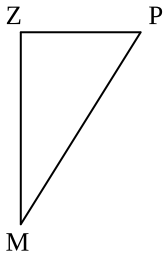
Erwartungshorizont: Analytische Geometrie 1

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
a)	Ein Normalenvektor der x_1-x_3-Ebene ist $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Der Schnittwinkel der beiden Ebenen ist identisch mit dem Winkel, den die beiden Normalenvektoren der Ebenen aufspannen. $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 54{,}7^0$	1 1		
b)	Die Gleichung der Kugel K wird in die Verschiebungsform umgeformt. $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix}10\\10\\6\end{pmatrix}\circ\vec{x} = -23 \Leftrightarrow \vec{x}^2 - 2\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}\circ\vec{x} + 59 = 36$ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}\right]^2 = 36$, d.h. der Mittelpunkt M lautet M(5/5/3) und der Radius ist ρ=6.	1 1		
c)	Der Mittelpunkt Z des Schnittkreises k ist der Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g durch M, die orthogonal zu E verläuft. Ein Richtungsvektor von g muss daher kollinear zum Normalenvektor der Ebene E sein. g lautet daher $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Um g mit E zu schneiden setzt man den Term der Geradengleichung g für den Ortsvektor $\vec{x}$ in der Normalenform von E ein. $E \cap g: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4 \Rightarrow 13 + 3\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = -3$. λ = -3 wird in g eingesetzt und man erhält den Ortsvektor des Kreismittelpunktes $\vec{x}_Z = \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$. Zur Berechnung des Radius von k bestimme ich den Abstand von M zu Z und verwende den Satz des Pythagoras bzgl. des Dreiecks MZP, wobei P ein Punkt auf dem Schnittkreis ist. $\lvert\overrightarrow{MZ}\rvert = \lvert\vec{x}_Z - \vec{x}_M\rvert = \left\lVert\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}\right\rVert = \left\lVert\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\right\rVert = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$	1 1 2 1 1 1		

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
	 $\left\|\overrightarrow{ZP}\right\| = \sqrt{36-27} = \sqrt{9} = 3$ Ein Radiusvektor $\vec{u}$ muss orthogonal zum Normalenvektor von E sein. Ich wähle zunächst $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und passe noch den Betrag an. Der Vektor $\vec{u} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ hat den Betrag 3 und ist damit ein Radiusvektor, der von Z zum Kreisrand zeigt.	1	1 1 1	
	Ein zweiter Vektor $\vec{v}$ muss orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{n}$ gewählt werden. Diese Forderung erfüllt das Vektorprodukt $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Die Betragsanpassung auf den Radius 3 ergibt $\vec{v} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.		1 1 1	
d)	Eine Hessesche Normalenform der Ebene, die parallel zu E durch den Mittelpunkt der Kugel M verläuft, lautet $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\vec{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\vec{x} - \frac{13}{\sqrt{3}} = 0$. Der Skalar $\frac{13}{\sqrt{3}}$ gibt den Abstand der beschriebenen Ebene zum Ursprung an.		2	
	Die gesuchten Tangentialebenen müssen daher einen um 6 Längeneinheiten größeren bzw. kleineren Abstand vom Ursprung haben. Daher lauten mögliche Normalenformen der Tangentialebenen $E_{T1}: \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\vec{x} = \frac{13}{\sqrt{3}}+6$ und $E_{T2}: \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\vec{x} = \frac{13}{\sqrt{3}}-6$.		1 2	
	Ebenen, die zwischen E_{T1} und E_{T2} liegen, lassen sich mittels eines Parameters a beschreiben, dessen Betrag den Abstand der jeweiligen Ebene von M kennzeichnet. $E_a: \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\vec{x} = \frac{13}{\sqrt{3}}+a$, wobei -6 $\leq$ a $\leq$ 6 gelten muss.		1 2	

	Erwartete Leistung	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
e)	Die allgemeine Polarengleichung lautet $\left[\vec{x}_P - \vec{x}_M\right] \circ \left[\vec{x} - \vec{x}_M\right] = \rho^2$, wobei $\vec{x}_P$ der Ortsvektor des Pols ist. Die Gleichung von E wird in diese Form umgewandelt.		1	
	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}\right] = 4 - 13 = -9$			1
	Multiplikation mit -4 ergibt $\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}\right] = 36$, d. h. $\vec{x}_P - \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}$, also ist			1
	$\vec{x}_P = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Der Pol lautet P(1/1/-1).			1
	Summe:	12	15	3