Erwartungshorizont: Stochastik 2

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
a)	(i) Hier liegt ein Ziehen ohne Zurücklegen vor. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Gäste, die gewinnen. Die Zufallsvariable ist hier hypergeometrisch verteilt und es gibt 6 Gewinnlose. Daher folgende Rechnung: $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$	1		
	$P(X \le 2) = \frac{\binom{6}{0}\binom{54}{25}}{\binom{60}{25}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{54}{24}}{\binom{60}{25}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{54}{23}}{\binom{60}{25}} \approx 0{,}0324 + 0{,}1621 + 0{,}3138$ $= 0{,}5083$, also etwa 51%. $P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{\binom{6}{3}\binom{54}{22}}{\binom{60}{25}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{54}{21}}{\binom{60}{25}} \approx 0{,}3007 + 0{,}1503 = 0{,}4510$, also etwa 45%.	6		
	(ii) Damit sich die Wahrscheinlichkeiten nicht ändern, müsste ein Gast, nachdem er sein Los gezogen hat, sofort nachsehen, ob er gewonnen hat und und anschließend das Los wieder in den Topf zurücklegen. Damit bleibt die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}1$ konstant. Es liegt eine Bernoullikette der Länge 25 vor.		1	
	Den Wert für $P(X \le 2)$ kann man aus der summierten Binomialverteilungstabelle (z.B. aus dem Tafelwerk) entnehmen, die anderen Wahrscheinlichkeiten aus der Wertetafel zur Binomialverteilung: $P(X \le 2) \approx 0{,}5371$ und $P(3 \le X \le 4) = P(X = 3) + P(X = 4) \approx 0{,}2265 + 0{,}1384 = 0{,}3649$.	2		
b)	Wir nehmen an, dass jeder der 40 Anrufe unabhängig voneinander eintrifft und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{150}$ in das 3-Minuten-Zeitintervall fällt. Damit kann man hier von einer Bernoullikette der Länge 40 und einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}02$ ausgehen.	1		
	Es gilt $P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ $= 1 - \binom{40}{0} 0{,}02^0 \, 0{,}98^{40} - \binom{40}{1} 0{,}02^1 \, 0{,}98^{39} \approx 0{,}1905$, also etwa 19%.	2		
	Der Erwartungswert ist $E(X) = \mu = 40 \cdot 0{,}02 = 0{,}8$. Da p klein und μ nicht zu groß sind, kann man die Näherungsformel von Poisson anwenden. Es gilt nun $P(X \ge 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{0{,}8^0}{0!} e^{-0{,}8} - \frac{0{,}8^1}{1!} e^{-0{,}8} = 1 - (1 + 0{,}8)\, e^{-0{,}8}$, d.h. $P(X \ge 2) \approx 0{,}1912$.		3	

	Erwartete Leistung	Bewertung		
		I	II	III
c)	Wenn X binomialverteilt ist, dann ist es notwendig, dass die einzelnen Zufallsexperimente stochastisch unabhängig voneinander sind. Das Antreten bzw. Nichtantreten einer Reise muss unabhängig von den anderen Kunden eintreten, doch dies ist in der Regel nicht so. Beziehungen unter den Kunden (Familien, Reisegruppen) verursachen Abhängigkeiten, das heißt, dass z.B. eine Absage gleich weitere nach sich zieht. Ebenso können andere Einflüsse wie z.B. das Wetter (Orkanwarnung etc.) zu weiteren Abhängigkeiten führen.		1	
	Der Kaufmann möchte eine möglichst große Anzahl n der Reisen verkaufen, aber unter der Bedingung, dass $P(X \leq 355) \geq 0{,}99$ bleibt. Da $n > 355$, $p = 0{,}1$ und $q = 1 - p = 0{,}9$ ist, ist $n \cdot p \cdot q > 31 > 9$ und damit kann die Näherung von Moivre und Laplace angewendet werden. Ansatz : $P(X \leq 355) \approx \Phi\left(\frac{355 + 0{,}5 - n\ 0{,}9}{\sqrt{n\ 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \geq 0{,}99$. Aus der Tabelle für die Standardnormalverteilung entnimmt man $\frac{355 + 0{,}5 - n\ 0{,}9}{\sqrt{n\ 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \geq 2{,}33$		4	
	Setzt man $x = \sqrt{n} > 0$, so ergibt sich die Ungleichung $355{,}5 - 0{,}9\, x^2 \geq 2{,}33 \cdot 0{,}3\, x \Leftrightarrow$ $x^2 + \frac{2{,}33}{3} x - 395 \leq 0$. Da die linke Seite der Ungleichung eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt und x möglichst groß sein soll, muss der gesuchte Wert unterhalb der rechten Nullstelle liegen, also $x \leq -\frac{2{,}33}{6} + \sqrt{\left(\frac{2{,}33}{6}\right)^2 + 395}$, d. h. $x \leq 19{,}49$, somit $n \leq 379{,}86$. Damit ist 379 die maximale Anzahl von Reisen, die er unter den genannten Bedingungen verkaufen darf.		6	
d)	Für $k < n$ und $q = 1 - p$ gilt: $\frac{B_{n;p}(k+1)}{B_{n;p}(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1}\ q^{n-(k+1)}}{\binom{n}{k} p^{k}\ q^{n-k}} = \frac{n!\ k!\ (n-k)!}{(k+1)!\ (n-(k+1))!\ n!} \frac{p^{k+1}}{p^{k}} \frac{q^{n-k-1}}{q^{n-k}} =$ $\frac{k!\ (n-k-1)!\ (n-k)}{k!\ (k+1)\ (n-k-1)!} \frac{p^1}{q^1} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p}.$ Somit gilt also die Rekursionsformel.			3
	Summe:	12	15	3