SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1994

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung und Taschenrechner

** Die Aufgaben umfassen 3 Seiten . **

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_t : D_{max} \to \mathbb{R} ; \; x \mapsto 4 \cdot (t \cdot e^x - 1) \cdot e^{-2x} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}^+ .$$

1.1 Bestimmen Sie diejenige Funktion der Schar , deren Schaubild an der Stelle $x = \ln 2$ eine waagerechte Tangente hat .

1.2 Diskutieren Sie die Funktion

$$f_1 : D_{max} \to \mathbb{R} ; \; x \mapsto 4 \cdot (e^x - 1) \cdot e^{-2x}$$

und zeichnen Sie ihr Schaubild .
(Zur Kontrolle der Ableitungsterme beachte man die Angaben im Aufgabenteil 1.3 .)

1.3 Zeigen Sie mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion :
Für die n - te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) der Funktion f_1 gilt :

$$f_1^{(n)}(x) = 4 \cdot (-1)^n \cdot (e^x - 2^n) \cdot e^{-2x} .$$

1.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve , auf der alle Extrempunkte der Schar f_t liegen .

1.5 Skizzieren Sie im Koordinatensystem des Aufgabenteils 1.2 zusätzlich das Schaubild der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; x \mapsto 4 \cdot e^{-2x}$.
Die y - Achse und die Schaubilder der Funktionen f_1 und g begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche M . Berechnen Sie den Inhalt von M .

2. Gegeben ist eine Funktion der Form

$$f : D_{max} \to \mathbb{R} ; \; x \mapsto \sqrt{a \cdot x + b} \quad \text{mit } a , b \in \mathbb{R} , a > 0 .$$

2.1 Das Schaubild von f enthalte den Punkt $P(-1 \mid 1)$; drücken Sie b durch a aus und skizzieren Sie das Schaubild für $a = 1$.

2.2 Die Fläche , die das Schaubild von $f : D_{max} \to \mathbb{R} ; x \mapsto \sqrt{a \cdot x + a + 1}$ $(a > 0)$ mit den beiden Koordinatenachsen im 2. Quadranten bildet , rotiert um die x - Achse . Bestimmen Sie a so , daß das Volumen des entstehenden Rotationskörpers minimal wird .

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte $A(5 \mid 1 \mid 1)$, $B(3 \mid 3 \mid 0)$, $C(0 \mid 9 \mid 0)$, $D(4 \mid 5 \mid 2)$ und $E(9 \mid 3 \mid -3)$.

1.1 Zeigen Sie, daß die Punkte A, B, C und D in derselben Ebene liegen, und stellen Sie eine Normalengleichung dieser Ebene auf.
(Zur Kontrolle : $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 9 = 0$)

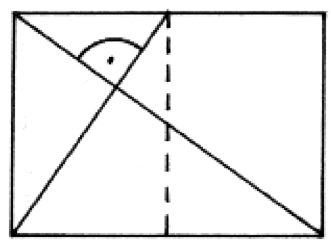
1.2 Zeigen Sie, daß das Viereck ABCD ein Trapez ist. Berechnen Sie die Höhe und den Flächeninhalt dieses Trapezes.

1.3 Der Punkt E ist die Spitze der Pyramide mit dem Trapez ABCD als Grundfläche.

1.3.1 Berechnen Sie die Höhe und das Volumen dieser Pyramide.

1.3.2 Berechnen Sie den Winkel, den die Kante $\overline{EC}$ mit der Grundfläche ABCD einschließt.

2. Die Rechteckseiten eines DIN - Formates verhalten sich wie $\sqrt{2} : 1$. Halbiert man ein solches Blatt durch Falten längs der gestrichelten Linie (vgl. Skizze !), so erhält man wieder ein DIN - Format. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung, daß sich die skizzierten Diagonalen des großen und des kleinen Formates rechtwinklig schneiden.



3. Im Anschauungsraum mit dem Ursprung O sind die Punkte A, B und C mit den Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ gegeben.

Es gilt : (1) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig.
(2) Die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{b} - \vec{a}$ sind linear unabhängig.

Begründen Sie anschaulich, daß sich die Geraden AB und OC in genau einem Punkt schneiden.

Aufgabe 3

1. Eva , Frank , Susi und Uwe erscheinen zu einem Test . Im Prüfungsraum stehen vier Tische hintereinander . Auf jedem Tisch befindet sich ein Kasten mit fünf verschlossenen , von 1 bis 5 numerierten Briefumschlägen , die die Prüfungsfragen enthalten . Die Nummern sind erst nach dem Öffnen der Umschläge zu erkennen .

1.1 Die Belegung der Plätze - an jedem Tisch sitzt genau ein Prüfling - erfolgt zufällig . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit , daß Uwe direkt hinter Eva sitzt ?

1.2 Jeder Prüfling zieht aus seinem Kasten genau einen Umschlag .

1.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse :

A : Alle ziehen Umschläge mit der Nummer 1 .

B : Alle ziehen Umschläge mit der gleichen Nummer .

C : Alle ziehen verschieden numerierte Umschläge .

1.2.2 Formulieren Sie umgangssprachlich das Gegenereignis zum Ereignis B (Teil 1.2.1) .

2. Bei einem Auswahlverfahren zur Vergabe von Studienplätzen werden 60% der Plätze nach Noten bestimmt , der Rest gemäß einer Warteliste . Von den über die Warteliste zugelassenen KandidatInnen nehmen 8% den Studienplatz nicht an , von den über den Notendurchschnitt zugelassenen treten 85% das Studium an .

2.1 Unter den zugelassenen KandidatInnen wird eine Person zufällig ausgewählt .

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie die Zulassung aufgrund des Notendurchschnitts erhalten , nimmt ihren Studienplatz aber nicht an ? Zeichnen Sie zunächst ein Baumdiagramm .

b) Die ausgewählte Person tritt ihr Studium an . Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie den Studienplatz über die Warteliste erhalten ?

2.2 Unter den zugelassenen KandidatInnen wird eine Umfrage durchgeführt . Wieviele müssen mindestens befragt werden , um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens eine Person zu finden , die ihr Studium nicht antritt ?