Beispiel-Abiturprüfung

in den Bildungsgängen des Berufskollegs
1. Leistungskurs

Fach Mathematik

Fachbereich Technik

1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

		Aufgabenarten	
Aufgabe 1		Analysis	
		Informationstechnik, Lichtwellenleiter	
Aufgabe 2		Analysis	
		Maschinenbautechnik, Thomas-Birne	
Aufgabe 3		Analytische Geometrie	
		Konstruktions- und Fertigungstechnik, Schräglenker	
Aufgabe 4		Stochastik	
		Informationstechnik, Daten-Generierung	

2 Aufgabenstellung

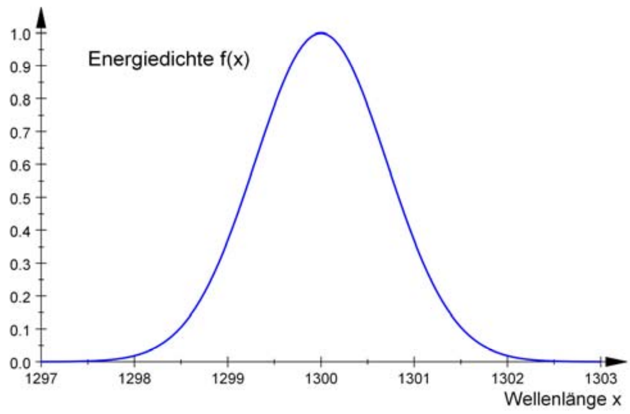
Aufgabe 1:

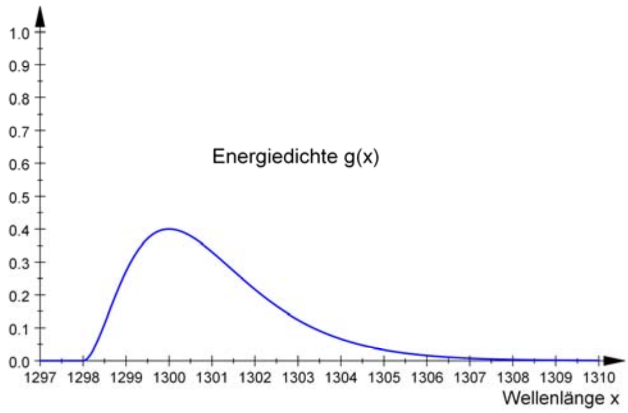
Im Rahmen der Netzwerktechnik werden heute neben den klassischen „Kupferleitungen" zunehmend Lichtwellenleiter (LWL) eingesetzt.

Bei dem hier betrachten Unternehmen geschieht dies zur Verbindung benachbarter Gebäude.

Um die elektrischen Signale auf die LWL „umzusetzen", benötigt man einen sogenannten Medienkonverter, dieser erzeugt einen kurzen Lichtimpuls in der Form einer Gaußschen Glocken-Kurve.

Betrachtet man die Wellenlänge, so kommt es durch verschiedene Dämpfungs-Effekte auf dem LWL nach einer gewissen Laufstrecke zu einer Verzerrung des Lichtsignals (s. Abbildungen).





In der Abbildung wird das ursprüngliche Signal durch die Funktion $f(x) = e^{-(x-1300)^2}$ beschrieben. Dabei gibt x die Wellenlänge an, f(x) ist die Energiedichte, beschreibt also, welche Energie pro (infinitesimalem) Wellenlängenabschnitt gemessen wurde. Die Einheiten der x-Achse sind hier in Nanometer (nm) gewählt, die Einheiten auf der f(x)-Achse sind nicht von Bedeutung und sind so gewählt, dass gilt: f(1300)=1.

1.1 Bestimmen Sie die Wellenlänge, bei der das Maximum der Energiedichte f(x) liegt. (7 Punkte)

1.2 Berechnen Sie die Stellen, an denen die Funktion f(x) Wendepunkte haben kann. (7 Punkte)

1.3 Ermitteln Sie die Breite b des Signals. Für die Breite b muss gelten: $f(1300 \pm 0{,}5 \cdot b) = 0{,}5 \cdot f(1300)$, da bei 1300 nm das Maximum der Energiedichte liegt. (12 Punkte)

1.4 Das Integral $\int_u^v f(x)dx$ beschreibt die Energie des Signals zwischen den Wellenlängen u und v. Begründen Sie ohne Rechnung, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ einen endlichen Wert annimmt. (7 Punkte)

Das verzerrte Signal in der Abbildung lässt sich für durch eine abschnittsweise definierte parametrisierte Funktion beschreiben:

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} a \cdot (x-b)^2 \cdot e^{-(x-b)} \text{ mit } a,b \in \Re^+ & \text{für } x \geq 1298 \\ 0 & \text{für } x < 1298 \end{cases}$$

1.5 Weisen Sie nach, dass für b = 1298 das Maximum der Energiedichte des verzerrten Signals bei $x_m = 1300$ liegt und bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Energiedichte des verzerrten Signals an dieser Stelle auf $g(x_m) = 0{,}4$ abgesunken ist. (7 Punkte)

1.6 Vergleichen Sie den Energieinhalt des verzerrten Signals mit dem Energieinhalt des Ausgangssignals. Wie viel Prozent der Ausgangsenergie sind noch vorhanden? (7 Punkte)

Anleitung:

- Weisen Sie nach, dass die gesamte Ausgangs-Energie gilt: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{\pi}$.

  Dazu können Sie das Ergebnis für das Gaußsche Fehler-Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$ und die Substitutionsregel verwenden.

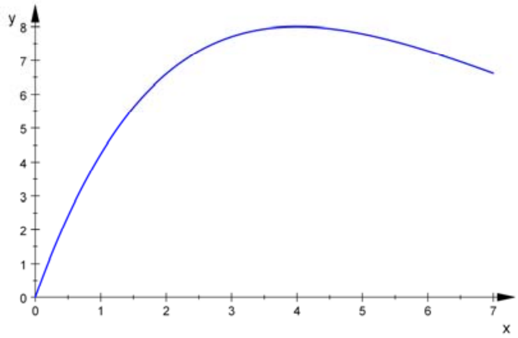
- Berechnen Sie in einem nächsten Schritt die prozentual verbleibende Energie (Beachten Sie bei der Integration: g(x) = 0 für x < 1298).

Falls Sie in Aufgabe 1.5 zu keinen Werten gekommen sind, rechnen Sie mit den Werten a = 0,739 und b = 1298 weiter.

Aufgabe 2:

Das Thomas-Verfahren ist ein so genanntes Blas- oder Windfrischverfahren, bei dem durch Bodendüsen eines Konverters („Thomas-Birne") Luft in flüssiges Roheisen geblasen wird.

Das Foto zeigt eine Thomas-Birne, das Diagramm den Längsschnitt durch eine liegende Thomas-Birne.



(Im Modell gilt: 1 Längeneinheit = 1 m).

Die obere Begrenzung der Fläche kann im 1. Quadranten durch die Funktion f_a mit der Gleichung

$f_a(x) = 2 \cdot x \cdot e^{1-ax}$ mit $0 \le x \le 7$

beschrieben werden.

2.1 Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Durchmesser der oberen Öffnung der Birne 6 m beträgt und ermitteln Sie den maximalen Durchmesser der Birne in Abhängigkeit von a. (7 Punkte)

2.2 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f_a(x)$ auf Wendepunkte und geben Sie deren Koordinaten an. (9 Punkte)

Im Folgenden wird ein spezielle Birne mit dem Wert a=1/4 betrachtet.

2.3 Skizzieren Sie den Graphen von $f_{1/4}(x)$ für $0 \le x \le 7$ in ein geeignetes Koordinatensystem! (7 Punkte)

2.4 Berechnen Sie die Fläche, die entsteht, wenn der Körper längs der x-y-Ebene aufgeschnitten wird! (10 Punkte)

Zur Vereinfachung wird im Folgenden die Näherungsformel

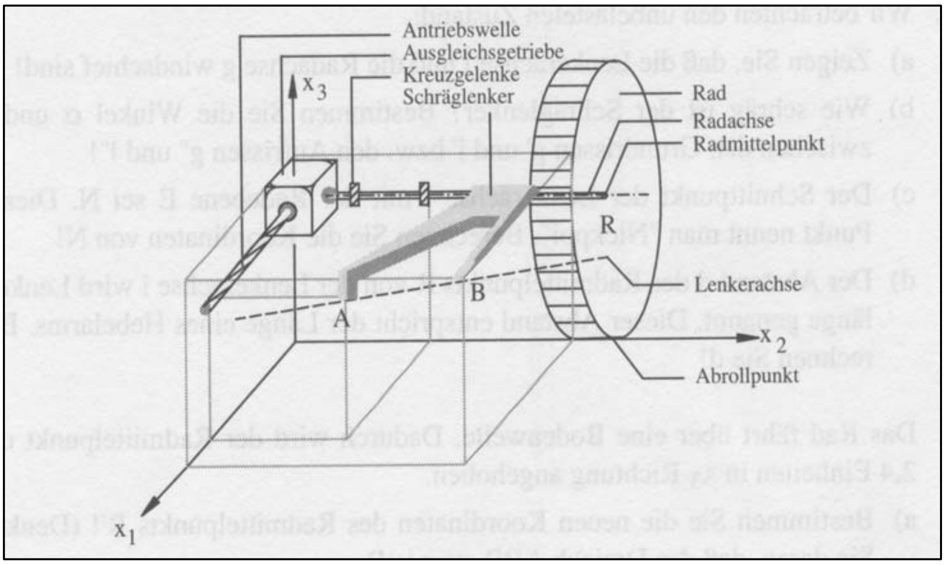
$V_E(h) = -4{,}4h^3 + 57h^2 + 36h$; $0 < h < 7$ für die Berechnung des Volumens in Abhängigkeit der Füllhöhe h verwendet.

2.5 Vergleichen Sie diesen Näherungswert für das Birnenvolumen mit dem mittels Integrationsformel für Rotationskörper $\left(V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \right)$ berechneten Wert und geben Sie die prozentuale Abweichung an! (7 Punkte)

2.6 Das Gesamtvolumen einer Standard Thomas-Birne beträgt 1030 m^3. Zeigen Sie mit einem Näherungsverfahren, in welcher Füllhöhe die Birne zu einem Viertel gefüllt ist (Berechnen Sie 4 Stellen hinter dem Komma)! (7 Punkte)

Aufgabe 3:

Die Achsaufhängung von Personenkraftwagen muss Aufgaben wie z.B. Federungskomfort, Geradeauslauf und Kurvenseitenführung erfüllen. Die Abbildung zeigt schematisch den Aufbau einer Schräglenker-Aufhängung für die Hinterachse eines dort angetriebenen Autos.



Der Schräglenker selbst ist ein massives Bauteil, das auf der einen Seite die Radachse führt. Auf der anderen Seite ist der Schräglenker in den Punkten A und B über einen Zapfen so verbunden, dass er sich um die Achse AB drehen kann. Der Radmittelpunkt R bildet also mit den Punkten A und B ein starres Dreieck, das sich beim Einfedern des Rades um die Achse AB dreht.

Gegeben sind die Punkte A(4|3|3), B(5|6|4) und R(0|7|3) in einem kartesischen Koordinatensystem. Mit der Einheit 100 mm entsprechen diese Zahlen ungefähr der Wirklichkeit. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt auf Straßenhöhe unter der Mitte der Hinterachse, die x_1-Achse zeigt in Fahrtrichtung. Ausgangspunkt ist die Normalstellung des Hinterrades, bei der die Radachse parallel zur x_2-Achse ist.

Man betrachtet zunächst den unbelasteten Zustand:

3.1 Stellen Sie die Geradengleichungen für die Lenkerachse l und die Radachse g auf und zeigen Sie, dass die beiden Geraden windschief sind. (7 Punkte)

3.2 Wie schräg ist der Schräglenker? Bestimmen Sie die Winkel α und β zwischen den Grundrissen g' und l' bzw. den Aufrissen g'' und l''!

(Der Grundriss einer technischen Zeichnung ist die Abbildung aller Elemente in die x_1-x_2-Ebene, der Aufriss ist die Abbildung in die x_2-x_3-Ebene.) (6 Punkte)

3.3 Der Schnittpunkt der Lenkerachse l mit der Radebene E sei N. Diesen Punkt nennt man „Nickpol“. Berechnen Sie die Koordinaten von N!

(Falls Sie in 3.1 kein Ergebnis für die Lenkerachse l bekommen haben,

rechnen Sie mit folgender Gleichung weiter: l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda \in \Re$)

(7 Punkte)

3.4 Der Abstand d des Radmittelpunktes von der Lenkerachse l wird Lenkerlänge genannt. Berechnen Sie d! (7 Punkte)

Das Rad fährt über eine Bodenwelle. Dadurch wird der Radmittelpunkt um 2,4 Einheiten in x_3 - Richtung angehoben.

3.5 Leiten Sie die Koordinaten des neuen Radmittelpunktes R’ her!

(Denken Sie daran, dass das Dreieck ABR starr ist und daher gilt:

$\overline{AR'} = \overline{AR}$ und $\overline{BR'} = \overline{BR}$. Es ändern sich also x_1 und x_2 des neuen Radmittelpunktes! (7 Punkte)

3.6 Begründen Sie ohne Rechnung: Warum muss der Nickpol N auch Punkt der neuen Radebene E’ sein? (7 Punkte)

3.7 Der neue Verlauf der Radachse ist durch die Geradengleichung g´ bestimmt:

$$g´: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}2 \\ 5{,}4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 44 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \Re .$$

Stellen Sie in Koordinatenform eine Gleichung der neuen Radebene E’ auf (Falls Sie in 3.5 kein Ergebnis bekommen haben, rechnen Sie mit R’ (0 | 6,2 | 5,4) weiter). (6 Punkte)

Angelehnt an: Stark Verlagsgesellschaft: Unterrichtsmaterialien Analytische Geometrie. Freising: Stark Verlag 2003, Kapitel S.3

Aufgabe 4:

Ein Computer druckt Buchstaben und Ziffern in zufälliger Reihenfolge unabhängig voneinander aus. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Buchstabens betrage $p = 0{,}4$. Der Computer druckt die Zeichen in so genannten Oktaden aus, das sind Gruppen zu je 8 Zeichen.

4.1 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer beliebigen Oktade die ersten drei Zeichen Buchstaben und der Rest Ziffern sind! (7 Punkte)

4.2 Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer beliebigen Oktade mehr als 2 und weniger als 5 Buchstaben sind! (10 Punkte)

4.3 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer beliebigen Oktade mindestens 5 Buchstaben sind! (7 Punkte)

4.4 Begründen Sie rechnerisch: Wie viele Oktaden müssen mindestens gedruckt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 60 % mindestens eine Oktade erscheint, die nur aus Ziffern besteht? (7 Punkte)

Der Computer wird nun so programmiert, dass die Oktaden in zwei Ordnern BU und ZI gespeichert werden. Überwiegt in einer Oktade die Anzahl der Buchstaben, so wird die Oktade in den Ordner BU gespeichert, andernfalls in den Ordner ZI.

4.5 Zeigen Sie, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer beliebigen Oktade aus BU die letzten zwei Zeichen Buchstaben sind, etwa 42 % entspricht! (7 Punkte)

4.6 Durch einen technischen Fehler sind sämtliche Oktaden in dem Ordner BU gespeichert worden. Bei einer zufällig herausgegriffenen Oktade sind die beiden letzten Zeichen Buchstaben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um eine Oktade handelt, die zu Recht in dem Ordner BU gespeichert worden ist? (9 Punkte)

Binomial-Verteilung, Summenfunktion $F_{n;p}(k) = B_{n;p}(k) + \ldots + B_{n;p}(k)$

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5
8	0	8508	7837	7214	6634	4305	3436	2326	1678	1001	0576	0390	0168	0039
	1	9897	9777	9619	9428	8131	7363	6047	5033	3671	2553	1951	1064	0352
	2	9996	9987	9969	9942	9619	9327	8652	7969	6785	5518	4682	3154	1445
	3		9999	9998	9996	9950	9888	9693	9437	8862	8059	7414	5941	3633
	4					9996	9988	9954	9896	9727	9420	9121	8263	6367
	5						9999	9996	9988	9958	9887	9803	9502	8555
	6								9999	9996	9987	9974	9915	9648
	7										9999	9998	9993	9961

Angelehnt an: Otmar Faltheiner:Mathematik Abitur – Wahrscheinlichkeitsrechnung Statistik Leistungskurs. München: Mans Verlag 1988

3 Materialgrundlage

keine

4 Bezüge zu den „Prüfungsvorgaben für das Zentralabitur am Berufskolleg im Jahr 2009“

Die Aufgaben sind vollständig aus den Gebieten entnommen, die in den Prüfungsvorgaben für das Abitur 2009 im Fach Mathematik, Fachbereich Technik, aufgeführt sind.

Analysis

Funktionsklassen: Ganzrationale Funktionen, natürliche Exponential-/Logarithmus-Funktionen, deren Verknüpfungen und Funktionenscharen

- Funktionseigenschaften
  - Extrem- und Wendepunkte
  - hinreichendes / notwendiges Kriterium (ohne Beweis der Kriterien)
  - Anwendung der Ableitungsregeln
  - Nullstellen, Newtonverfahren
- Deutung und Anwendung des Integrals
  - Integrationsregeln
  - Orientierter Flächeninhalt
  - Anwendung des Integrals auf technische Fragestellungen
  - Partielle Integration / Lineare Substitution

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

- Objekte im dreidimensionalen Raum

- Geraden und Ebenen im Raum
  (Lagebeziehungen, Parameter-/Koordinaten-/Normalenform)
- Metrik (Winkel und Abstände)
- Skalar- und Vektorprodukt

Stochastik

- Wahrscheinlichkeiten
  - Wahrscheinlichkeitsbegriff / Zufallsgrößen / Rechenregeln
  - Zählstrategien zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten
  - Vierfeldertafeln / Bedingte Wahrscheinlichkeit / Satz von Bayes
- Wahrscheinlichkeitsverteilung
  - Zufallsgrößen und Verteilungen
  - Bernoulli Experiment
  - Binomialverteilung

5 Zugelassene Hilfsmittel

Für diesen Aufgabensatz sind zugelassen:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
- Tabellierte kumulierte Binomialverteilung (s. Vorgaben für die Abiturprüfung 2009)
- nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.

Für diesen Aufgabensatz sind **nicht** zugelassen:

- Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
- Computeralgebrasysteme
- Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:

  Erstellen von Wertetabellen

  Darstellen von Funktionsgraphen

  Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen

  Numerisches Integrieren oder Differenzieren

  Rechnen mit Matrizen und Vektoren

6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft/den Prüfling

Für die Abiturprüfung 2009 erhält die Schule insgesamt vier Aufgaben, davon zwei Aufgaben zur Analysis, eine Aufgabe zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie und eine Aufgabe zur Stochastik. Die beiden Aufgaben zur Analysis sind verbindlich zu bearbeiten. Von den Aufgaben zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie und zur Stochastik wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler drei voneinander unabhängig lösbare Prüfungsaufgaben zur Bearbeitung. Sie erhalten keine Aufgaben zur Auswahl.

7 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

7.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Die Lösungserwartungen dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen. Zusätzliche Leistungen sind angemessen zu berücksichtigen. Dies betrifft etwa Lösungen, die bei den Lösungserwartungen nicht aufgeführt sind, aber dennoch eine richtige Lösung sind.

Der aufgeführte Anteil der Punkte je Teilaufgabe ist eine Orientierungshilfe für die vorgesehene Bearbeitungszeit je Aufgabe. Beispiel: Für 10 % der Gesamtpunktzahl sollte etwa 10 % der gesamten Bearbeitungszeit eingeplant werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in Teil I der Bildungspläne definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet. Danach werden den Lösungen der Teilaufgaben Punkte zugewiesen, die den Schwierigkeitsgrad, die Komplexität und den Zeitaufwand für die Bearbeitung der einzelnen Teilaufgabe repräsentieren. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität. Hinzu kommt die Art der Bearbeitung in den verschiedenen Anforderungsbereichen, wobei Aspekte der Qualität, Quantität und der Darstellungsweise berücksichtigt werden.

Die folgenden Bewertungskriterien werden in einen für jede Klausur gesondert auszufüllenden 'Bewertungsbogen' aufgenommen, der den Fachlehrerinnen und Fachlehrern zur Verfügung gestellt wird. In diesen trägt die erstkorrigierende Lehrkraft den entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein.

7.2 Teilleistungen – Kriterien

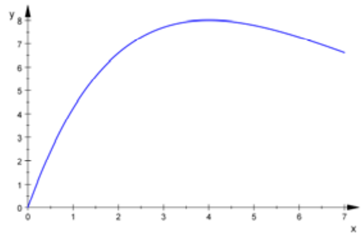
a) inhaltliche Leistung

Aufgaben	**Teilaufgaben**	**Anforderung**	Anforderungsbereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
1	1.1	Maximum $f'(x) = -2(x - 1300) \cdot e^{-(x-1300)^2}$ $f''(x) = -2 \cdot e^{-(x-1300)^2} + 4(x-1300)^2 \cdot e^{-(x-1300)^2}$ $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = 1300$ $f''(1300) = -2$	7		
	1.2	$f''(x) = -2 \cdot e^{-(x-1300)^2} + 4(x-1300)^2 \cdot e^{-(x-1300)^2}$ $0 = -2 \cdot e^{-(x-1300)^2} + 4(x-1300)^2 \cdot e^{-(x-1300)^2}$ $\Rightarrow 0 = -2 + 4(x - 1300)^2$ $\Rightarrow x_{1,2} = 1300 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ Nur an diesen beiden Stellen kann ein Wendepunkt existieren.	7		
	1.3	Die Breite ergibt sich aus $f(x) = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{2} = e^{-(x-1300)^2}$ $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -(x-1300)^2$ $\ln(2) = (x-1300)^2$ Daraus folgt aus Symmetriegründen für die Breite $b = 2 \cdot \sqrt{\ln 2}$.		12	
	1.4	Das uneigentliche Integral gibt den gesamten Energieinhalt an und muss somit einen endlichen Wert haben.		7	

Auf-ga-ben	Teil-auf-ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	1.5	Aus der Forderung g ´(1300) = 0 ergibt sich mit: $g'(x) = 2a\cdot(x-b)\cdot e^{-(x-b)} - a\cdot(x-b)^2\cdot e^{-(x-b)} = a\left(2\cdot(x-b)-(x-b)^2\right)\cdot e^{-(x-b)}$ die Gleichung: 2a(1300 – b) = a(1300 – b)². Man erhält die Lösung b = 1300 oder b = 1298. Zweite Ableitung: $g''(x) = a\cdot\left((2-2(x-b))\cdot e^{-(x-b)} - \left(2\cdot(x-b)-(x-b)^2\right)\cdot e^{-(x-b)}\right) = a\left(2-4\cdot(x-b)+(x-b)^2\right)\cdot e^{-(x-b)}$ Dies zeigt für b = 1298: $g''(1300) = -2a\cdot e^{-2} < 0$, also Maximum. Der Parameter a ergibt sich mit g(1300) = 0,4 zu $a \approx 0{,}739$.			7

Auf-ga-ben	Teil-auf-ga-ben	Anforderung	Anforderungsbereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	1.6	Erster Schritt: Zeige: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{\pi}$ Integration per Substitution: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$ mit f(x) = $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ und $\varphi(x)=\sqrt{2}\cdot(x-1300)$ ergibt sich: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}(x-1300)\right)^2}\cdot\sqrt{2}dx$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}(x-1300)\right)^2}dx$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1300)^2}dx$ Zweiter Schritt: Berechne die Energie (partielle Integration) mit den Werten a ≈ 0,739 und b = 1298. $E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{1298}^{+\infty} g(x)dx$ $= \int_{1298}^{+\infty} a(x-b)^2e^{-(x-b)}dx$ $= a\left(-(x-b)^2e^{-(x-b)}\Big\vert_{1298}^{\infty} + 2\int_{1298}^{\infty}(x-b)e^{-(x-b)}dx\right)$ Beachte b = 1298 und nochmalige partielle Integration: $= 0 + 2a\left(-(x-b)e^{-(x-b)}\Big\vert_{1298}^{\infty} + \int_{1298}^{\infty} e^{-(x-b)}dx\right)$ $= -2a\left(e^{-(x-b)}\Big\vert_{1298}^{\infty}\right)$ $= 2a$ Damit ergibt sich $\frac{E_g}{E_{ungestörtesSignal}} = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \approx 0{,}834$, dementsprechend ca. 83,4 %.			7
		Summe Aufgabe 1	**14**	**19**	**14**

Auf-ga-ben	Teil-auf-ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
2	2.1	$fa(7) = 3 = 14 \cdot e^{1-7a}$ $\frac{3}{14} = e^{1-7a}$ $\ln(\frac{3}{14}) = 1-7a$ $a = \frac{1-\ln\frac{3}{14}}{7} \approx 0{,}363$ $f_a(x) = 2xe^{1-ax}$ $f_a{}' = 2e^{1-ax} - 2axe^{1-ax} = (2-2ax)e^{1-ax}$ $f_a''(x) = -2ae^{1-ax} + (2-2ax)(-a)e^{1-ax}$ $= (-4a+2a^2x)e^{1-ax}$ Extrema $f_a'(x) = 0$ $2-2ax = 0$ $x = \frac{1}{a}$ $f_a''(x) = (-4a+2a)e^{1-1} = -2ae^0 < 0 \Rightarrow$ rel. Max $f(\frac{1}{a}) = \frac{2}{a}e^{1-1} = \frac{2}{a}$ $H(\frac{1}{a} \mid \frac{2}{a})$	7		

Auf-ga-ben	Teil-auf-ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	2.2	Wendepunkt $f_a''(x)=0$ $-4a+2a^2x=0$ $x=\frac{4a}{2a^2}=\frac{2}{a}$ Vorzeichenwechsel an der Stelle x $f_a(\frac{2}{a})=\frac{4}{a}e^{-1}=\frac{1{,}47}{a}$ $\quad W(\frac{2}{a} \mid \frac{1{,}47}{a})$		9	
	2.3		7		

Auf-ga-ben	Teil-auf-ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	2.4	$\int_0^7 2xe^{1-\frac{1}{4}x}dx$ Stammfunktion $F_a(x)$ $f_a(x) = 2xe^{1-ax}$ $u = x \quad ;v' = e^{1-ax}$ $u' = 1 \quad ;v = -\frac{1}{a}e^{1-ax}$ $2\int xe^{1-ax}dx$ $= 2[-\frac{1}{a}xe^{1-ax} + \int \frac{1}{a}e^{1-ax}dx]$ $= 2[-\frac{1}{a}xe^{1-ax} - \frac{1}{a^2}e^{1-ax}]$ $= (-\frac{2x}{a} - \frac{2}{a^2})e^{1-ax} = F_a(x)$ $\int_0^7 2xe^{1-\frac{1}{4}x}dx$ $= (-8x - 32)e^{1-\frac{1}{4}x}\Big\vert_0^7$ $\approx 45{,}42$		10	

Auf-gaben	Teil-auf-gaben	Anforderung	Anforderungsbereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	2.5	$V_E(h)=-4{,}4h^3+57h^2-36h$ $V_E(7)=-4{,}4\cdot 7^3+57\cdot 7^2-36\cdot 7=1031{,}8$ $f_{\frac{1}{4}}(x)=2xe^{1-\frac{1}{4}x}$ $(f_{\frac{1}{4}}(x))^2=4x^2e^{2-\frac{1}{2}x}$ $4\pi\int_0^7\left(x^2e^{2-0{,}5x}\right)dx$ $u=4x \quad ;v'=e^{2-0{,}5x}$ $u'=4 \quad ;v=-2e^{2-0{,}5x}$ $=4\pi\left(-2x^2e^{2-0{,}5x}\Big\|_0^7+\int_0^7 4xe^{2-0{,}5x}dx\right)$ $=4\pi\left(-2x^2e^{2-0{,}5x}\Big\|_0^7-8xe^{2-0{,}5x}\Big\|_0^7+\int_0^7 8e^{2-0{,}5x}dx\right)$ $=4\pi\left((-2x^2-8x-16)e^{2-0{,}5x}\Big\|_0^7\right)$ $\approx 1008{,}99$ $p=\frac{1008{,}99-1031{,}8}{1008{,}99}=-0{,}023$ $\text{Abweichung}: p=2{,}3\%$			7
	2.6	Newtonverfahren $h_0= 2{,}8443$ (Beim Startwert 3 benötigt man 3 Rechenschritte)			7
		Summe Aufgabe 2	**14**	**19**	**14**

Auf-ga-ben	Teil-auf ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
3	3.1	Eine Gleichung der Lenkerachse lautet $l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ \lambda \in \Re$ Für die Radachse findet man $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ \lambda \in \Re$ Falls ein Schnittpunkt existiert, muss die Vektorgleichung $\tau \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ eine nichttriviale Lösung besitzen, die drei Vektoren müssen also linear abhängig sein. Die Gleichung hat die einzige Lösung $\tau = \lambda = \mu = 0$. Die beiden Geraden besitzen keinen Schnittpunkt und sind nicht parallel, sie sind also windschief.	7		
	3.2	Die Gleichung des Grundrisses einer Geraden erhält man, indem man $x_3 = 0$ setzt, die des Aufrisses, indem man $x_1 = 0$ setzt. Damit ergibt sich für die Winkel α und β: $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{10} \cdot 1} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ und der gleiche Winkel für $\cos(\beta)$. Damit ist $\alpha = \beta = 18{,}4°$.		6	

Auf-ga-ben	Teil-auf ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	3.3	Die Koordinatengleichung der Radebene E lautet: E: $x_2 - 7 = 0$ Für den Schnittpunkt N von I mit E ergibt sich: $3 + 3\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$ und damit $N(\frac{16}{3} \mid 7 \mid \frac{13}{3})$	7		
	3.4	Für den Lotfuß L muss gelten: $\overrightarrow{RL} \cdot \vec{u}_1 = 0$ $\left[\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow 16 + 11\lambda - 24 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{11}$ Der Lotfußpunkt ist also $L\left(\frac{52}{11} \mid \frac{57}{11} \mid \frac{41}{11}\right)$. Für die Lenkerlänge d = $\left|\overrightarrow{RL}\right|$ folgt d = $\frac{12}{11}\sqrt{22}$ LE		7	

Auf-ga-ben	Teil-auf ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	3.5	Der Radmittelpunkt bewegt sich um 2,4 Einheiten nach oben, also R' (x_1 | x_2 | 5,4). Es gilt $\overline{AR'} = \overline{AR}$ und $\overline{BR'} = \overline{BR}$ $\Rightarrow \left\lvert \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 6 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rvert \Leftrightarrow x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 12x_2 = -35{,}96$ $\left\lvert \begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 3 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert \Leftrightarrow x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 6x_2 = 1{,}24$ Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so erhält man $2x_1 + 6x_2 = 37{,}2$ Löst man diese Gleichung nach x_1 auf und setzt dieses in die erste Gleichung ein, so erhält man die quadratische Gleichung $10x_2^2 - 93{,}6x_2 + 195{,}92 = 0$ Diese hat die Lösungen: $x_{21} = 6{,}2$ und $x_{22} = 3{,}16$ Für $x_{22} = 3{,}16$ erhält man $x_{12} = 9{,}12$. Damit würde der Radmittelpunkt in Fahrtrichtung x_1 vor der Lenkerachse liegen. Diese Lösung fällt also aus technischen Gründen aus. Der neue Radmittelpunkt ist also R' (0 | 6,2 | 5,4).			7
	3.6	Die Lage des Nickpols N ist bezüglich des starren Schräglenkers fest. Als Punkt der Drehachse rotiert er bei Drehung des Dreiecks ABR nicht mit.			7

Auf-ga-ben	Teil-auf ga-ben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	3.7	Die neue Radebene ergibt sich in Normalenform: $E': \begin{pmatrix} -5 \\ 44 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}2 \\ 5{,}4 \end{pmatrix} \right] = 0$ und in Koordinatenform: E': $-5x_1 + 44x_2 + 8x_3 = 316$		6	
		Summe Aufgabe 3	**14**	**19**	**14**

Auf-ga-ben	Teil-auf-gaben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
4	4.1	Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Buchstabens $p_B = 0{,}4$ beträgt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Ziffer („Nicht-Buchstabe“) $p_Z = 1 - p_B = 0{,}6$. Für die Wahrscheinlichkeit einer Oktade der Form bbbzzzzz gilt dann: $p = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^5 \approx 0{,}00498$.	7		
	4.2	Mehr als zwei und weniger als fünf Buchstaben bedeutet, dass für die Anzahl n_B der Buchstaben $2 < n_B < 5$ bzw. $3 \leq n_B \leq 4$ gilt. Bezeichnet man das Auftreten eines Buchstabens als Treffer, dann bildet jede Oktade eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 8$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p_B = 0{,}4$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist deshalb gegeben als die Summe der Bernoulli-Ausdrücke $B(n = 8;\ p_B = 0{,}4;\ k = 3)$ sowie $B(n = 8;\ p_B = 0{,}4;\ k = 4)$. Ihre Zahlenwerte sind dann: $\binom{8}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^5$ sowie $\binom{8}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^4$. Damit erhält man $p = 56 \cdot 0{,}0041 + 70 \cdot 0{,}0033 \approx 0{,}5109$.		10	

Auf-ga-ben	Teil-auf-gaben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	4.3	Das Auftreten von mindestens 5 Buchstaben, d. h. $n_B \geq 5$, ist das Gegenereignis zum Auftreten von höchstens 4 Buchstaben. Die Wahrscheinlichkeit für Letzteres ist gegeben durch: $\sum_{k=0}^{4} B(n=8;p_B=0{,}4;k) = p_{0,4}^{8}(n_B \leq 4) = 0{,}82633$ (s. Tabelle) $p(n_B \geq 5) = 1 - 0{,}82633 = 0{,}17367$.	7		

Auf-ga-ben	Teil-auf-gaben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	4.4	Die Wahrscheinlichkeit für eine nur aus Ziffern bestehende Oktade ist nach den Regeln der Bernoulli-Kette $p(n_Z = 8) = p(n_B = 0) = 0{,}6^8 \approx 0{,}0168$. Die Wahrscheinlichkeit, eine Oktade zu erhalten, die dieser Bedingung nicht genügt, ist dann: $p(n_Z < 8) = 1 - p(n_Z = 8) = 1 – 0{,}6^8 \approx 0{,}9832$. Die Wahrscheinlichkeit, bei n Druckvorgängen lauter Oktaden mit $n_Z < 8$ zu erhalten, ist dann: $[p(n_Z < 8)]^n = 0{,}9832^n$. Die Wahrscheinlichkeit, bei n Druckvorgängen mindestens eine Oktade mit $n_Z = 8$ zu erhalten, ist dann wegen der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses: $p(n_Z = 8) = 1 – 0{,}9832^n$. Diese Wahrscheinlichkeit soll nun nach Angabe über 60 % liegen: $1 – 0{,}9832^n > 0{,}6$ bzw. $0{,}9832^n < 0{,}4$. Daraus erhält man: $n \cdot \lg(0{,}9832) < \lg(0{,}4) \quad \Rightarrow \quad n > 54{,}08$. Damit muss die Anzahl der Druckvorgänge mindestens 55 betragen, d. h. es ist $n \geq 55$.			7

Auf-ga-ben	Teil-auf-gaben	Anforderung	Anforderungs-bereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
	4.5	Das hier zu betrachtende Ereignis „Die letzten zwei Zeichen sind Buchstaben“ werde mit L bezeichnet, das Ereignis „Die Oktade ist im Ordner BU gespeichert“ entsprechend mit BU. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt: $P_{BU}(L) = \frac{P(BU \cap L)}{P(BU)}$. Das Ereignis $BU \cap L$ tritt genau dann ein, wenn in der betrachteten Oktade die letzten zwei Zeichen Buch-staben sind (und damit die ersten sechs Zeichen keine Buchstaben, also Ziffern) und wenn sie in dem Ordner BU gespeichert sind, d. h. wenn $n_B > n_Z$ gilt. Wegen n = 8 bedeutet dies $n_B \geq 5$. Die Durchschnittsmenge der hier genannten Ereignis-se L und BU enthält dann alle Oktaden, deren zwei letzte Zeichen Buchstaben sind und bei denen unter den restlichen ersten sechs Zeichen noch mindestens drei weitere Buchstaben auftreten. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „L und BU“ ist dann das Produkt der Wahrscheinlichkeiten P(L) und P(BU mit $n_B \geq 3$ unter den ersten sechs Zeichen), d. h.: $0{,}4^2 \cdot \sum_{k=3}^{6} B(n=6; p=0{,}4; k)$ $= 0{,}4^2 \cdot p_{0,4}^{6}(k \geq 3)$ $= 0{,}4^2 \cdot [p_{0,4}^{6}(k \leq 6) - p_{0,4}^{6}(k \leq 2)]$ $\approx 0{,}16 \cdot [1 - 0{,}54432] = 0{,}07291$.			

Auf-ga-ben	**Teil-auf-gaben**	**Anforderung**	Anforderungsbereiche und Punkte		
		Erwartete Lösung	**I**	**II**	**III**
		Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis BU ohne Einschränkungen ist $P(BU) = \sum_{k=5}^{8} B(n=8; p_B=0{,}4; k)$ $= p_{0,4}^{8}(k \geq 5) = p_{0,4}^{8}(k \leq 8) - p_{0,4}^{8}(k \leq 4)$ $= 1 - 0{,}82633 = 0{,}17367$ Damit ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit zu $P_{BU}(L) \approx \frac{0{,}07291}{0{,}17367} \approx 0{,}41982$			7
	4.6	Auch hier handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich um die des Ereignisses BU unter der Bedingung L. $P_L(BU) = \frac{P(L \cap BU)}{P(L)} \approx \frac{0{,}07291}{0{,}4^2} \approx 0{,}45569.$		9	
		Summe Aufgabe 4	**14**	**19**	**14**

		Summe Aufgabe 1	**47**
		Summe Aufgabe 2	**47**
		Summe Aufgabe 3	**47**
		Summe Aufgabe 4	**47**
		Summe für 3 von 4 Teilaufgaben	**141**

b) Darstellungsleistung

		Kriterien	Punkte
		Verwendung korrekter mathematischer Fachsprache und Symbolik, strukturierte Darstellung	je Aufgabe 3
		Summe Darstellungsleistung	**9**

Gesamtsumme aus 7.2a und 7.2b:	**150**

7.3 Bewertung (Notenfindung)

Note	Punkte	erreichte Prozentzahl	erreichte Punktzahl
sehr gut plus	**15**	100 - 96	150 - 144
sehr gut	**14**	95 - 91	143 - 136
sehr gut minus	**13**	90 - 86	135 - 129
gut plus	**12**	85 - 81	128 - 121
gut	**11**	80 - 76	120 - 114
gut minus	**10**	75 - 71	113 - 106
befriedigend plus	**9**	70 - 66	105 - 99
befriedigend	**8**	65 - 61	98 - 91
befriedigend minus	**7**	60 - 56	90 - 84
ausreichend plus	**6**	55 - 51	83 - 76
ausreichend	**5**	50 - 46	75 - 69
ausreichend minus	**4**	45 - 41	68 - 61
mangelhaft plus	**3**	40 - 34	60 - 51
mangelhaft	**2**	33 - 27	50 - 40
mangelhaft minus	**1**	26 - 20	39 - 30
ungenügend	**0**	19 - 0	29 - 0