Schriftliche Abiturprüfung 1996

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

Die Aufgaben umfassen 4 Seiten

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_{a,b} : D_{max} \to \mathbb{R} \; ; x \mapsto a(1-x)\,e^{b(1-x)} \; ; \; a, b \in \mathbb{R}$$

1.1 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph in $P\left(3 / -\frac{6}{e}\right)$ eine horizontale Tangente hat.

1.2 Diskutieren Sie die Funktion

$$f: D_{max} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto 3(1-x)\,e^{\frac{1}{2}(1-x)}$$

1.3 Berechnen Sie das Maß der im vierten Quadranten zwischen dem Graphen von f aus 1.2 und der positiven x - Achse liegenden Fläche.

2. Gegeben ist die Funktion

$$g: [0 \; ; \infty[\; \to \mathbb{R} \; ; x \mapsto \frac{4-2x}{x+1}$$

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle, das Monotonieverhalten und die Asymptote der Funktion und skizzieren Sie ihren Graphen

2.2 Begründen Sie, daß die Umkehrfunktion g^{-1} existiert, und bestimmen Sie diese.

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P auf dem Graphen von g so, daß die Normale des Graphen von g in P parallel zur 1.Winkelhalbierenden verläuft.

2.4 Der Graph der Funktion g und die Koordinatenachsen beranden im 1.Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.
(Hinweis: Eine geeignete Substitution ist $t = x + 1$)

2.5 Sei $u \in \;]\,0 \; ; 2\,[$
Die Punkte $A(0/0)$, $B(u/0)$, $C(u/g(u))$, $D(0/g(u))$ sind die Eckpunkte einer Schar von Rechtecken.
Bestimmen Sie u so, daß das zugehörige Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte P (- 6 / - 4 / 8) , Q (2 / - 8 / 0), R (2 / 1 / 9) und die Ebene

$$e:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1.1 Stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene e auf.

1.2 Zeigen Sie: Die Ebene

$$e:\ -2x + y + 2z - 6 = 0$$

ist Symmetrieebene der Punkte P und Q.

1.3 Berechnen Sie den Spiegelpunkt S des Punktes R bezüglich der Ebene e. (Ergebnis: S (6 / -1 / 5))

1.4 Begründen Sie: Das Viereck PQRS ist ein gleichschenkliges Trapez.

1.5 Zeigen Sie: Der Punkt T (0 / -4 / 5) liegt auf der Symmetrieachse des gleichschenkligen Trapezes. Prüfen Sie, ob T innerhalb oder außerhalb des Trapezes liegt.

2. Gegeben sind drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ eines Vektorraums. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\vec{x} = 2\,\vec{a} + 2\,\vec{b} - \vec{c}$$
$$\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$$
$$\vec{z} = 3\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

linear abhängig sind.

3. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ -40 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 40 \\ 9 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

3.1 Zeigen Sie, daß die Geraden g_1 und g_2 windschief sind.

3.2 Bestimmen Sie die beiden Punkte L_1 auf g_1 und L_2 auf g_2 so, daß die Entfernung der beiden Punkte gleich dem Abstand der Geraden g_1 und g_2 voneinander ist. Berechnen Sie diesen Abstand.

Aufgabe 3

1. Im Herbst hatte Herr Gärtner 12 Krokuszwiebeln gekauft, 5 für blaue, 4 für weiße und 3 für gelbe Krokusse. Von diesen wählte er drei zufällig aus und setzte sie im Wohnzimmer in einen Blumentopf.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: "Im Blumentopf ist genau ein blauer Krokus"

B: "Im Blumentopf ist mindestens ein blauer Krokus"

2. Bei der Herstellung von Gußteilen ist ein Gußteil mit der Wahrscheinlichkeit p fehlerhaft. Eine automatische Qualitätskontrolle sondert ein fehlerhaftes Gußteil mit der Wahrscheinlichkeit 0,98 als Ausschuß aus.
Ein fehlerfreies Gußteil wird von der Kontrolle mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 fälschlicherweise als Ausschuß gewertet.
Aus der Gesamtproduktion sortiert die Qualitätskontrolle ein Gußteil mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 aus.

2.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p.
(Ergebnis: $p \approx 0{,}09278$)

2.2 Ein Gußteil wird als Ausschuß ausgesondert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es fehlerfrei?

2.3 Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gußteil aus der Gesamtproduktion fehlerhaft ist, betrage 0,09278.
Berechnen Sie, wie viele Teile eine Stichprobe mindestens umfassen müßte, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens ein fehlerhaftes Gußteil enthält.

3. Sei Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments, P sei ein W-Maß auf Ω. Gegeben sind die Ereignisse A, B, C aus $\wp(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

Die Ereignisse $A \cup B$ und C sind unvereinbar.
Die Ereignisse A und B sind unabhängig.
$P(A) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}1$; $P(A \cup B \cup C) = 0{,}8$.

3.1 Berechnen Sie P(B).

3.2 Stellen Sie die folgenden Ereignisse formal dar und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten.

E_1: Weder A noch C

E_2 : Genau eines der Ereignisse A,C.