Schriftliche Abiturprüfung 2001

Fach: Mathematik
Prüfungsart: 1./2. Prüfungsfach
Dauer: 5 Stunden
Hilfsmittel: Zugelassene Formelsammlung, Taschenrechner

!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!

Aufgabe 1:

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : IR \to IR, x \mapsto a \cdot (ax+1) \cdot e^{-ax}$ $, a \in IR^+$.

1.1 Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm der 2. Ableitung gilt:
$f_a''(x) = a^3 \cdot (ax-1) \cdot e^{-ax}$.

1.2 Bestimmen Sie a so, dass die Funktion an der Stelle 1 einen Wendepunkt besitzt.

1.3 Diskutieren Sie die Funktion $f: IR \to IR$
$x \mapsto (x+1) \cdot e^{-x}$.

1.4 Der Graph von f schließt mit der x - Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Untersuchen Sie, ob diese Fläche ein endliches Maß besitzt und geben Sie es gegebenenfalls an.

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen.

1.6 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangenten t von f_a. Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

(Zur Kontrolle: t : $y = \frac{-a^2}{e}x + \frac{3a}{e}$)

1.7 Der Schnittpunkt N_a von f_a mit der x - Achse, der Wendepunkt W_a und der Schnittpunkt S_a der Wendetangenten mit der x - Achse bilden ein Dreieck.

1.7.1 Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

1.7.2 Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

2. Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:
$f'(x) = f(x) \cdot (\frac{1}{x+1} - 1)$ und $f(0) = 1$.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

3. Die beiden Koordinatenachsen, die Parallelen zu diesen Achsen durch den Punkt P(3 | 8) und die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{16}{3} - x^2$ schließen im 1.Quadranten eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass P(3 | 8) ein Eckpunkt ist und ein weiterer Eckpunkt Q(x | y) auf der Parabel liegt. Die Rechteckseiten verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen.
Wie sind die Koordinaten von Q zu wählen, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß werden soll ?

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Ebene $e: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

und die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, t \in \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar g_t liegen.

1.2 Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden sowie den Schnittwinkel der Ebene e und der Ebene $e^*: x_2 - 2x_3 + 5 = 0$.

1.3 Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen der Ebene e und den Geraden der Schar g_t in Abhängigkeit von t.

1.4 Eine Gerade der Schar g_t schneidet die Ebene e in $S(4 \mid y \mid z)$. Bestimmen Sie t und die Koordinaten y und z des Punktes S.

1.5 Berechnen Sie alle Punkte der Geraden g_1 $(t = 1)$, die von e den Abstand 2 haben.

2. Gegeben sind die Punkte $A(-4 \mid 4 \mid 2)$, $B(1 \mid -1 \mid 0)$ und $C(5 \mid 1 \mid 2)$.
Durch die Punkte A und C verläuft die Gerade g. Spiegelt man den Punkt B an der Geraden g, so erhält man den Punkt D.

2.1 Bestimmen Sie den Spiegelpunkt D.

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

[redacted]

Vertriebszentrums Chemnitz sind unpünktlich.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine zufällig betrachtete Auslieferung unpünktlich ist.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine unpünktliche Lieferung aus Chemnitz stammt.

1.4 Bei einer Qualitätskontrolle werden 500 Drahtrollen untersucht. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Ausschussrollen und sei binomialverteilt. Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyscheff ab, in welchem Intervall mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbrauchbaren Drahtrollen liegt ?

2. Bei der Produktion von Drähten wird die Drahtstärke durch die Zufallsgröße Y beschrieben. Dabei stellt man folgende Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Drahtstärken (in mm) fest:

Stärke in mm	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2
p	0,02	0,16	0,22	0,52	0,07	0,01

Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Streuung von Y.