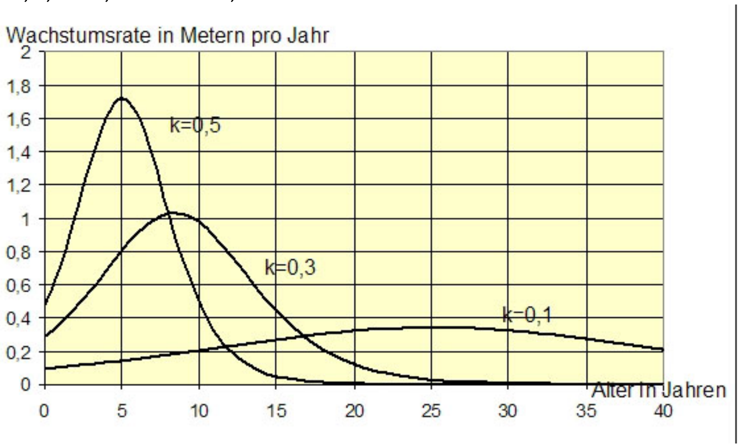
Mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums lässt sich die hinreichende Bedingung prüfen. Der Nenner ist immer positiv. Nur der Faktor $50 - 4 \cdot e^{0,27t}$ ist für das Vorzeichen relevant. Der Vorzeichenwechsel ist am Term zu erkennen. Der Graph der Funktion hat nur ein Maximum, d.h., der Brachiosaurier wächst – nach diesen Vorgaben – im Alter von ungefähr 9 Jahren am stärksten.

Die Endgröße $h_{endgröße}$ des Dinosauriers hängt mit der Größe im gesuchten Alter $g(t_a)$ wie folgt zusammen:

$$g(t_a) = h_{endgröße} \cdot 0{,}95 \approx 12{,}4735$$

Es folgt: $\xrightarrow{CAS} t_a \approx 20{,}4$. Das bedeutet, dass ein Dinosaurier, dessen Wachstum durch die Funktion $w_{(0,27),(1,1)}(t)$ beschrieben wird, nach ungefähr 20 Jahren 95% seiner Endgröße erreicht.

f) Untersuche z.B.: k=0,1; k=0,3 und k=0,5:



Vermutung aufgrund der Graphen: Je größer der Wert für k ist, je weiter verschiebt sich das Maximum des Graphens der Wachstumsrate nach links.

g) h ist beliebig wählbar, da es auf den Zeitpunkt des größten Wachstums keinen Einfluss hat (wirkt wie ein „konstanter Faktor").
Bestimmung des Wertes für k:
Zu lösen ist:

$$\frac{w'_{k,h}(5)}{h} = \frac{625 \cdot k^2 \cdot e^{k \cdot 5} \cdot (25 - 2 \cdot e^{k \cdot 5})}{(25 + 2 \cdot e^{k \cdot 5})^3} = 0$$

Man erhält: $k = \frac{\ln(12{,}5)}{5} \approx 0{,}51$. Die 2. Lösung k=0 kann ausgeschlossen werden, da sie nicht im Definitionsbereich von k liegt.

Bei einem k von ungefähr 0,51 hat der Saurier nach 5 Jahren den größten Wachstumsschub, d.h. die Wachstumsrate ist am größten.

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien I. Aufgabe

Teilaufgabe		Anforderung	Lösungsqualität – Anforderungsbereich I	II	III
Teilaufgabe I.a		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt geeignete Bedingungen für den Sattelpunkt an.	2		
	2	wählt weitere adäquate Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms.		3	
	3	bestimmt die Funktionsvorschrift.		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**2**	**5**	**0**
Teilaufgabe I.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	notiert eine geeignete Wertetabelle.	2		
	2	skizziert den Graphen.	3		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**5**	**0**	**0**
Teilaufgabe I.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt begründet geeignete Funktionstypen für den Kopf- und Schwanzbereich an.		4	
	2	gibt geeignete Bedingungen zum Modellieren des Kopf- und des Schwanzbereichs an.		4	
	3	bestimmt geeignete Funktionsterme zur Modellierung des Kopf- und Schwanzbereiches	6		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe c)	**6**	**8**	**0**
Teilaufgabe I.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt bezüglich der verwendeten Modellierung eine Alternative gegenüber der Modellierung mit einem Polynom bzw. der selbst gewählten Methode.	5		
	2	benennt zentrale Vor- bzw. Nachteile der gewählten Methoden		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe d)	**5**	**2**	**0**

		Der Prüfling	I	II	III
Teilaufgabe I.e	1	bestimmt durch Aufsummierung (Integration) die Endgröße des Brachiosaurus gemäß dem gegebenen Modell.		2	
	2	berücksichtigt bei der Berechnung der Endgröße die Anfangsgröße des Sauriers bei der Geburt additiv (Integrationskonstante).			2
	3	bestimmt das Maximum der Wachstumsrate und damit das Alter mit dem größten Wachstumsschub.		3	
	4	berechnet das Alter, in dem der Brachiosaurus – gemäß dem Modell – 95% seiner Endgröße erreicht hat.		2	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe e)	**0**	**7**	**2**
Teilaufgabe I.f		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt mit Begründungen die innermathematische Bedeutung des Parameters k.		3	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe f)	**0**	**3**	**0**
Teilaufgabe I.g		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt begründet an, dass h beliebig wählbar ist.		2	
	2	bestimmt den Parameter k so, dass der größte Wachstumsschub im Alter von 5 Jahren auftritt.			3
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe g)	**0**	**2**	**3**
	Summe Teilaufgaben a) – g)		**18**	**27**	**5**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe I in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

Mathematik und Paläontologie

Computergrafiken gewinnen in unserer Gesellschaft immer größere Bedeutung. Nach den ersten Anfängen in den 80er Jahren hat sich die Computertechnik mittlerweile so weit entwickelt, dass wir sogar in der Lage sind, längst ausgestorbene Lebewesen wieder zum Leben zu erwecken. Nicht nur die Filmindustrie, sondern auch die Wissenschaft hat den Wert der neuen Techniken mittlerweile erkannt. Paläontologen rekonstruieren beispielsweise das Aussehen von Dinosauriern anhand ihres Skelette. Das komplette Skelett eines ausgewachsenen Brachiosauriers wird im Museum für Naturkunde in Berlin ausgestellt. Das Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik an der TU Berlin hat das Knochengerüst vermessen und grafisch aufgearbeitet:

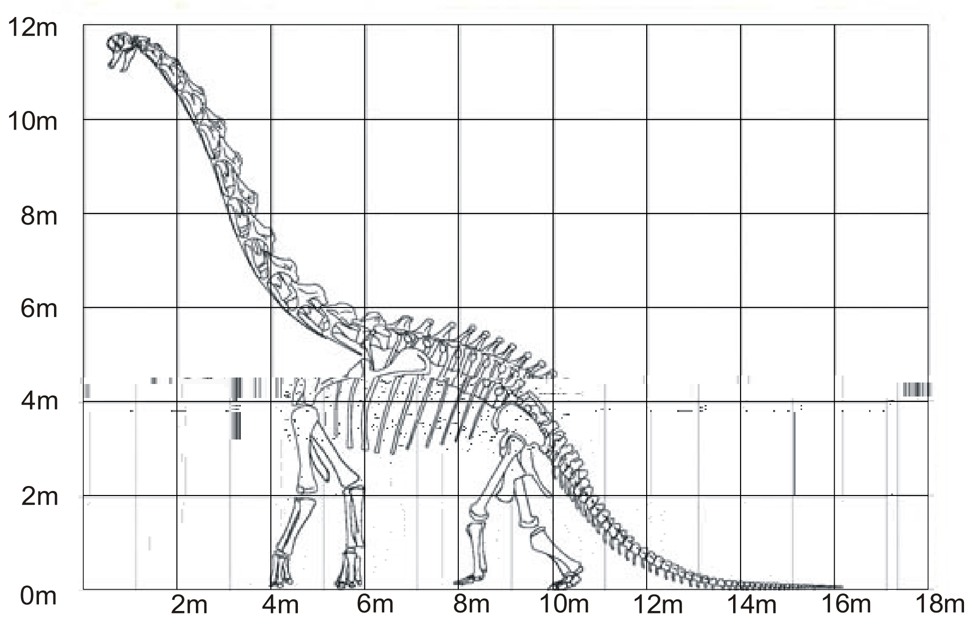


Abbildung 1 (Quelle: http://www.igg.tu-berlin.de/studium/forschung2.phtml)

Die **Haut** über der Wirbelsäule (mit Schwanz) soll mit Hilfe der Graphen von Funktionen modelliert werden. Ziel ist es, so weitere Daten und Informationen über den Saurier gewinnen zu können. Die Linie vom Kopf über die Wirbelsäule bis zum Schwanzende wird im Folgenden stets als **Rücken** bezeichnet.

a) *Ermitteln Sie eine Funktionsvorschrift, deren Graph den Rumpfbereich* ($x \in [4;11]$) *modelliert; gehen Sie dabei davon aus, dass in* P(7|6) *ein Sattelpunkt vorliegt.*

Hinweise: Mögliche Lösung: $\text{dino}(x) = \frac{121}{24192}x^4 - \frac{4817}{24192}x^3 + \frac{347}{128}x^2 - \frac{53725}{3456}x + \frac{33065}{864}$. Es handelt sich nicht um eine optimale Approximation. Achten Sie darauf, dass die von Ihnen gewählte Methode nicht zu viel Zeit in Anspruch nimmt.

b) *Zeichnen Sie den Graphen der Funktion aus Teil a) in die beigefügte Abb. 2 und notieren Sie Ihre Wertetabelle.*

c) *Modellieren Sie den verbleibenden Kopf- und Schwanzbereich jeweils durch geeignete Funktionen und begründen Sie in beiden Fällen Ihre Wahl (ggf. auch mit Hilfe einer Skizze).*

d) *Nennen Sie eine weitere, zu Teilaufgabe a) alternative Methode, die den Rumpfbereich des Saurierrückens funktional modelliert. (Berechnungen sind nicht durchzuführen).*

Benennen Sie die Vor- und Nachteile dieser und der in der Teilaufgabe a) beschriebenen Modellierung.

Brachiosaurier fingen auch klein an. Kurz nach dem Schlüpfen hatten die Tiere eine Größe von ungefähr 40cm. Ihre endgültige Höhe (Abstand vom Boden zur höchsten Stelle des Körpers) erreichten Brachiosaurier nach ungefähr 30 Jahren. Wie schnell die Tiere genau wuchsen, kann man heute nur noch anhand von Knochenfunden erahnen. Die Knochen weisen – ähnlich wie Bäume – Ringe auf, mit denen sich das Wachstum pro Jahr schätzen lässt.

Im Folgenden (Wachstumsmodell) wird davon ausgegangen, dass die Wachstumsrate von Tieren (in Metern pro Jahr) durch Funktionen des Typs

$$w_{k,h}(t) = \frac{2500 \cdot k \cdot e^{k \cdot t}}{\left(4 \cdot e^{k \cdot t} + 50\right)^2} \cdot h, \quad k,t,h \in \mathbb{R}^+$$

(t ist die Zeit in Jahren) gut beschrieben wird.

e) *Zeigen Sie, dass ein Brachiosaurier, dessen Wachstumsrate durch* $w_{k,h}(t)$ *mit* k=0,27 *und* h=1,1 *beschrieben wird, größer als 13m wird.*

Bestimmen Sie das Alter des Brachiosauriers, in dem er nach diesem Wachstumsmodell am stärksten wächst und das Alter, in dem er 95% seiner Endgröße erreicht hat.

f) *Beschreiben Sie für* h=1,1 *den Einfluss, den der Parameter* k *auf die Wachstumsrate der Brachiosaurier nimmt, untersuchen Sie dazu unterschiedliche Werte für* k.

g) *Bestimmen Sie geeignete Werte für* h *und* k *unter der Annahme, dass ein Brachiosaurier im Alter von 5 Jahren den größten Wachstumsschub hat.*

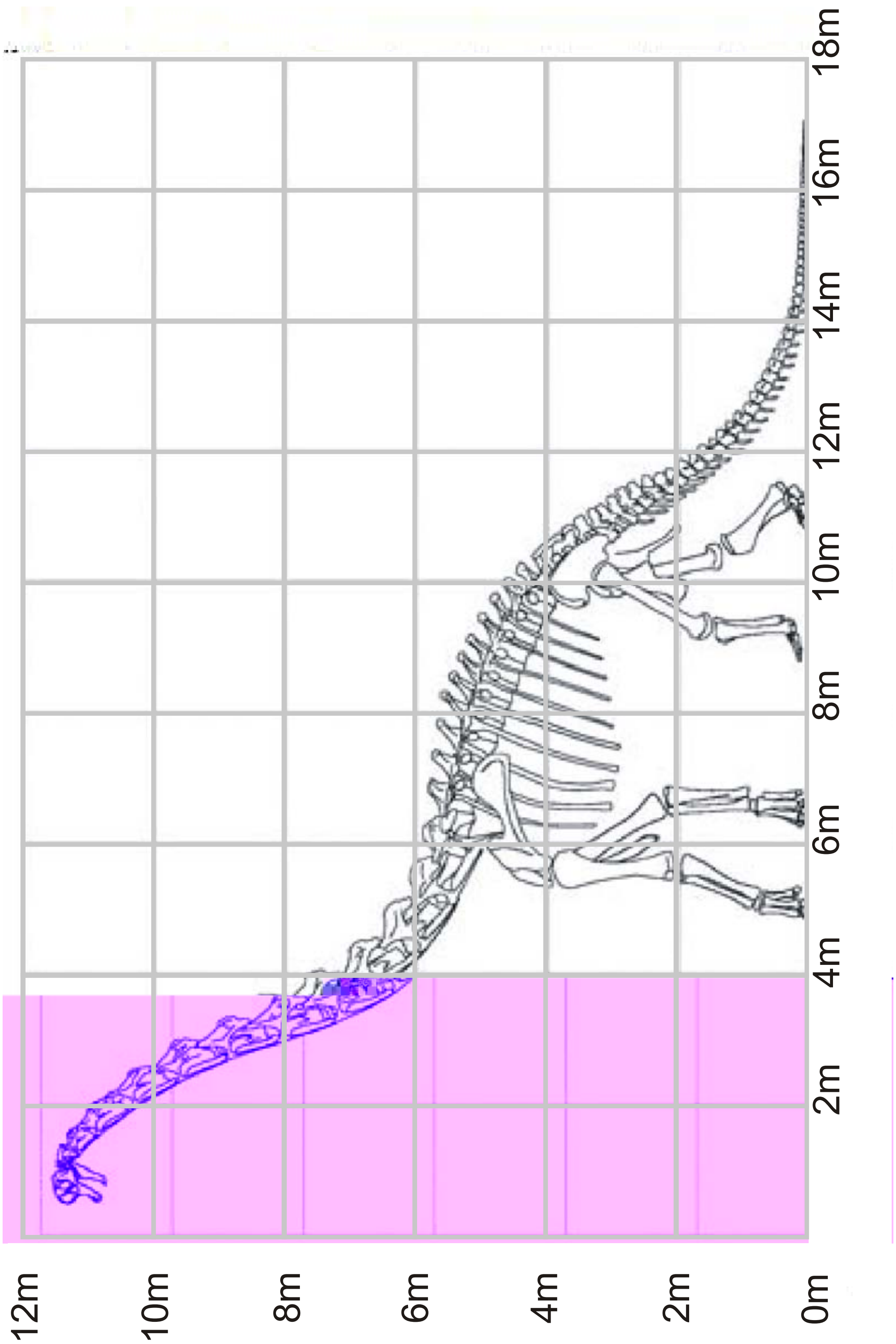


Abbildung 2

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

II. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	
Aufgabenart	**CAS**	Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	X
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

- Die Aufgabenstellung ist (weitgehend) entnommen aus Sekundarstufe II, Gymnasium/Gesamtschule – Aufgabenbeispiele, Schriftenreihe Schule in NRW, Nr. 4720/1 (vgl. ebenso „Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 1.12.1989 i.d.F. vom 24.5.2002)

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen, Fixvektoren

2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

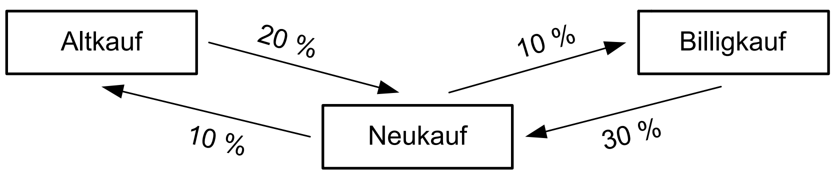
Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen II. Aufgabe

	Lösungsskizze
a)	 Es sei $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ n_k \end{pmatrix}$ der Anteil der Kunden der 3 Märkte in der k-ten Woche. Die Übergangsmatrix ist dann: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ Der Startvektor ist $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Die Marktanteile nach der 2. Woche sind $A \cdot A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}408 \\ 0{,}22 \\ 0{,}372 \end{pmatrix}$, d. h. 40,8% für Altkauf, 22% für Billigkauf und 37,2% für Neukauf.
b)	Es ist zu untersuchen, ob es einen Vektor gibt mit $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$, d. h. mit $(A - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Die Lösungen des homogenen Gleichungssystems sind: $\vec{x} = r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ Die Marktanteile sind: Altkauf : $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{11} \approx 27{,}27\%$; Billigkauf : $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1} = \frac{2}{11}$ » 18,18% und Neukauf : $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1} = \frac{6}{11} \approx 54{,}55\%$

	Die Fixverteilung ist unabhängig von der Wahl des Startvektors, d. h. auch bei anfänglich gleichen Marktanteilen würde sich langfristig die gleiche Verteilung ergeben. Die entsprechende Übergangsmatrix wäre dann: $A^* = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,69 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$. Als Lösung des Gleichungssystems $A^* \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ergibt sich nur der Nullvektor, d. h. langfristig würden die Marktanteile aller 3 Supermärkte Null sein. Dies lässt sich auch ohne Lösung des Gleichungssystems erkennen, da sich durch die ständige Kundenabwanderung aus dem System die Gesamtzahl der Kunden verringert.
c)	Für die Übergangsmatrix gilt nun: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0,1 \\ 0 & 1-b & 0,1 \\ a & b & 0,8 \end{pmatrix}$. Als Lösungsvektor des Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ergibt sich $\vec{x} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{10a} \\ \frac{1}{10b} \\ 1 \end{pmatrix}$. Wenn die Marktanteile gleich sein sollen, muss gelten: $1 = \frac{1}{10a}$ d. h. a = 0,1, entsprechend b = 0,1. Dies hätte man auch ohne Rechnung vermuten können.
d)	Gegeben sind die Punkte A(0|0), B(3|0), N(0|2). Gesucht ist P (x|0). Verlegung entlang der Straßen: $k_S = 6000 \cdot 5 = 30000$ Verlegung durch das Gelände: $k_G = 8000 \cdot \sqrt{13} \approx 28844,4$, da $\overline{BN}^2 = 3^2 + 2^2$ (Pythagoras) Die Kosten betragen $k(x) = (3-x) \cdot 6000 + \sqrt{x^2+4} \cdot 8000$. Es gilt: $k'(x) = -6000 + \frac{8000x}{\sqrt{x^2+4}}$ und $k''(x) = \frac{32000}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ (CAS), Untersuchung der Randwerte unnötig, da reine Linkskurve (k“>0). Es liegt ein Minimum vor für x=2,27, also hat P die Koordinaten (2,27 | 0). Die Kosten betragen ca. 28583 €. (Der Abzweigungspunkt P muss also ca. 2,27 km vom Markt A entfernt liegen.)

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien II. Aufgabe

Teil-auf-gabe		Anforderung	Lösungsqualität Anforderungs-bereich		
Teilaufgabe II.a		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	stellt die Kundenwanderung in einem Übergangsgraphen dar.	4		
	2	erläutert die Kundenwanderung mit Hilfe der Übergangsmatrix (Interpretation der Werte der Übergangsmatrix).		4	
	3	berechnet die Marktanteile der drei Märkte nach 2 Wochen.		4	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**4**	**8**	**0**
Teilaufgabe II.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	überprüft die Verteilung der Marktanteile hinsichtlich ihres langfristigen Verhaltens.		5	
	2	ermittelt die Werte der festen Verteilung der Marktanteile.	4		
	3	untersucht die langfristige Verteilung der Marktanteile unter Berücksichtigung der Startvorgabe.		4	
	4	ermittelt die Veränderungen der langfristigen Martkanteile bei Kundenabwanderung zum Centralkauf.		4	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**4**	**13**	**0**
Teilaufgabe II.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt die Übergangsmatrix an und löst das LGS.			5
	2	berechnet die Werte für a und b.	4		
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe c)	**4**	**0**	**5**
Teilaufgabe II.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	berechnet die Kosten entlang der bestehenden Straßen bzw. durch das Gelände und vergleicht die Werte.	5		
	2	weist die Existenz des Abzweigungspunktes P nach.		5	
	3	bestimmt die Koordinaten des Punktes P und gibt die minimalen Kosten an.	2		

		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe d)	**7**	**5**	**0**
		Summe Teilaufgaben a) – d)	**19**	**26**	**5**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe II in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

In der Nähe der zwei Supermärkte Altkauf (A) und Billigkauf (B) wird ein neuer Supermarkt Neukauf (N) eröffnet. Bisher waren die beiden Supermärkte A und B die einzigen größeren Einkaufsmärkte in der Umgebung. Altkauf hatte einen Marktanteil von 60 % und Billigkauf einen Marktanteil von 40 %.
Ein Marktforschungsunternehmen erhält den Auftrag, die zukünftigen Marktpositionen zu analysieren. Die Marktforschungsabteilung des neuen Supermarktes N rechnet mit folgenden wöchentlichen Kundenwanderungen (d. h. Anteil der Kunden, die pro Woche von einem Markt zu einem anderen wechseln):
In jeder Woche werden 20% der bisherigen Kunden von Altkauf zu Neukauf und 30% der Billigkauf-Kunden zu Neukauf wechseln. Außerdem werden jeweils 10% der Neukauf-Kunden wieder zu Altkauf und weitere 10% zu Billigkauf wechseln.

a) *Stellen Sie die Kundenwanderungen in einem Übergangsgraphen dar.*

Erläutern Sie, dass die Kundenwanderung durch die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$ *beschrieben wird.*

Berechnen Sie den Marktanteil für jeden der drei Märkte aufgrund der ermittelten Kundenwanderung nach 2 Wochen.

b) *Überprüfen Sie, ob sich langfristig eine feste Verteilung der Marktanteile der drei Supermärkte ergibt und geben Sie gegebenenfalls diese Verteilung an.*

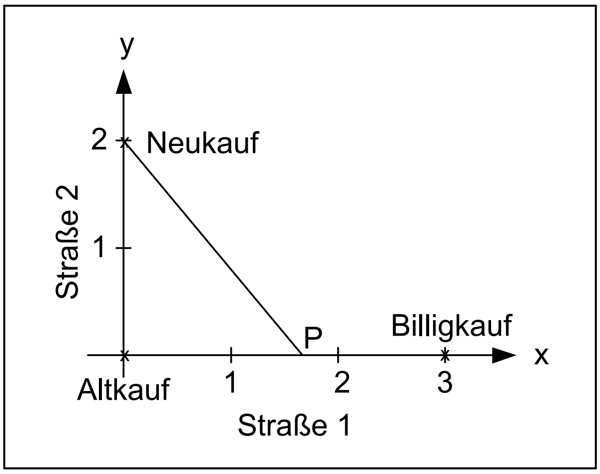
Untersuchen Sie, ob sich die langfristige Verteilung der Marktanteile der drei Supermärkte ändern würde, wenn Altkauf und Billigkauf vor der Eröffnung von Neukauf die gleichen Marktanteile gehabt hätten.

Ermitteln Sie die Veränderungen der langfristigen Marktanteile, wenn nach einigen Wochen wöchentlich etwa 1% der Kunden von Billigkauf zu einem weiter entfernten Supermarkt Centralkauf wechseln würden.

c) Neukauf lockt mit Sonderangeboten Käufergruppen von Altkauf und Billigkauf.

Ermitteln Sie die Werte für die Kundenwanderungsquoten a (Wechselanteil von Altkauf zu Neukauf) und b (Wechselanteil von Billigkauf zu Neukauf), für die die Märkte Altkauf, Billigkauf und Neukauf auf lange Sicht gleiche Marktanteile hätten, wenn angenommen wird, dass gleichzeitig die Kundenwanderungsanteile von Neukauf zu Altkauf und von Neukauf zu Billigkauf jeweils 10 % betragen.

d) Die Märkte Altkauf, Billigkauf und Neukauf liegen an zwei Straßen, die sich rechtwinklig bei A kreuzen. Billigkauf liegt 3 km von Altkauf entfernt. Neukauf liegt etwa 2 km von Altkauf entfernt. Da die Märkte Billigkauf und Neukauf zu der gleichen Ladenkette gehören, sollen sie vernetzt werden. Die Verlegung eines entsprechenden Kabels kostet 6000 € pro km, wenn bestehende Schächte entlang einer Straße benutzt werden können, und 8000 € bei Verlegung im freien Gelände.



Berechnen Sie die Kosten bei einer Verlegung entlang der bestehenden Straßen und vergleichen Sie diese mit den Kosten bei einer ausschließlichen Verlegung durch das Gelände.

Zeigen Sie, dass es einen Abzweigungspunkt P *zwischen Altkauf und Billigkauf gibt, so dass die Verlegungskosten minimal sind. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes* P *und geben Sie die minimalen Kosten an.*

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

III. Aufgabe

1. Aufgabenart

Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Analysis	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 1 (Abbildungen)	
Aufgabenart		Aufgabenstellung aus dem Bereich Lineare Algebra/-Geometrie einschl. Alternative 2 (Übergangsmatrizen)	
Aufgabenart	**CAS**	Aufgabenstellung aus dem Bereich Stochastik	✕

2. Aufgabenstellung

s. Anlage (Vorlage der Prüfungsaufgabe für den Prüfling)

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*

   ./.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Für komplexere Teilleistungen werden unterschiedliche Lösungsqualitäten exemplarisch ausdifferenziert, um zu verdeutlichen, unter welchen Bedingungen eine bestimmte Bewertung angemessen ist. Die Angaben dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die hierbei maximal zu erreichende Punktzahl ist in Klammern angegeben. Die Höchstpunktzahl für die Teilaufgabe insgesamt kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in der Regel gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein. Dabei schließt die inhaltliche Leistung eine sachgerechte Verwendung der Fachterminologie ein. Ausnahmen bilden die Fächer Mathematik, Physik, Informatik und Technik sowie Griechisch und Latein im Übersetzungsteil, die die Bewertung der Darstellungsleistung insgesamt in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integrieren. Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den

entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein. Sie ordnet der erreichten Gesamtpunktzahl ein Notenurteil zu, das ggf. gem. § 13 Abs. 6 APO-GOSt abschließend abzusenken ist.

6.2.1 Modelllösungen III. Aufgabe

	Lösungsskizze
a)	i. p (4 verschiedene Ziffern) = $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{10^4}=0{,}504$ ii. p (mindestens eine 0) = 1 – p (keine 0) = $1-\left(\frac{9}{10}\right)^4=0{,}3439$ iii. p (genau zweimal zwei verschiedene Ziffern in beliebiger Reihenfolge) = $\frac{10\cdot 9\cdot\binom{4}{2}}{10^4}=0{,}054$
b)	Bei 10000 verkauften Losen müsste der Reingewinn pro Los 8€ betragen, damit insgesamt 80000€ Reinerlös erzielt werden. Zufallsvariable X: Reinerlös pro Los, $E(X)=8$. Für den Preis a eines Loses gilt: $E(X)=8=a-\frac{1}{10^4}\cdot(2000+3\cdot 1000+56\cdot 100+940\cdot 10)\quad\Leftrightarrow\quad a=10$. Der Eintrittspreis beträgt 100€. 6. p(wenigstens ein Preis) = 1 – p (kein Preis) = $1-\frac{\binom{9000}{10}}{\binom{10000}{10}}=0{,}651$ 7. p(wenigstens ein Preis) = 1 – p (kein Preis) = $1-0{,}999^{1000}=0{,}632$
c)	Problem: Wie lässt sich das Platzangebot möglichst ausschöpfen bei geringem Risiko der Überbelegung bzw. zu vieler leerer Plätze? Vorschlag: $n=1366$ Einladungen sollen verschickt werden. Dann sind mit 99%iger Wahrscheinlichkeit 956 ± 44 Teilnehmer zu erwarten. Das Risiko, dass mehr als 1000 bzw. weniger als 912 Einladungen angenommen werden, liegt jeweils unter 0,5%. Bei einer geringeren Zahl von Einladungen steigt das Risiko, dass zu viele Plätze im Saal frei bleiben. Rechnerische Begründung: Die Teilnehmerzahl ist binomialverteilt mit der Anzahl der Einladungen n und $p=0{,}7$, der Erwartungswert ist $\mu=n\cdot p$, die Standardabweichung $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$. Mit 99%iger Wahrscheinlichkeit liegt die erwartete Teilnehmerzahl im Intervall $\left[\mu-2{,}58\sigma;\ \mu+2{,}58\sigma\right]$. Das Risiko, dass die 1000 Plätze im Saal nicht ausreichen, beträgt nur 0,5%. Durch Probieren oder Lösen einer quadratischen Ungleichung für $\sqrt{n}$, (CAS!) erhält man für $n=1366$ den größten Wert des Terms $n\cdot p+2{,}58\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ unterhalb von 1000. Bedingung $n\cdot p\cdot(1-p)=286{,}86>9$ erfüllt. Als Reinerlös sind $76480\text{ €}\pm 3520\text{ €}$ zu erwarten, im Mittel also deutlich weniger als die angestreb-

	ten 80000 €. (Nicht vergebene Preise könnten allerdings die Bilanz verbessern.) Auf der Basis von 1366 Einladungen und dem zugehörigen Erwartungswert von 956 Teilnehmern müsste der Eintrittspreis neu kalkuliert werden, um auf 80000 € Reinerlös zu kommen. (Ebenso sind Vorschläge auf der Basis anderer Konfidenzintervalle möglich.)
d)	Zweiseitiger Hypothesentest. Hypothese: Es gilt $p = 0,5$. Stichprobenumfang n=20, Signifikanzniveau: 10%. $\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0,5 = 10$, Ermittlung des Annahmebereichs z.B. durch Vergleich von $P(6 \leq \mu \leq 14) \approx 0,9586$ und $P(7 \leq \mu \leq 13) \approx 0,8846$: $[6;14]$ Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese, falls die Anzahl der Frauen kleiner 5 oder größer 14 ist. Da 14 (=Anzahl der Frauen) im Annahmebereich liegt, kann die Vermutung der Veranstalter beibehalten werden; ansonsten würde sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1 - P(7 \leq X \leq 13) \approx 0,115$ (ca. 11,5%) zu Unrecht abgelehnt.

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien III. Aufgabe

Teil-auf-gabe		Anforderung	Lösungsqualität Anforderungs-bereich		
Teilaufgabe III.a		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	berechnet die Wahrscheinlichkeit p (4 verschiedene Ziffern).	3		
	2	berechnet die Wahrscheinlichkeit p (mindestens eine 0).		3	
	3	berechnet die Wahrscheinlichkeit p (genau zweimal zwei verschiedene Ziffern in beliebiger Reihenfolge).		4	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe a)	**3**	**7**	
Teilaufgabe III.b		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	begründet und beschreibt die Zufallsvariable.		3	
	2	berechnet ihren Erwartungswert und den Los- und Eintrittspreis.	6		
	3	berechnet p (wenigstens ein Preis) bei zwei unterschiedlichen Voraussetzungen.		6	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe b)	**6**	**9**	
Teilaufgabe III.c		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	beschreibt das Problem, formuliert einen Vorschlag, entscheidet sich für ein Konfidenzintervall.			4
	2	gibt den Term für die obere Grenze des Konfidenzintervalls an, ermittelt n, den Erwartungswert und die Intervallgrenzen.	6		
	3	berechnet den Mittelwert und die Grenzen des Reinerlöses.		2	
	4	vergleicht mit dem Sollwert und nennt die Notwendigkeit der Neuberechnung des Eintrittspreises.			2
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe c)	**6**	**2**	**6**
Teilaufgabe III.d		**Der Prüfling**	**I**	**II**	**III**
	1	gibt als Lösungsansatz an: zweiseitiger Hypothesentest mit H_0: $p = 0{,}5$ für den Stichprobenumfang n=20 auf dem Signifikanzniveau 10%		3	
	2	ermittelt den Annahmebereich und formuliert die Entscheidungsregel	4		

	3	beurteilt die Stichprobe, in der 14 Frauen 6 Männern gegenüberstehen		4	
		Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.			
		Summe Teilaufgabe d)	**4**	**7**	
		Summe Teilaufgaben a) – d)	**19**	**25**	**6**

Zwischensumme aus 6.2.2: 50 Punkte

Anlage

(Aufgabe III in der Form, in der sie den Prüflingen vorgelegt wird)

Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

Aufgabenstellung:

Ein renommierter Club plant eine Wohltätigkeitsveranstaltung in einem Saal, der 1000 Personen fasst.
Für seinen Eintrittspreis erhält jeder der Veranstaltungsteilnehmer 10 Lose. Alle 10000 Lose tragen unterschiedliche Kombinationen aus 4 Ziffern von 0000 bis 9999.
Gehen Sie zunächst davon aus, dass 1000 Personen an der Veranstaltung teilnehmen.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einem Los*

(1) 4 verschiedene Ziffern stehen,
(2) mindestens eine 0 unter den 4 Ziffern vorkommt,
(3) genau zweimal zwei verschiedene Ziffern in beliebiger Reihenfolge stehen.

b) Die Veranstalter haben insgesamt 1000 Preise ausgesetzt: einen ersten Preis im Wert von 2000 €, drei zweite Preise im Wert von je 1000 €, 56 dritte Preise im Wert von je 100 € und 940 Trostpreise im Wert von je 10 €.

Ermitteln Sie den Eintrittspreis, wenn die Veranstalter einen Reinerlös von 80000 € erzielen wollen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilnehmer der Veranstaltung erwarten darf, wenigstens einen Preis zu gewinnen, wenn

(1) jedes Los nur einmal gewinnen kann,
(2) jede Losnummer mehrmals gezogen werden kann. (Die Losnummer wird mit Hilfe eines Glücksrads ermittelt.)

c) Erfahrungsgemäß folgen die Eingeladenen der Einladung zu einer Wohltätigkeitsveranstaltung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Die Veranstalter beschließen daraufhin, mehr als 1000 Einladungen zu verschicken.

Beschreiben Sie das vorliegende Problem aus Sicht der Veranstalter und machen Sie einen begründeten Vorschlag für die Anzahl der zu verschickenden Einladungen. Berechnen Sie die Grenzen der zu erwartenden Teilnehmerzahl bezogen auf das Ihrem Vorschlag zu Grunde liegende Risiko.

Nehmen Sie auf der Grundlage Ihres Vorschlags kritisch Stellung zu dem in Teilaufgabe b) angestrebten Reinerlös.

d) Die Veranstalter vermuten, dass das Interesse an Wohltätigkeitsveranstaltungen bei Frauen und Männern gleich groß ist. Daher soll eine Stichprobe von 20 an Wohltätigkeitsveranstaltungen interessierten Personen überprüft werden.

Formulieren Sie einen Test zum Signifikanzniveau 10% und beurteilen Sie damit eine Stichprobe, in der 14 Frauen 6 Männern gegenüberstehen.
(Der Anteil der Frauen und Männer in der Bevölkerung sei gleich)

Anmerkungen:

./.

Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Bearbeitungszeit für alle drei Aufgaben zusammen: 255 Minuten

IV. Prüfungsaufgabe insgesamt:

1. Gesamtsumme der Punkte aus I., II. und III.: 150 Punkte

2. Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Die Zuordnung der Noten (einschließlich der jeweiligen Tendenzen) geht davon aus,

- dass die Note ausreichend (5 Punkte) erteilt wird, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der Gesamtleistung erbracht worden ist.
- dass die Note gut (11 Punkte) erteilt wird, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der Gesamtleistung erbracht worden ist.
- dass die Noten oberhalb und unterhalb dieser Schwellen den Notenstufen annähernd linear zugeordnet werden.

Daraus resultiert die folgende Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	143 – 150
sehr gut	14	135 – 142
sehr gut minus	13	128 – 134
gut plus	12	120 – 127
gut	11	113 – 119
gut minus	10	105 – 112
befriedigend plus	9	98 – 104
befriedigend	8	90 – 97
befriedigend minus	7	83 – 89
ausreichend plus	6	75 – 82
ausreichend	5	68 – 74
ausreichend minus	4	58 – 67
mangelhaft plus	3	49 – 57
mangelhaft	2	40 – 48
mangelhaft minus	1	30 – 39
ungenügend	0	0 – 29