

Fach : Mathematik

Prüfungsart : 1./2. Prüfungsfach

Dauer : 5 Stunden

Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!**Aufgabe 1**

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto e^{2x} - 4ae^x + 3a^2$, $a \in \mathbb{R}$.
- 1.1 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle $\ln 2$ eine waagerechte Tangente besitzt.
- 1.2 Diskutieren Sie die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto e^{2x} - 4e^x + 3$.
- 1.3 Zeigen Sie : Für negative a haben die Funktionen f_a weder Nullstellen noch Extremstellen noch Wendestellen. Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der Asymptote den Graphen einer Funktion f_a für ein negatives a .

Ziel der nachfolgenden Aufgabenteile 1.4 bis 1.6 ist, einen Überblick über die Lage der Nullstellen zu gewinnen.

- 1.4 Zeigen Sie : Für positive a ist der Abstand der beiden Nullstellen einer Funktion f_a unabhängig von a .
- 1.5 Begründen Sie, dass je nach Wahl von a jede Stelle der x -Achse Nullstelle von f_a sein kann.
- 1.6 Untersuchen Sie, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
- f_a genau eine Nullstelle
 - f_a eine negative und eine positive Nullstelle besitzt.
- 1.7 Die Graphen der Funktionen f_1 und f_{-1} beranden im 2. Quadranten eine Fläche. Schraffieren Sie im Koordinatensystem der Aufgabe 1.2 diese Fläche und untersuchen Sie, ob sie ein endliches Maß hat.

2. Gegeben ist die Integralfunktion $I : D \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt$.

- 2.1 Ermitteln Sie die maximale Definitionsmenge D der Funktion I . Begründen Sie, dass der Term $I(x)$ für alle $x \in D$ existiert.
- 2.2 Zeichnen Sie den Graphen der Integrandenfunktion $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ und erläutern Sie anhand der Zeichnung die geometrische Bedeutung von $I(x)$ für ein $x \in D$ mit $x > -1$.
- 2.3 Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion I und bestimmen Sie den Wendepunkt.
Hinweis : Bei der Berechnung des Funktionswertes an der Wendestelle beachte man die geometrische Bedeutung von I .
- 2.4 Skizzieren Sie den Graphen von I .

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte $A(1 | 4 | -3)$, $B(-2 | 1 | -3)$ und $C(1 | -2 | 5)$.
 - 1.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden, und stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene auf, in der diese Punkte liegen.
 - 1.2 Vom Punkt $D(5 | -3 | -2)$ wird das Lot auf die Ebene $e: -4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3 = 0$ gefällt. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt.
 - 1.3 Der Punkt D und sein Spiegelpunkt D^* bzgl. der Ebene e (Teil 1.2) sowie die Punkte A, B und C bilden einen Körper. Beschreiben Sie diesen Körper und berechnen Sie sein Volumen.
 - 1.4 Stellen Sie die Gleichungen der in der Ebene e (Teil 1.2) liegenden Mittelsenkrechten der Strecken \overline{AB} und \overline{BC} auf und bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten.
 - 1.5 Zeigen Sie: Der Punkt $M(1 | 1 | 1)$ ist der Mittelpunkt der Kreislinie k , auf der die Punkte A, B und C liegen.
 - 1.6 Die Gerade MB durchstößt die Kreislinie k (Teil 1.5) im Punkt B^* ein zweites Mal. Bestimmen Sie B^* und begründen Sie, dass die Dreiecke BAB^* und BCB^* rechtwinklig sind.

2. Gegeben ist die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4+3t \\ t \\ 4t-3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}.$

- 2.1 Die Aufpunkte der Geradenschar liegen selbst auf einer Geraden h . Geben Sie einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor von h an.
- 2.2 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e , in der alle Geraden der Schar enthalten sind.
- 2.3 Welche Gerade der Schar hat minimalen Abstand vom Ursprung?

Aufgabe 3

1. In einer Trommel befinden sich 7 Lose, von denen zwei mit dem Buchstaben A, eines mit C, eines mit E, zwei mit L und eines mit P beschriftet sind. Die Lose werden nacheinander ohne Zurücklegen der Trommel entnommen und von links beginnend nebeneinander gelegt. Das Ziehen der Lose erfolge zufällig.
 - 1.1 Wie viele verschiedene – auch sinnlose – „Wörter“ kann man auf diese Art erzeugen?

- 1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort „Laplace“ entsteht.
- 1.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem erzeugten Wort die Buchstabenfolge „LL“ vorkommt.

2. Bei einer Abschlussprüfung sind 15% der Prüflinge im Fach I, 10% im Fach II und 8% in beiden Fächern durchgefallen.
- 2.1 Berechnen Sie für einen zufällig ausgewählten Prüfling die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse :
A : Der Prüfling ist in mindestens einem Fach durchgefallen.
B : Der Prüfling ist in genau einem Fach durchgefallen.
- 2.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Prüfling im Fach I durchgefallen, wenn bereits bekannt ist, dass er im Fach II durchgefallen ist ?
- 2.3 Nach der Abschlussprüfung unterziehen sich die Prüflinge einem Eignungstest für ein bestimmtes Studienfach. Von den Prüflingen, die in höchstens einem Fach durchgefallen sind, bestehen 80% diesen Test. Insgesamt bestehen 75% der Prüflinge den Test.
- 2.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Eignungstest zu bestehen, wenn man bereits in den beiden Fächern der Abschlussprüfung durchgefallen ist. Zeichnen Sie zunächst ein Baumdiagramm.
- 2.3.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Prüfling, in beiden Fächern durchzufallen und den Eignungstest nicht zu bestehen?

3. Eine Autofabrik erhält regelmäßig umfangreiche Lieferungen von Bauteilen; der Hersteller behauptet, dass der Ausschussanteil 5 % beträgt – (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffenes Stück Ausschuss ist, beträgt 5 %). Der PKW-Hersteller kontrolliert aus jeder Lieferung 20 Bauteile und stellt die Anzahl X der unbrauchbaren Teile fest.
- 3.1 Wie viele unbrauchbare Teile werden durchschnittlich bei einer Kontrolle gefunden, wenn der Ausschussanteil tatsächlich 5 % beträgt ? Wie groß ist die Streuung um diesen Durchschnittswert ?
- 3.2 Werden bei einer Kontrolle mehr als zwei unbrauchbare Teile gefunden, so verweigert der Autohersteller die Annahme, da nach seiner Meinung der Ausschussanteil größer als die angegebenen 5 % ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Firma die Lieferung nicht annimmt, obwohl der Ausschussanteil 5 % beträgt ?