Schriftliche Abiturprüfung 1998

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1./2. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 1:

1 Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a : D_{max} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto a \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{a}}; \quad a \in \mathbb{R}^+$$

1.1 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Nullstelle die Steigung 4 hat.

1.2 Diskutieren Sie die Funktion

$$f: D_{max} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto 4 \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

[Zur Kontrolle: $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 2\right) \cdot e^{-\frac{x}{4}}$]

1.3 Im ersten Quadranten liegt zwischen dem Graphen der Funktion f (aus 1.2) und der x-Achse eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche. Berechnen Sie das Maß dieser Fläche.

1.4 Untersuchen Sie die oben genannte Funktionenschar f_a auf Wendepunkte und bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen.

2 Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{2}{x^2 + 1}$$

2.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie, Monotonie und Extrempunkte. Geben Sie die Gleichung der Asymptote an und skizzieren Sie den Graphen von f.

2.2 Der Graph der Funktion f, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht.

2.3 Sei $u \in \mathbb{R}^+$. Die Punkte $P(u|f(u))$, $Q(0|f(u))$ und der Ursprung $O(0|0)$ bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie u so, dass das zugehörige Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat und berechnen Sie diesen.

3 Bestimmen Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\frac{f'(x)}{f(x) - 2} = 1 \quad \text{und} \quad f(0) = 0$$

Aufgabe 2:

1 Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 2 \mid 3)$, $B(3 \mid 6 \mid -1)$ und $C(5 \mid 4 \mid 7)$.

1.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig und rechtwinklig ist.

1.2 Bestimmen Sie den Punkt D so, dass A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrates sind.

1.3 Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene durch A, B und C auf.

1.4 Bestimmen Sie den Fußpunkt L_k des Lotes vom Punkt $P_k(k+4 \mid 5-k \mid 4k-15)$ auf die Ebene e: $2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0$ in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass alle Punkte P_k mit $k \in \mathbb{R}$ den gleichen Abstand von e haben.

1.5 Die Schnittpunkte der Ebene e aus 1.4 mit den Koordinatenachsen bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

2 Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$ linear unabhängig sind.

3 In einem Dreieck $\triangle ABC$ teilt der Punkt D die Seite $\overline{BC}$ im Verhältnis 2 : 3. Berechnen Sie das Verhältnis, in dem die Seitenhalbierende der Seite $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{AD}$ teilt.

Aufgabe 3:

1 In einer Urne befinden sich zehn von 1 bis 10 durchnummerierte ansonsten gleichartige Kugeln. Zwei dieser Kugeln werden gleichzeitig blind gezogen und nach dem Notieren ihrer Nummern zurückgelegt.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Es werden zwei Kugeln mit geradzahligen Nummern gezogen."

B: „Jede der gezogenen Kugeln trägt eine Nummer, die nicht größer als 6 ist."

$C = A \cup B$

D: „Die Kugel mit der Nummer 1 wird gezogen."

[Ergebnis zur Kontrolle: P(D) = 0,2]

1.2 Wie oft muss das oben beschriebene Zufallsexperiment mindestens durchgeführt werden, damit das Ereignis D (aus 1.1) mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal eintritt ?

2 In einem Leistungskurs Mathematik sind ebenso viele Jungen wie Mädchen. Jeder vierte Junge und jedes sechste Mädchen dieses Kurses sind Brillenträger. (Beachten Sie: Der Begriff „Brillenträger" wird hier für beide Geschlechter verwendet!)

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Kursmitglied kein Brillenträger ist.

2.2 Ein Lehrer findet im Klassensaal eine Brille, die mit Sicherheit von einem Mitglied des Leistungskurses Mathematik stammt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Brille von einem Mädchen stammt. (Jungen- und Mädchenbrillen sollen als nicht unterscheidbar angesehen werden!)

3 Ein Sportschütze trifft bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$.

3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schütze bei 10 Schüssen

3.1.1 jedesmal trifft.

3.1.2 mindestens einmal trifft.

3.1.3 höchstens zweimal trifft.

3.2 Der Schütze schießt 400-mal. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der dabei erzielten Treffer an.

3.2.1 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

3.2.2 Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass die Trefferzahl vom Erwartungswert um weniger als 10 abweicht.

3.3 Wie oft muss der Schütze mindestens schießen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 90% die relative Trefferhäufigkeit der Schussserie von der Trefferwahrscheinlichkeit p um weniger als 0,05 abweicht ?