SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1993

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung und Taschenrechner

** Die Aufgaben umfassen 3 Seiten.**

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \to x \cdot (a + \ln x)^2$ mit $a \in \mathbb{R}$.

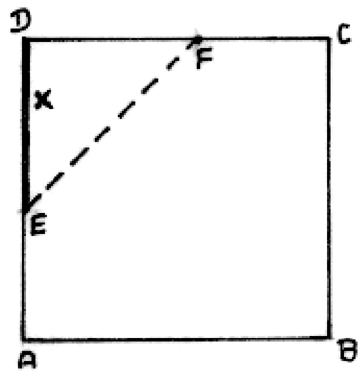
1.1 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, daß der Wendepunkt der entsprechenden Scharkurve auf der Geraden mit der Gleichung $y=1$ liegt.

1.2 Diskutieren Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \to x \cdot (-1 + \ln x)^2$.
Zusätzlicher Diskussionspunkt: Grenzwert von f' für $x \to 0$. Zeichnung: 1LE = 2cm.
Zur Kontrolle: $f''(x) = 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$

1.3 Bestimmen Sie das Maß der Fläche zwischen dem Intervall $[1,e]$ und dem Graphen der Funktion f aus 1.2.

1.4 Betrachten Sie wieder die Funktionenschar f_a und die Gerade g: $y = x$.
Berechnen Sie für jede Scharkurve die Schnittpunkte und Schnittwinkel mit der Geraden g.

2. Nebenstehende Abbildung zeigt ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 3. Auf den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ werden zwei Punkte E und F gewählt, die von D gleich weit entfernt sind. Dann wird das Quadrat längs $\overline{EF}$ so gefaltet, daß das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Verbindet man die hochstehende Ecke D mit den Punkten A,B und C, so entsteht eine Pyramide.



Bei welcher Wahl der Punkte E und F ist das Volumen der Pyramide maximal? Geben Sie dieses maximale Volumen an.

3. Bestimmen Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$f'(x) = 3 + f(x) \quad \text{und} \quad f(0) = -1$$

Aufgabe 2

1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e durch die Punkte $A(1|0|1)$, $B(2|1|1)$ und $C(1|2|5)$. (Zur Kontrolle: e: $2x_1-2x_2+x_3-3=0$)

1.2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene e und den Geraden der Schar

$$g_t\colon \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

1.3 Im folgenden wird die Gerade g_{-1} der Schar aus 1.2 kurz mit g bezeichnet. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene e.

1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung der Spiegelgeraden von g bezüglich e.

1.5 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h mit folgenden Eigenschaften: h liegt in der x_1x_2-Ebene und hat von e den Abstand 1; der Koordinatenursprung und h liegen auf verschiedenen Seiten von e.

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{x} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{y}_t = \vec{a}+(t-1)\vec{b}$, $\vec{z}_t = t\vec{c}-3\vec{b}$ mit $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$.

2.1 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind paarweise orthogonal und $\vec{b} \neq \vec{0}$.
Für welche $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\vec{y}_t \perp \vec{z}_t$?

2.2 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind linear unabhängig.
Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}_t$, $\vec{z}_t$ linear unabhängig?

3. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien Vektoren des $\mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 2 \; ; \; \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \; ; \; |\vec{a}| = \sqrt{2}$$

Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den Betrag von $\vec{b}$

Aufgabe 3

1. Aus einer Urne mit 5 roten, 4 schwarzen und 3 weißen Kugeln werden zufällig drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und ihre Farben festgestellt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

   A: Mindestens eine gezogene Kugel ist schwarz.

   B: Genau eine gezogene Kugel ist weiß.

1.1 Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge an und bestimmen Sie deren Elementzahl.

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$.

2. Zwei Tennisspieler A und B treffen in einem Turnier aufeinander. Derjenige Spieler, der als erster zwei Sätze gewonnen hat, gewinnt das Match. Da ein Satz nicht unentschieden ausgehen kann, endet das Match also nach höchstens drei Sätzen. A ist der etwas stärkere Spieler und gewinnt den 1. Satz mit 60%iger Wahrscheinlichkeit. Hat er einen Satz gewonnen, so wird er leichtsinnig, und seine Gewinnchance für den folgenden sinkt auf 40%. Nach einem verlorenen Satz reißt er sich zusammen und gewinnt den nächsten mit 70%iger Wahrscheinlichkeit.

2.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A das Match gewinnt?

2.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat B den ersten Satz gewonnen, wenn A das Match gewinnt?

3. Hans und Gerd schießen auf ein Ziel. Hans trifft mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_4$, Gerd mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_3$.

3.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Hans spätestens nach dem sechsten Schuß zum zweiten Male trifft?

3.2 Wie oft muß Gerd mindestens schießen, wenn Hans nur zwei Schüsse hat und das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal getroffen werden soll?