SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 1997

Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1. und 2. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung und Taschenrechner

*** Die Aufgaben umfassen 3 Seiten ***

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a : D_{max} \to I\!R; \qquad x \mapsto \frac{x^3 - ax^2}{x-1} \qquad \text{mit} \qquad a \in I\!R\setminus\{1\}$$

1.1 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph mit der x - Achse genau einen gemeinsamen Punkt hat.

1.2 Diskutieren Sie die Funktion

$$f : D_{max} \to I\!R; \ x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$$

(Zur Kontrolle : $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3}$)

1.3 Berechnen Sie das Maß der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f aus 1.2 und der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + x + 1$ über dem Intervall $[\frac{3}{2}; 2]$.

1.4 Bestimmen Sie die Gleichungen aller Tangenten, die vom Ursprung aus an den Graphen der Funktion f aus 1.2 gelegt werden können.

1.5 Zeigen Sie :

Für die erste Ableitung einer beliebigen Funktion der obengenannten Schar f_a gilt:

$$f_a'(x) = \frac{2x^3 - (a+3)x^2 + 2ax}{(x-1)^2}$$

1.6 Bestimmen Sie die Funktionen der Schar, deren Graph mehr als eine waagerechte Tangente besitzt.

2. Gegeben ist die Funktion $f: I\!R \to I\!R; \quad x \mapsto -x^2 + 4x$ und

die Geradenschar $g_m : y = mx \ ; \quad m \in I\!R$

2.1 Berechnen Sie für jede Gerade der Schar die Koordinaten der Schnittpunkte mit dem Graphen von f.

2.2 Für welche Werte von m schneidet die Tangente an den Graphen von f im Punkt P(4-m | f(4-m)) die x - Achse an der Stelle 4,5 ?

2.3 Der Graph der Funktion f und die Gerade mit der Gleichung $y = x$ schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Diese Fläche rotiert um die x - Achse.
Berechnen Sie das Volumen des so erzeugten Drehkörpers.

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte
$A(1 \mid 0 \mid 8)$, $B(2 \mid 1 \mid 7)$, $C(4 \mid 5 \mid 3)$, $D(6 \mid 7 \mid 1)$, $E(6 \mid 8 \mid 2)$

und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in I\!R$

1.1 Zeigen Sie, daß die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

1.2 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C.

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der Ebene $e:\ x_2 + x_3 - 8 = 0$.

1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung der senkrechten Projektion der Geraden g auf die Ebene e.

1.5 Zeigen Sie, daß der Punkt D in der Ebene e liegt.
Bestimmen Sie das Maß des Schnittwinkels zwischen der Ebene e und der Geraden durch die Punkte D und E.

1.6 Berechnen Sie die Koordinaten der Spitzen S der Pyramiden ABCS, die das Volumen $\frac{2}{3}$ und D als Höhenfußpunkt haben.

2. Gegeben ist die Ebene $e: \frac{1}{a} \cdot x_1 + \frac{1}{b} \cdot x_2 + \frac{1}{c} \cdot x_3 - 1 = 0$ mit $a, b, c \in I\!R \setminus \{0\}$.

2.1 Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte A, B und C dieser Ebene e mit den Koordinatenachsen an.

2.2 Zeigen Sie: Das von den Punkten A, B und C gebildete Dreieck ist spitzwinklig.

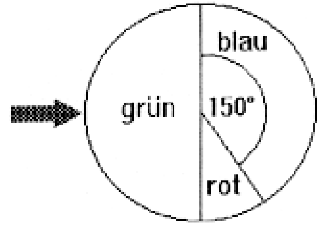
3. Ein Dreieck PQR wird durch die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{PR} = \vec{b}$ aufgespannt.

Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung :

Die Seitenhalbierende der Seite $\overline{QR}$ zerlegt das Dreieck PQR in zwei flächengleiche Teildreiecke.

Aufgabe 3

Das nebenstehende Glücksrad läßt sich um seinen Mittelpunkt drehen. Es ist in drei Felder geteilt, die durch die Farben grün, blau und rot gekennzeichnet sind.
Nach dem Drehen des Rades zeigt der Pfeil immer genau auf ein Feld und bestimmt dadurch eine Farbe.



1. Ein Spieler dreht das Glücksrad zweimal.

1.1 Berechnen Sie mit Hilfe eines Baumdiagrammes die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A : „Der Pfeil zeigt zweimal auf blau."

B : „Der Pfeil zeigt genau einmal auf grün."

C : „Der Pfeil zeigt bei beiden Drehungen auf die gleiche Farbe."

D : „Der Pfeil zeigt bei beiden Drehungen auf verschiedene Farben."

1.2 Prüfen Sie, ob die beiden Ereignisse B und D unabhängig sind.

2. Mit Hilfe des Glücksrades wird ein Gewinnspiel angeboten. Pro Spiel wird das Rad einmal gedreht. Bei einem Einsatz von 1 DM pro Spiel, der in jedem Fall einbehalten wird, ist der folgende Gewinnplan vereinbart:
Zeigt der Pfeil auf blau, erhält der Spieler 3 DM; zeigt er auf rot, erhält der Spieler 10 DM. Wenn der Zeiger auf grün zeigt, muß der Spieler 4 DM zahlen.
Ein Spieler führt das Spiel genau zweimal durch. Die Zufallsgröße X beschreibt seinen Gesamtgewinn.

2.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

2.2 Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Prüfen Sie, ob es für den Spieler rentabel ist, das Gewinnspiel genau zweimal durchzuführen.

3. Das Glücksrad wird nun mehrmals gedreht.

3.1 Betrachten Sie das Ereignis E : „Der Pfeil zeigt mindestens einmal auf blau."

Wie oft muß das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E größer als 99,5% ist ?

3.2 Das Glücksrad wird fünfhundertmal gedreht. Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft der Pfeil auf das grüne Feld zeigt.

Bestimmen Sie ein möglichst kleines Intervall, in dem die Werte von Z gemäß der Ungleichung von Tschebyscheff mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% liegen.