Schriftliche Abiturprüfung 1995

Fach:	Mathematik
Prüfungsart:	1. Prüfungsfach
Dauer:	5 Stunden
Hilfsmittel:	Zugelassene Formelsammlung und zugelassener Taschenrechner

Die Aufgaben umfassen 3 Seiten

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ x \mapsto a \cdot \ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x;\quad a \in \mathbb{R}$$

1.1 Zeigen Sie:

$$f_a''(x) = \frac{-1 - a + \ln x}{x^2}$$

1.2 Bestimmen Sie die Funktionen der Schar, deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt. (Der Nachweis des Wendepunktes mittels f''' oder anderer Kriterien ist in diesem Aufgabenteil nicht erforderlich.)

1.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der die Hochpunkte der Schar liegen.

1.4 Diskutieren Sie

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ x \mapsto \ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x$$

1.5 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse umschlossen wird.

2. Gegeben ist die Funktion

$$f: [0,10] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{4}{x+1}$$

2.1 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

2.2 An den Graphen wird die Tangente im Punkt $P(u \mid f(u))$ gelegt. Sie schneidet die y-Achse in Q. Die Punkte P,Q und der Ursprung O bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, daß das Dreieck einen maximalen Inhalt hat.

2.3 Der Graph von f, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung x=10 begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation dieses Flächenstückes um die y-Achse erzeugt wird.

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Geradenschar

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-2t \\ 2+2t \end{pmatrix}; \quad t \in IR$$

und die Punkte A(-3 | 4 | 5), P(5 | 4 | 16), Q(3 | 4 | 17)

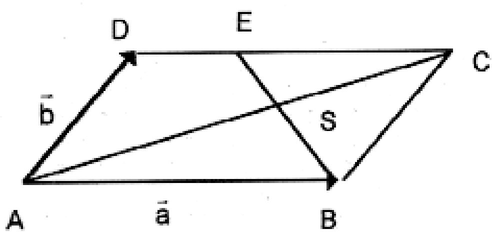
1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Geraden g_0 und g_1 liegen.

1.2 Bestimmen Sie den Fußpunkt L des Lotes von P auf die Ebene e: 2x-z+11=0 und berechnen Sie den Spiegelpunkt P´ von P an der Ebene e.

1.3 Bestimmen Sie die Gerade der Schar, die durch den Punkt Q geht.

1.4 Untersuchen Sie, ob der Punkt R(7 | 4 | 20) innerhalb des Dreiecks APQ liegt.

2. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen das Parallelogramm ABCD auf. Der Punkt E teilt $\overline{DC}$ im Verhältnis 1:3. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt S von BE mit AC die Diagonale $\overline{AC}$.



3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind das Quadrat ABCD mit den Eckpunkten A(6 | 1 | -3), B(2 | 3 | 1), C(0 | 7 | -3), D(4 | 5 | -7) und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

3.1 Bestimmen Sie alle Punkte S der Geraden g so, daß die Pyramide ABCDS mit der Spitze S das Volumen mit der Maßzahl 72 besitzt.

3.2 Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung, daß die Pyramide ABCDS mit der Spitze S(-1 | 0 | -5) eine senkrechte Pyramide ist. ("senkrecht" bedeutet: Die Spitze der Pyramide liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt des Grundflächenquadrates.)

Aufgabe 3

1. An einer Tankstelle stehen 20 Autos in einer Schlange. Unter ihnen sind 5 Autos mit einem Katalysator ausgerüstet. (Ein mit einem Katalysator ausgerüstetes Auto wird in dieser Aufgabe als ´K-Auto´ bezeichnet.)

   1.1 Wie viele Anordnungen gibt es, wenn man nur K-Autos und Nicht-K-Autos unterscheidet?

   1.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die fünf K-Autos in der 2. Hälfte der Schlange?

   1.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die fünf K-Autos direkt hintereinander?

2. Eine Firma stellt elektronische Bauteile her, von denen erfahrungsgemäß 5% defekt sind.

   2.1 Es können nur die beiden Fehler F_1 und F_2 vorkommen. Die Fehler treten unabhängig voneinander auf, und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler F_1 ist 2%. Ein Bauteil ist defekt, wenn an ihm mindestens einer der beiden Fehler auftritt, und sonst nicht.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler F_2.

   2.2 Die Bauteile durchlaufen nach der Produktion eine Kontrolle. Dabei werden 90% der defekten und 5% der intakten Bauteile aussortiert. Die nicht aussortierten Bauteile durchlaufen diese Kontrolle ein zweites Mal.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Bauteil, das bei der zweiten Kontrolle nicht aussortiert worden ist, dennoch defekt? (Zeichnen Sie zunächst ein Baumdiagramm!)

3. Ein Schütze trifft sein Ziel mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.

   3.1 Berechnen Sie für $p=0,55$ die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   A: "Er trifft bei 10 Schüssen mindestens dreimal".
   B: " Er trifft bei 2 Schüssen genau einmal".

   3.2 Alle Trefferwahrscheinlichkeiten p, für die das Ereignis B aus dem Aufgabenteil 3.1 mit mindestens 49,68 prozentiger Wahrscheinlichkeit eintritt, bilden ein Intervall $[p_1, p_2]$. Bestimmen Sie dieses Intervall.