Vorwort

Aus rechtlichen Gründen möchte ich Sie darauf hinweisen, dass Sie sich auf einer privaten Homepage befinden, die sich auf dem Sächsischen Schulserver befindet und dem dortigen Layout unterordnet. Insbesondere ist dies keine Seite des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, welches die Abituraufgaben entwickelt.

Außerdem sollten Sie folgendes wissen:

- Dies ist die Abschrift der Prüfungsaufgaben 2001.
- Lösungen der Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen erreicht werden. Hier finden Sie VORSCHLÄGE zur Lösung und VORSCHLÄGE zur Bewertung, die nicht für die Bewertung Ihres Abiturs herangezogen werden können. Dafür ist jeder prüfende Fachlehrer verantwortlich. Ich habe versucht, den graphikfähigen Taschenrechner (GTR) besonders häufig einzusetzen. Eingesetzte Programme finden Sie auf diesen Seiten dokumentiert und anhand von Beispielen erklärt.
- Die offiziellen Abituraufgaben werden nach Beendigung der Prüfungsphase auf dem Sächsischen Schulserver veröffentlicht.
- Für Nachfragen und Ihre Hinweise stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung: F. Müller (Mathe-Lehrer).
- Wenn Sie Fehler finden, teilen Sie sie mir bitte mit.

Prüfungsinhalt Grundkurs

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = e^x (2 - 0{,}5x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion f und die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen mit der y-Achse an.
Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f und geben Sie die Art des Extremums an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

b) Gegeben ist die Funktion F durch $y = F(x) = e^x (2{,}5 - 0{,}5x)$ $(x \in \mathbb{R})$.
Weisen Sie nach, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion der Funktion f, deren Graph den Graphen der Funktion f auf der y-Achse schneidet.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Im Punkt $R(0;\ f(0))$ wird die Tangente t an den Graphen der Funktion f gelegt. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.
Der Graph der Funktion f und die Gerade t begrenzen eine Fläche vollständig.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Für jedes u $(u \in \mathbb{R},\ 0 < u < 4)$ existiert ein Punkt $C_u(u;\ f(u))$.
Die Punkte $A(-1;\ 0)$, $B(4;\ 0)$ und C_u sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C_u so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks maximal wird.
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

e) Die Gerade g mit der Gleichung $y = g(x) = 1{,}5x + 2$ berührt im Punkt $R(0;\ f(0))$ den Graph der Funktion f. Sie berührt in diesem Punkt gleichzeitig einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem positiven Teil der x-Achse liegt.
Bestimmen Sie den Radius des Kreises.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(10;\ -1;\ 0)$ und $C(11;\ 3;\ 0)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC rechtwinklig, aber nicht gleichschenklig ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
Ermitteln Sie eine Gleichung des in der x-y-Ebene liegenden Umkreises dieses Dreiecks.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Es gibt Punkte P_i ($i \in \mathbf{N}$), so dass A, P_i und C Eckpunkte eines in der x-y-Ebene liegenden rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\overline{AC}$ sind.
Wie viele solcher Punkte kann es geben? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Geben Sie die Koordinaten eines solchen Punktes an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Es existiert genau ein Punkt D, so dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

d) Der Punkt S (11; 3; 8) ist die Spitze der Pyramide ABCS. Die zur x-y-Ebene parallele Ebene durch den Mittelpunkt $M_{\overline{AS}}$ der Strecke $\overline{AS}$ zerlegt die Pyramide ABCS in einen Pyramidenstumpf und eine Restpyramide.
Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Teil C: Stochastik

Jeder der sechs Buchstaben des Wortes ”ABITUR” ist auf genau einen von sechs gleichartigen Tischtennisbällen geschrieben, die in einer Lostrommel liegen. Vor jeder Ziehung aus der Trommel wird gut gemischt. Der auf dem jeweiligen gezogenen Tischtennisball befindliche Buchstabe wird notiert, so dass mehrere Ziehungen dann ”Wörter” ergeben.

Betrachtet werden zunächst das dreimalige Ziehen aus dieser Lostrommel und die folgenden daraus resultierenden Ereignisse:

Ereignis E_1: Das Wort „ABI” entsteht, d.h., die Buchstaben A, B und I werden in dieser Reihenfolge gezogen.

Ereignis E_2: Das entstandene ”Wort” besteht aus drei gleichen Buchstaben.

a) Der gezogene Ball werde nach jeder Ziehung in die Lostrommel zurückgelegt. Ermitteln Sie für die Ereignisse E_1 und E_2 jeweils die Wahrscheinlichkeit.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

b) Der gezogene Ball werde nicht in die Lostrommel zurückgelegt.
Ermitteln Sie für die Ereignisse E_1 und E_2 jeweils die Wahrscheinlichkeit.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Im Folgenden wird der Zufallsversuch „18faches Ziehen aus der beschriebenen Lostrommel mit Zurücklegen” betrachtet.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens so viele Bälle mit dem Buchstaben A gezogen werden, wie zu erwarten sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Wort entsteht, welches mit 4 Buchstaben A beginnt und an dessen restlichen 14 Stellen je ein von A verschiedener Buchstabe steht.
Erläutern Sie, wie Sie diese Wahrscheinlichkeit nutzen können, um die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses E_1 zu ermitteln.

Ereignis E_3: Das entstandene Wort enthält genau viermal den Buchstaben A.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

e) Als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein entstandenes „Wort" höchstens 17-mal den Buchstaben A enthält, zeigt ein Taschenrechner den Wert 1 an. Katharina schlussfolgert daraus, dass das Ereignis das sichere Ereignis dieses Zufallsversuches sei.
Werten Sie die Schlussfolgerung Katharinas.

Erreichbare BE-Anzahl: 1

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Gegeben sind Funktionen f_t durch $y = f_t(x) = (x - 4)/x - 2x + t$ ($t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{D}_{ft}$).

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gleichung der Funktion f_8 in der Form $y = f_8(x) = (-2x+9x-4)/x$ ($x \in \mathbf{D}_{ft}$) geschrieben werden kann.
Geben Sie für die Funktion f_8 den Definitionsbereich sowie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

b) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F_8 der Funktion f_8, für die gilt $F_8(1) = 0$.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Jede Funktion f_t besitzt genau ein lokales Maximum.
Geben Sie die Koordinaten des lokalen Maximumpunktes in Abhängigkeit von t an.
Zeigen Sie, dass die erste Ableitung $f'_t(x)$ von t unabhängig ist, und deuten Sie den Sachverhalt geometrisch.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ermitteln Sie alle reellen Zahlen p und q, für die die quadratische Funktion g mit der Gleichung $y = g(x) = x + px + q$ an den Stellen $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 4$ die gleichen Funktionswerte wie die Funktion f_8 hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0; 0; 1), B(4; 3; 9) und C(0; 0; 9) gegeben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter. Bei Rotation des Dreiecks ABC um die z-Achse entsteht ein gerader Kreiskegel.

a) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
Berechnen Sie das Volumen des Kreiskegels.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Die y-z-Ebene ist eine Symmetrieebene des Kreiskegels. In dieser Ebene gibt es Geraden, die den auf dem Mantel des Kreiskegels liegenden Punkt P(0; 2,5; 5) enthalten und die teilweise im Inneren des Kreiskegels verlaufen.
Zeigen Sie zeichnerisch, dass eine solche Gerade existiert, bei der die Länge der im Inneren verlaufenden Strecke minimal wird.

Geben Sie den Messwert für die Länge dieser Strecke an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt Q (9/8; 3/2; 4) auf der Mantelfläche des Kreiskegels liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Prüfungsinhalt Leistungskurs

Pflichtaufgaben

Teil A: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbf{R}$) ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = \dfrac{e^x}{8\cdot(t+x)^2}$ ($x \in \mathbf{D}_{\mathbf{ft}}$) gegeben. Außerdem ist eine Funktion g durch $y = g(x) = 1/32\ e^x$ gegeben.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f_t sowie die Nullstellen und die Polstellen dieser Funktion an.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_t den lokalen Minimumpunkt
$$P_{MIN}\left(2-t;\ \frac{e^2}{32e^t}\right)$$ besitzt.
Zeigen Sie, dass es genau einen Wert t gibt, für den der Graph der zugehörigen Funktion f_t keinen Schnittpunkt mit der y-Achse besitzt.
Geben Sie das Verhalten der Funktion f_t für $x \to -\infty$ an.
Weisen Sie nach, dass die Funktion f_t für $x < -t$ monoton wachsend ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 12

b) Zeigen Sie, dass die lokalen Minimumpunkte aller Funktionen f_t auf dem Graphen der Funktion g liegen.
Überprüfen Sie rechnerisch, ohne Verwendung von Näherungswerten, ob der Punkt $P(2\ \ln 32+2;\ 32e^2)$ auf dem Graphen der Funktion g liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Die Graphen der Funktionen f_0 und f_{-1} werden von Geraden $x = c$ ($c \in \mathbf{R}$, $c > 1$) geschnitten.
Ermitteln Sie den Wert c, für den die Differenz der Funktionswerte $f_{-1}(c) - f_0(c)$ minimal wird und geben Sie diese minimale Differenz an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Der Graph der Funktion f_{-1} wird im lokalen Minimumpunkt von einer Geraden h berührt.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden h.
Der Graph der Funktion f_{-1}, die y-Achse, der Graph der Funktion g und die Gerade h schließen eine Fläche A vollständig ein.
Skizzieren Sie den Sachverhalt in einem Koordinatensystem mit geeigneter Achseneinteilung. Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung des Inhaltes der Fläche A und geben Sie den Flächeninhalt an.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

e) Eine Gerade s wird durch die lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_0 und f_{-1} bestimmt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines auf dem Graphen der Funktion g liegenden Punktes Q, in welchem der Graph der Funktion g den gleichen Anstieg wie die Gerade s hat.
Ermitteln Sie den Abstand des Punktes Q von der Geraden s.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

Teil B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind für jedes t ($t \in \mathbf{R}$, $t > 0$) die Punkte A(6; 0; 0), $B_t(8; t^2;0)$, $C_t(4; 3t; 0)$ und D(2; 2; 0) gegeben.
Jedes Viereck AB_tC_tD ist Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(5; 3; 6).

a) Ermitteln Sie den Abstand des Punktes C_1 von der Ebene, in der die Seitenfläche AB_1S liegt. Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen dieser Seitenflächenebene und der Grundflächenebene.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Berechnen Sie alle Werte t, für die die Seitenkante $\overline{B_t S}$ die Länge 23 hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass es genau einen Wert t gibt, für den die zugehörige Pyramide eine quadratische Grundfläche besitzt.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

d) Wir betrachten die zu t = 2 gehörende quadratische Pyramide sowie zur x-y-Ebene parallele Ebenen, die diese Pyramide schneiden. Unter diesen Ebenen existiert genau eine Ebene, für die der Inhalt der Schnittfläche 25% des Inhaltes der Grundfläche der Pyramide beträgt.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Berechnen Sie den Wert des Parameters t, für den die Seitenfläche SC_tD senkrecht zur Grundfläche ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

f) Berechnen Sie alle Werte t, so dass für die zugehörige Pyramide gilt:

$$\cos \sphericalangle B_t AD = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad .$$

Erreichbare BE-Anzahl: 5

Teil C: Stochastik

In der theoretischen Fahrschulprüfung erhält ein Prüfungsteilnehmer einen Fragebogen mit genau 30 Fragen, von denen genau 6 Fragen zur Kraftfahrzeugtechnik und die restlichen Fragen zu Verkehrsregeln gestellt sind. Zur Vorbereitung der Prüfung stellt die Fahrschullehrerin einen Test zusammen. Sie will aus den 30 Fragen eines Prüfungsbogens genau 12 Fragen auswählen, wobei genau 2 Fragen zur Kraftfahrzeugtechnik enthalten sein sollen.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten, wenn die Auswahl der Fragen unabhängig voneinander erfolgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Die theoretische Prüfung darf im Falle des Nichtbestehens nur genau einmal wiederholt werden. Ein Prüfungsteilnehmer besteht die theoretische Prüfung mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% im ersten Versuch. 80% der Fahrschüler, die den zweiten Versuch wahrnehmen müssen, bestehen diesen.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Fahrschüler die theoretische Prüfung besteht.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

c) Eine Zulassung zur praktischen Prüfung erfolgt erst, wenn die theoretische Prüfung bestanden wurde. Außerdem ist bekannt, dass 25% der Fahrschüler, die die theoretische Prüfung im ersten Versuch nicht bestanden hatten, auch die praktische Prüfung nicht im ersten Versuch schaffen. Von den Fahrschülern, die die theoretische Prüfung im ersten Versuch schafften, bewältigen 90% auch die praktische Prüfung im ersten Versuch.
Die Fahrschule möchte, dass mindestens ein Schüler eines Kurses mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% die praktische Prüfung im ersten Versuch schafft.
Ermitteln Sie, wie viele Fahrschüler der Kurs mindestens umfassen muss, um das zu erreichen.
Der Prüfungsteilnehmer Philipp berichtet voller Stolz von seiner im ersten Versuch bestandenen praktischen Prüfung.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Philipp auch die theoretische Prüfung im ersten Versuch bestanden hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Eine Druckerei druckt täglich 10000 Fragebögen für die theoretische Fahrschulprüfung. Davon sind 4% Ausschuss. Ausschussstücke treten unabhängig voneinander auf. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Fragebögen einer Tagesproduktion, die nicht Ausschuss sind.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 9580 Fragebögen einer Tagesproduktion kein Ausschuss sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Fragebögen einer Tagesproduktion, die nicht Ausschuss sind, um mehr al5 10 Stück vom Erwartungswert der Zufallsgröße X abweicht.
Begründen Sie, dass die Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow nicht sinnvoll ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Teil D: Wahlaufgaben

Wählen Sie genau eine der folgenden Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Aufgabe D 1: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbf{R}$, $t > 0$) ist eine Funktion f_t durch $y = f_t(x) = t \sin(tx) + t$ ($x \in \mathbf{R}$, $x > 0$) gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktion f_t.
Weisen Sie die Art der Extrema nach.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen eingeschlossen wird.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

c) Für jede Funktion f_t betrachten wir den Wendepunkt mit der kleinsten Abszisse.
Bestimmen Sie den Wert t, für den der Abstand dieses Wendepunktes vom Koordinatenursprung minimal ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

d) Ermitteln Sie alle Werte t, für die die jeweils zugehörige Funktion f_t im Intervall $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ mindestens 8 Nullstellen besitzt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Aufgabe D 2: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen E_1 durch $2x - y + 2z = 1$, E_2 durch $2x + 2y + z = 4$ und die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbf{R})$ gegeben.

Für jedes t $(t \in \mathbf{R})$ verläuft eine Gerade k_t durch den Koordinatenursprung und den Punkt $P_t(-1; -1; t)$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E_1 und E_2 und geben Sie die Größe des Schnittwinkels beider Ebenen an.
Bestimmen Sie alle Werte t, für die sich die Gerade k_t und die Gerade g schneiden.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Es existieren Punkte auf der Geraden g, die von den Ebenen E_1 und E_2 den gleichen Abstand haben.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Die Ebene E_2 und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide.

c) Skizzieren Sie die Pyramide in einem kartesischen Koordinatensystem.
Alle Geraden k_t befinden sich in einer Ebene F, in der auch die z-Achse des Koordinatensystems liegt.
Begründen Sie, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide ist.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) Gegeben sei ein Punkt mit jeweils positiver x-, y- und z-Koordinate.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dessen Hilfe überprüft werden kann, ob der Punkt in der Pyramide liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

Lösungsidee, Ergebnisse und Vorschläge zur Bewertung

Beachten Sie bitte, dass die unten aufgeführten Dingen nur **Vorschläge** zur Bewertung und **Vorschläge** zur Lösung sind.

Ich habe mich bemüht, möglichst einfache Lösungswege anschaulich darzustellen. Außerdem versuche ich den GTR (TI-82) an möglichst vielen Stellen, aber nur wenn es erlaubt ist, zu verwenden.

Beachten Sie bitte auch:

- die Lösungsvorschläge von Ch. Moeller!
  - Grundkurs
  - Leistungskurs
- die Hinweise zum Abitur auf
  - dem Sächsischen Schulserver: www.sn.sachsen.de
  - der Mathe-Seite auf dem Sächsischen Schulserver: www.sn.sachsen.de/~mathe
  - dem Sächsischen Kultusministerium für Kultus mit weiteren rechtlichen Bestimmungen

Weitere Anregungen und Verbesserungen können Sie mir gerne schicken: F. Müller.

Grundkurs

Teil A

a) Nullstelle: $x_N = 4$
Koordinaten des Schnittpunktes P_y mit der y-Achse: $P_y(0; 2)$
1. Ableitung $f'(x) = e^x \frac{(3-x)}{2}$
2. und 3. Ableitung $f''(x) = e^x \frac{(2-x)}{2}$, $f'''(x) = e^x \frac{(1-x)}{2}$
Extremstelle: da $e^x \neq 0$ folgt $x_e = 3$
Koordinaten des lokalen Extrempunktes und Art des Extremums: $P_{MAX}(3; 0{,}5e^3)$ bzw. $P_{MAX}(3{,}0; 10{,}0)$
Nachweis für genau einen Wendepunkt: da $e^x \neq 0$ folgt mit $x_W = 2$ gibt es höchstens einen und aus $f'''(x_W) = -0{,}5\ e^2 \neq 0$ folgt es gibt genau einen Wendepunkt
Koordinaten des Wendepunktes: $P_W(2; e^2)$ bzw. $P_W(2{,}0; 7{,}4)$ 8 BE

b) Ansatz für Nachweis: $F'(x) = f(x)$
Nachweis: $F'(x) = e^x (2 - 0{,}5x) = f(x)$
Ansatz für Gleichung der speziellen Stammfunktion: $F(0) + C = f(0) \Rightarrow C = f(0) - F(0) = 2 - e^0 (2{,}5 - 0) = -0{,}5$
Gleichung der speziellen Stammfunktion: $F^*(x) = e^x (2{,}5 - 0{,}5x) - 0{,}5$ 4 BE

c) Ansatz für Gleichung der Tangente: R(0 | 2) ⇒ n = 2 und m = f'(0)
Gleichung der Tangente: y = 1,5x+ 2
Integrationsgrenzen: GTR `Y1=`f(x) und `solve(Y1-1.5x-2,X,4)` → 3,5635

Ansatz für Flächeninhalt: $\int_0^{3,5635} f(x) - 1{,}5x - 2\,dx$

und GTR `fnInt(Y1-1.5x-2,X,0,3.5635)` → 6,199
Flächeninhalt A: A = 6,2 5 BE

d) Zielfunktion oder Lösungsidee: Das bezeichnete Dreieck hat Strecke $\overline{AB}$ zur Grundseite und f(u) zur Höhe auf dieser Grundseite. Der Flächeninhalt A(u) hängt damit nur von der Höhe ab. Wird die Höhe maximal, so wird auch der Flächeninhalt maximal.
Extremstelle
Damit ist die gesuchte Stelle u = x_e, der Gesuchte Punkt C_u (u | f(u)) = P_{MAX} und der Flächeninhalt A(3) = 5 f(x_e) / 2 = 5/4 e^3.
Koordinaten des Punktes C_u: C_u(3; 0,5e^3) bzw. C_u (3,0; 10,0)
maximaler Flächeninhalt A: A = 1,25e^3 bzw. A ≈ 25,1
4 BE

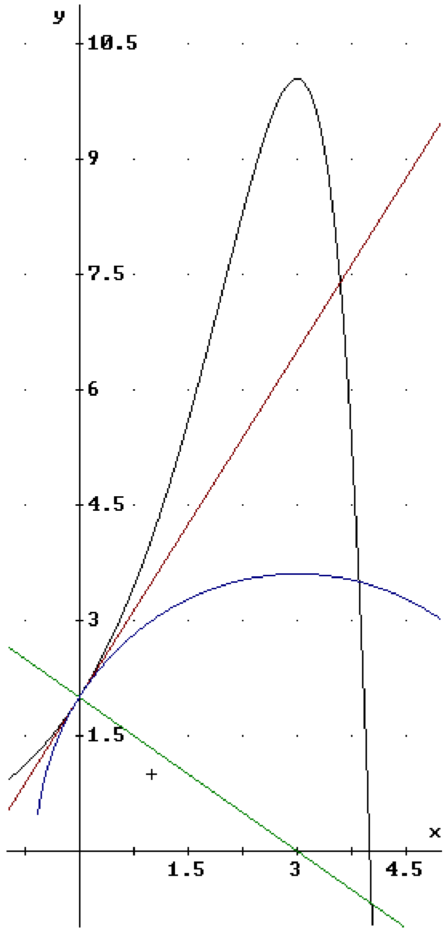


Abbildung 1

e) Ansatz für Gleichung der Senkrechten zur Geraden g:
Der Anstieg der Normalen ist senkrecht zur Tangente in R ⇒ m = -2/3 und der Schnittpunkt mit der y-Achse ist R, also n = 2
Gleichung der Senkrechten: y = -2/3 x +2
Nullstelle der Senkrechten: x_0 = 3
Radius r des Kreises: r = √13 = √ ($2^2 + 3^2$) 4 BE

25 BE

Teil B

a) Untersuchung auf Gleichschenkligkeit
$\vec{AB}$ = (8 | -2 | 0), $\vec{BC}$ = (1 | 4 | 0), $\vec{AC}$ = (9 | 2 | 0) und
$|\vec{AB}| = \sqrt{4\cdot 17} = 2\cdot\sqrt{17}$, $|\vec{BC}| = \sqrt{17}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{85} = \sqrt{5\cdot 17}$ ⇒ das Dreieck ist nicht gleichschenklig
Einsatz des GTR: siehe Tabelle
Ansatz für Untersuchung auf Rechtwinkligkeit
mit dem Satz des Pythagoras folgt: 4 · 17 + 17 = 5 · 17 und der rechte Winkel ist β
Nachweis der Rechtwinkligkeit
Ansatz für Flächeninhalt
$A = \frac{1}{2}|\vec{AB}|\cdot|\vec{BC}|$ = ½ √17 · 2√17 = 17
Flächeninhalt A: A = 17
Koordinaten des Mittelpunktes des Umkreises: mit GTR prgmGEOMETRI

Erläuterungen zur Verwendung des GTR	***Ansicht GTR***

- Starten des Programms (Abbildung 2)
- Ausführen des Programmteils Dreieck (Abbildung 3)

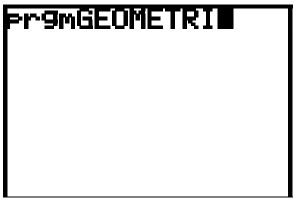


Abbildung 2

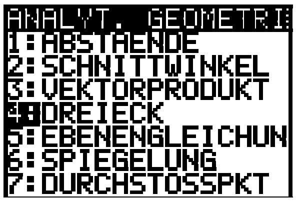


Abbildung 3

- Eingabe der Punkte A, B und C (Abbildung 4, 5)

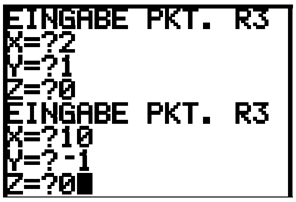


Abbildung 4

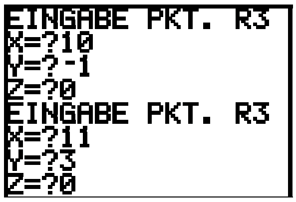


Abbildung 5

- Nach kurzer Berechnung aller relevanter Daten:
- Auswahl der interessierenden Angaben
  - Beispiel: Seitenlänge
    In der Ausgabe wird angezeigt, in welcher Liste die Angaben gespeichert wurden. Zumeist sind das die Listen 6 und 5. Sollten die Listen im Display nicht ganz zu lesen sein, können die Listen im Stat – Edit – Menü konsultiert werden. Dazu weiter unten mehr.

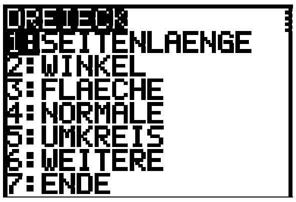


Abbildung 6

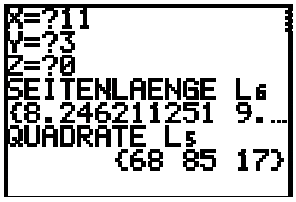


Abbildung 8

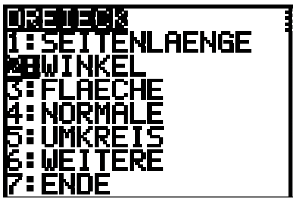


Abbildung 7

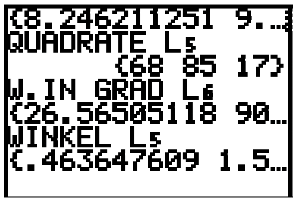


Abbildung 9

  - Beispiel: Winkel
  - Beispiel: Umkreis
    Wie in und anderen zu sehen ist, wird immer auch das Quadrat der Längen angegeben. Damit können gegebenenfalls die exakteren Werte verwendet werden.
    Das Programm GEOMETRI.82G sollte so sicher sein, dass Fälle in denen keine Lösungen möglich sind, automatisch erkennt und anzeigt. In diesen Fällen sollte der Benutzer nochmals die eingegebenen Werte überprüfen bzw. über den Sinn der Berechnung nachdenken.

Abbildung 10

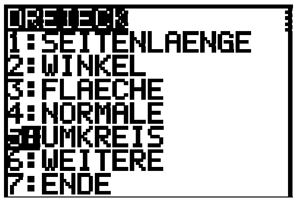


Abbildung 12

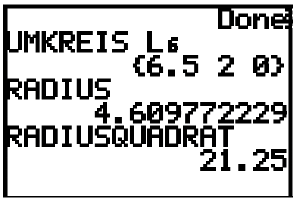
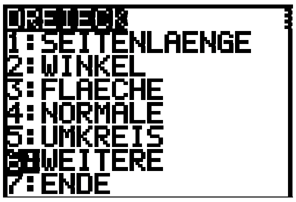
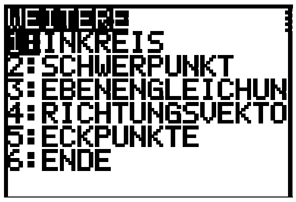
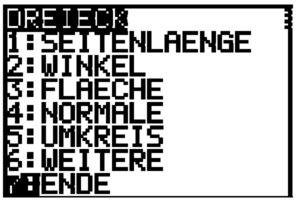
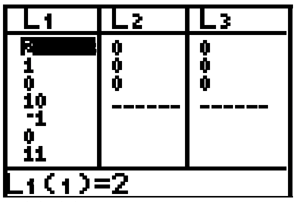
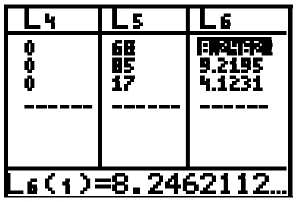
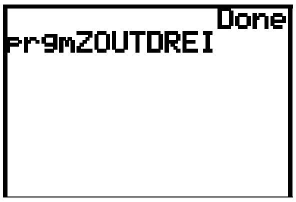
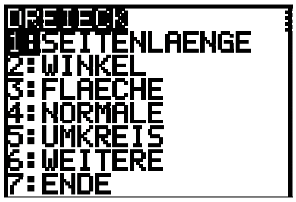


Abbildung 11

Erläuterungen zur Verwendung des GTR	***Ansicht GTR***
• Übersicht über das vollständige Menü Anmerkungen: • Inkreis im Moment noch unfertig (liefert falsche Ergebnisse) • Ebenengeleichung noch unfertig (liefert keine Ergebnisse)	 *Abbildung 13*  *Abbildung 14*
• Das Beenden der Anzeige der Ergebnisse ist auf zweierlei Weisen möglich. Sie kehren in´s Display zurück. Danach können die gespeicherten Listen kontrolliert werden. Da sind die vollständigen Werte zu sehen.	 *Abbildung 15*  *Abbildung 16*
• Die folgenden Listen gehören zur Berechnung der Seitenlängen. Um die Listen zu sehen, wählen Sie … + Edit. Wie auch in Abbildung 6 zu erkennen ist, enthält L_6 die Seitenlängen und L_5 deren Quadrate.	 *Abbildung 17*  *Abbildung 18*
• Sollte die Liste L_1 nicht beschädigt sein, ist es möglich, die Anzeige der Ergebnisse fortzusetzen ohne die Eckpunkte nochmals einzugeben. Starten Sie dazu einfach das Programm prgmZOUTDREI.	 *Abbildung 19*  *Abbildung 20*

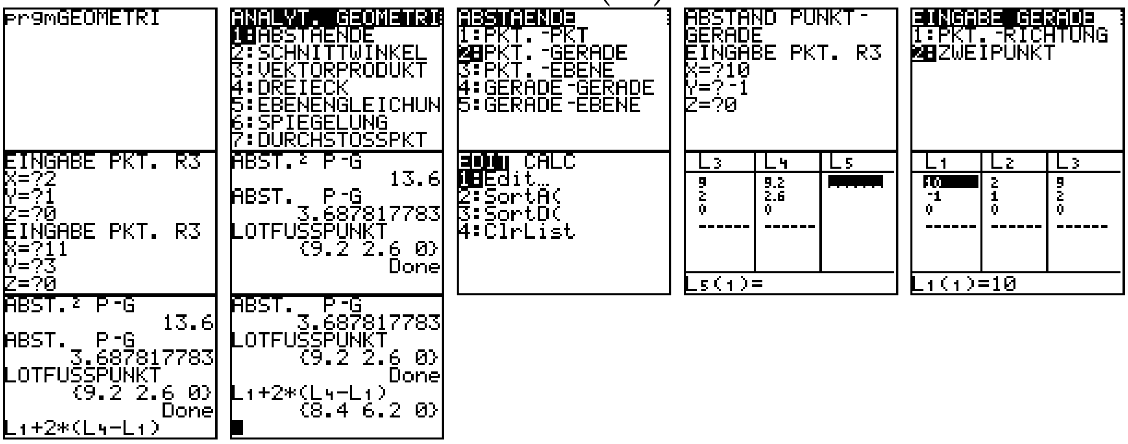
Gleichung des Umkreises: $(x-6{,}5)^2 + (y-2)^2 = 21{,}25$ 7 BE

b) Anzahl der Punkte: 2
siehe Abbildung 21
Begründung
Koordinaten eines solchen Punktes P: $P_1(5{,}5;\ 6{,}5;\ 0)$ bzw. $P_2(7{,}5;\ -2{,}5;\ 0)$
Aufgrund der bereits nachgewiesenen Eigenschaften des Dreiecks, bietet es sich an, den Satz des Thales zur Lösung zu verwenden. Bilden wir die Mittelsenkrechte, finden wir $y = -\frac{9}{2}x + \frac{125}{4}$ und suchen Schnittpunkte mit dem Umkreis, kommen wir auf die Gleichung $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}x + \frac{117}{4}\right)^2 = \frac{85}{4}$, die wir mit dem GTR lösen könnten `solve((X-6.5)²+(-4.5X+29.25)²-21.25,X,Startwert)`. Wählen wir den *`Startwert`* so, dass er einmal links und einmal rechts des Umkreismittelpunktes liegt, so finden wir die entsprechenden x-Werte.
Eine elegantere Lösungsidee finden Sie im Script (Pdf-Format) von Christian Moeller. 3 BE

c) Ansatz für Koordinaten des Punktes D

Spieglung von B an |AC| – Einschränkung auf x-y-Ebene möglich

1. $\vec{OD} = \vec{OB} + 2\cdot \vec{AC}^{*}_{\perp}$ mit Normierung von $\vec{AC}^{*}_{\perp} = \dfrac{\vec{AC}_{\perp}}{|\vec{AC}_{\perp}|}$ und Skalierung s= des Abstandes von B zu g_{AC}: z. B. $\vec{AC}^{*}_{\perp} = \dfrac{1}{\sqrt{85}}\cdot\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}$ mit GTR prgmGEOMETRI



2. ohne Normierung und mit Reduzierung auf die Ebene:

   $\vec{AC}^{\#}_{\perp} = \begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}$ und Gleichsetzen der Geradengleichungen g_{AC} und g_{BD}

   $\vec{OB} + s\cdot \vec{AC}^{\#}_{\perp} = \vec{OA} + t\cdot \vec{AC}$ folgt s = 2/5 und t = 4/5 (z. B. GTR prgmLINEARGS)

   und $\vec{OD} = \vec{OB} + 2\cdot\dfrac{2}{5}\,\vec{AC}^{\#}_{\perp}$

3. oder zwei Kreise um A und C durch B:

   $$68 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$
   $$17 = (x-11)^2 + (y-3)^2$$
   und Lösung des Gleichungssystems

Koordinaten des Punktes D: D(8,4; 6,2; 0) 2 BE

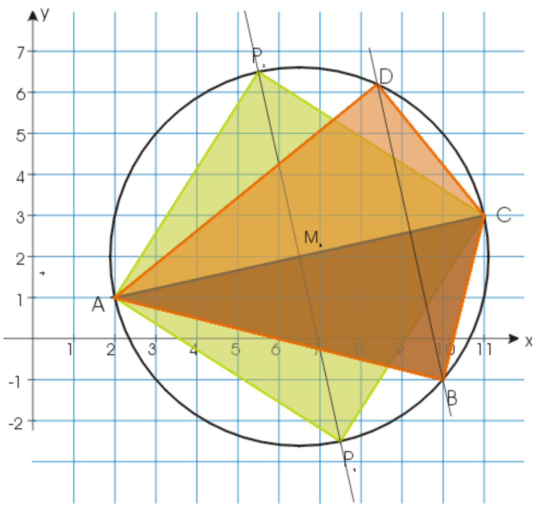


Abbildung 21

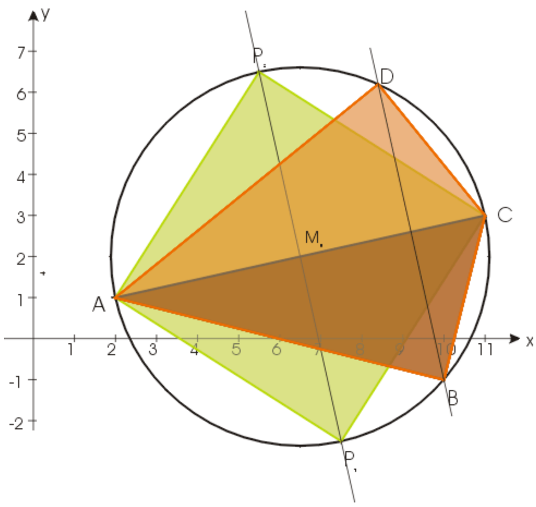


Abbildung 22

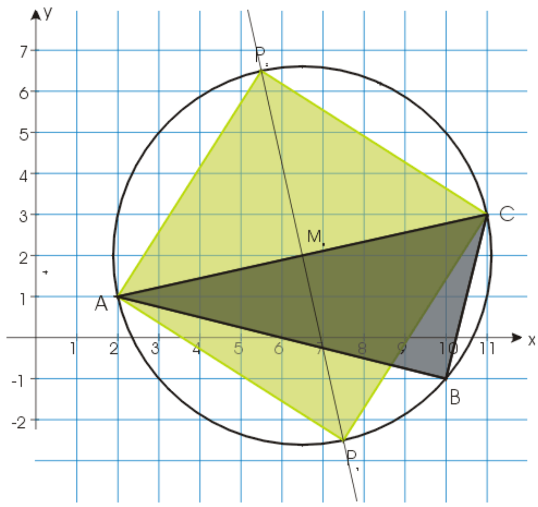


Abbildung 23

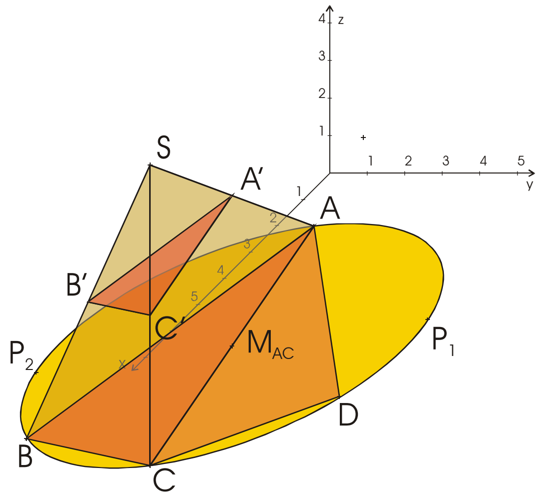


Abbildung 24

d) Volumen der Pyramide ABCS

Der Flächeninhalt der Grundfläche ist bekannt: 17 FE, die Höhe beträgt 8 LE, da Dreieck ABC in der x-y-Ebene liegt. Außerdem befindet sich S über C.

$V_{gesamt} = 1/3 \cdot 17 \cdot 8 = 2/3 \cdot 17 \cdot 4$

Ansatz für Volumen des Pyramidenstumpfes

$V_{Spitze} = 1/3 \cdot ¼\ 17 \cdot 4$, da die Kanten des Dreiecks A'B'C' jeweils halb so lang sind, wie die Originallängen, muss die Fläche des Dreiecks A'B'C' ¼ von 17 betragen.

$V_{Stumpf} = V_{gesamt} – V_{Spitze} = (2/3 – 1/12) \cdot 17 \cdot 4 = 7/12 \cdot 17 \cdot 4$

Volumen V des Pyramidenstumpfes: V = 119/3 <u>3 BE</u>

<u>15 BE</u>

Teil C

a) Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$: $P(E_1) = 1/216 = 1/6^3$

Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$: $P(E_2) = 1/36 = 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1$ 2 BE

b) Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$: $P(E_1) = 1/120 = 1/6 \cdot 1/5 \cdot 1/4$

Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$: $P(E_2) = 0$ (unmögliches Ereignis) 2 BE

c) Charakterisierung der Zufallsgröße

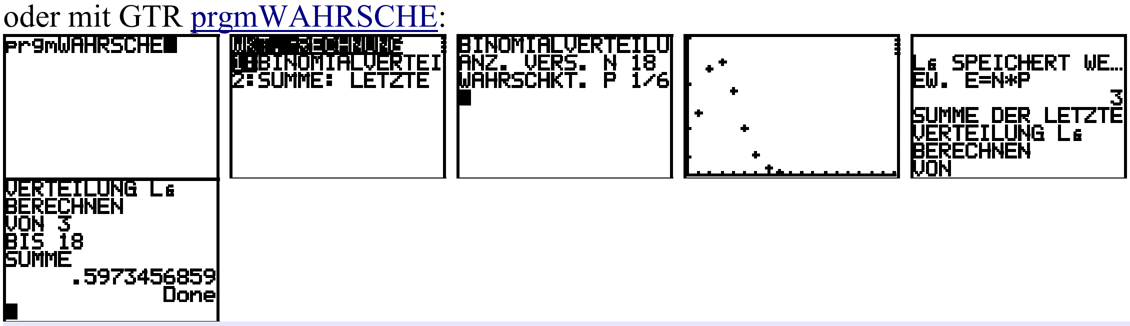
Binomialverteilung mit n = 18 und p = 1/6

$E = n \cdot p = 3$

Erwartungswert

$P(X \geqslant 3) = 1- P(X=0) - P(X=1) – P(X=2) = 1- 0{,}40265$

oder mit GTR prgmWAHRSCHE:



Wahrscheinlichkeit: p = 0,5973 3 BE

d) Wahrscheinlichkeit des Ziehungsergebnisses: p = 0,00006

$$P(4\,x\,A)\cdot P(14\,x\,\overline{A}) = \frac{1}{6^4}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{14}$$

Erläuterung des Vorgehens

Das Vorkommen der „A"-Werte muss jetzt auf alle 18 Plätze verteilt werden. Das sind $\binom{18}{4}$ Möglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit 3060 mal größer als die zuvor ermittelte. 2 BE

e) Begründung der Falschheit der Aussage Katharinas

Die Wahrscheinlichkeit kann nicht 1 sein, da es nicht unmöglich ist genau 18 mal A zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist allerdings so groß, dass es die Genauigkeit des Taschenrechners übersteigt. 1 BE

10 BE

Aufgabe D 1

a) Nachweis

$f_t(x) = \frac{x-4}{x} - 2x + t = 1 - \frac{4}{x} - 2x + t = -2x + (t+1) - \frac{4}{x}$ mit t=8 folgt das Nachzuweisende

Definitionsbereich: $D_{f8} = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$

Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte:

GTR:

`solve(nDerive(Y1,X,X),X, 2)` → 1,414 ≈ √2 und

`solve(nDerive(Y1,X,X),X,-2)` → -1,414 ≈ -√2

$P_{MIN}(-1,4; 14,7)$ lokales Minimum

$P_{MAX}(1,4; 3,3)$ lokales Maximum 3 BE

b) Ansatz für Stammfunktion

$F_8(1) = 0$ und $F_8(x) = \int -2x + 9\,dx - 4\cdot\int \frac{1}{x}\,dx + C = -x^2 + 9x - 4\ln|x| + C \Rightarrow C = -8$

Stammfunktion: $F_8(x) = -x^2 + 9x - 4\ln|x| - 8$ 2 BE

c) $f'_t(x) = 4/x^2 - 2$ mit $f'_t(x_e) = 0 \Rightarrow x_e = \sqrt{2}$ und $y_e = f_t(\sqrt{2}) = 1 - 4\sqrt{2} + t$

Koordinaten des lokalen Maximumpunktes: $P_{MAX}(1,4; -4,7 + t)$ bzw. $P_{MAX}(\sqrt{2}; -4\sqrt{2} + 1 + t)$

Ansatz für Nachweis

Wie oben zu sehen ist, gilt: $f'_t(x) = f'(x)$. Der Parameter t verschiebt die Originalfunktion $f_t(x)$ entlang der y-Achse. Damit hat t keinen Einfluss auf den Anstieg der Funktion (und damit der Werte der Ableitungsfunktion f'_t) einer beliebigen Stelle im Definitionsbereich der Funktion f_t.

Nachweis und geometrische Deutung 3 BE

d) Ansatz für Werte p und q

$g(x) = x^2 + px + q$

mit $f_8(0,5) = 0$ und $f_8(4) = 0$ folgt: $g(x) = (x - 0,5)(x - 4) = x^2 - 4,5x + 2$

Werte p und q: p = – 4,5, q = 2 2 BE

10 BE

Aufgabe D 2

a) Begründung der Rechtwinkligkeit

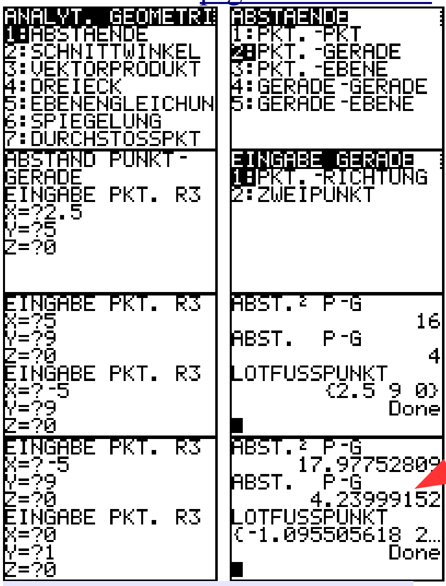
$$\vec{AC}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}\quad,\quad \vec{BC}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \vec{AC}\cdot\vec{BC}=0\quad \Rightarrow \text{rechter Winkel bei C}$$

Höhe des Kreiskegels
Radius

$$V_k=\frac{1}{3}A_G\cdot h=\frac{1}{3}\,\pi\,|\vec{BC}|^2\cdot|\vec{AC}|=\frac{1}{3}\,\pi\,5^2\cdot 8$$

Volumen V des Kreiskegels: V = 200/3 π cm^3 = 209,4 cm^3 4 BE

b) Darstellung des Sachverhaltes
Zeichnen der Lote
oder mit GTR: prgmGEOMETRI



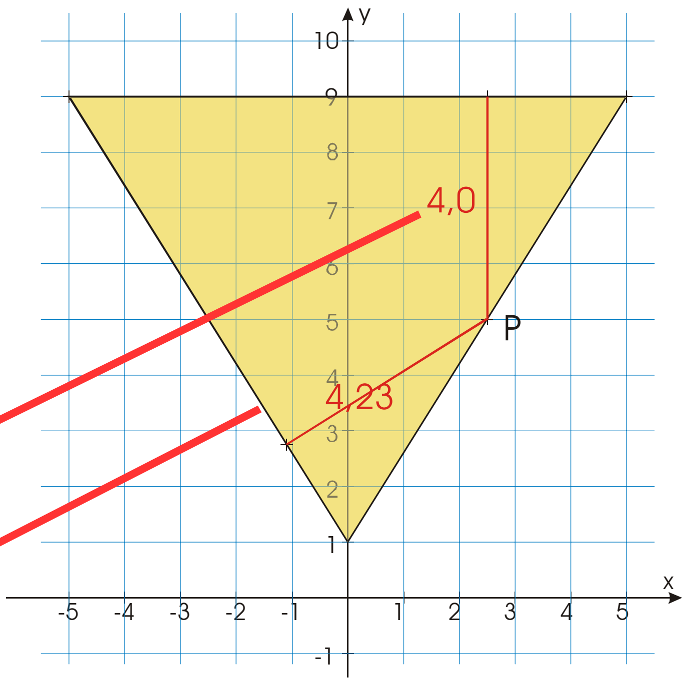


Abbildung 25

Entscheidung für einen Fall und
Messwert I: I = 4,0 cm^3 3 BE

c) Ansatz für Abstand mit Strahlensatz
Ansatz für Abstand auf einem weiteren Weg
Vergleich der Abstände und Schlussfolgerung <u>3 BE</u>
<u>10 BE</u>

Leistungskurs

Teil A

a) Definitionsbereich: $D_{ft}=\{x \mid x \in R,\ x \neq -t\}$
Aussage zu Nullstellen: Es existieren keine Nullstellen, denn $e^x \neq 0$
Polstelle: $x_p = -t$, denn $8\,(t + x_p)^{-2} = 0$ für $x_p = -t$

1. Ableitung: $$f'_t(x)=\frac{e^x\cdot(x+t-2)}{8(x+t)^3}\quad,\quad f''_t(x)=\frac{e^x\cdot(x^2+2\cdot x\cdot(t-2)+t^2-4\cdot t+6)}{8(x+t)^4}$$

Extremstelle

$$f'_t(2-t) = \frac{e^{(2-t)}\cdot(2-t+t-2)}{8(2-t+t)^3} = 0 \quad \Rightarrow \text{lok. Extrema}$$

Nachweis

$$f''_t(2-t) = \frac{e^{2-t}}{64} > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f_t(2-t) = \frac{e^{2-t}}{32}$$

Ansatz für Wert t

$$f_t(0) = \frac{e^0}{8\cdot t^2}$$ => $8t^2 = 0$ => für t=0 gibt es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse

Wert t: t=0

Andere Lösungen mit $t \in R$ gibt es nicht.

Begründung der Einzigkeit

Seien $\xi \in \mathbf{D}_{\mathbf{ft}}$, $\xi < -t$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gegeben.

Es gilt $f_t(x) > 0$ für alle $x \in \mathbf{D}_{\mathbf{ft}}$, denn $e^x > 0$ und $8(t+\xi)^2 > 0$ => 0 ist eine untere Schranke.

Für beliebige, fest gewählte, sehr kleine ε gibt es stets ein ξ_0, das die Gleichung $f_t(\xi_0) = \upsilon > 0$ erfüllt, denn $e^{\xi 0} = \upsilon\, 4\, (\xi_0 + t)^2 > 0$ ist, egal wie klein der rechte Term wird, stets lösbar. Für alle $\xi < \xi_0$ gilt $f_t(\xi) < \varepsilon$, denn e^{ξ} fällt in diesem Fall und $4\,(\xi_0 + t)^2$ wächst. Das heißt: es gibt keine Schranke größer als 0. Folglich ist 0 untere Grenze (vergleiche mit Grenzwertdefinition z. B. im Tafelwerk) und es gilt:

Verhalten für $x \to \infty$: $$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{8\cdot(t+x)^2} = 0$$

Ansatz für Nachweis der Monotonie

$$f'_t(x) = \frac{e^x\cdot(x+t-2)}{8(x+t)^3} = \frac{e^x}{8(x+t)^2}\cdot\left(1-\frac{2}{x+t}\right) \quad \text{und} \quad \frac{e^x}{8(x+t)^2} > 0 \quad \text{und}$$

$\left(1-\frac{2}{x+t}\right) > 0$, falls $1 > \frac{2}{x+t}$ gilt. Wegen $-t > x$ gilt: $2 > 0 > x+t$. (q.e.d.)

Folglich gilt unter der gegebenen Bedingung $f'_t(x) > 0$, d. h. die Funktion ist streng monoton wachsend.

Variante II

für hinreichend kleine* h $\in$ R₊ gilt:

$$f_t(x+h) - f_t(x)\ \Big|_{x<-t} = \frac{e^x}{8}\cdot\left(\frac{e^h}{(t+x+h)^2} - \frac{1}{(t+x)^2}\right)\Big|_{\substack{h\in\mathbb{R}_+\\ t+x<0}} > 0$$, denn $e^x > 0$ und

$$\frac{e^h}{(t+x+h)^2} > \frac{1}{(t+x)^2} \ \Rightarrow\ e^h > 1 > \frac{(t+x+h)^2}{(t+x)^2}$$ (*Ungleichung gilt für $0 < h < -2(t+x)$)

Nachweis der Monotonie 12 BE

b) Ansatz für Nachweis

aus $P_{MIN_t}\left(2-t \mid \frac{e^2}{32e^t}\right)$ und $g(2-t) = \frac{1}{32}e^{2-t}$ folgt die Behauptung

Nachweis

erste Umformung unter Verwendung der Logarithmengesetze

$g(2 \ln 32 + 2) = g(2 \ln 2^5 + 2) = g(10 \ln 2 + 2)$

zweite Umformung unter Verwendung der Logarithmengesetze

$g(10 \ln 2 + 2) = 2^{-5}\, e^{10 \ln 2 + 2} = 2^{-5}\, (e^{\ln 2})^{10} e^2 = 2^{-5}\, 2^{10}\, e^2 = 32\, e^2$

Schlussfolgerung: Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion g. 5 BE

c) Zielfunktion
$d(c) = f_{-1}(c) - f_0(c)$ und weiter mit GTR: `Y1 = e^X/(8(-1+X)²)-e^X/(8X²)`,
`solve(nDerive(Y1,X,X),X,2)` → 3,61 und
`nDerive(nDerive(Y1,X,X),X,3.61)` → 3.61
Wert c: c =3,61
`Y1(3.61)` → 0,32
minimale Differenz d: d = 0,32 3 BE

d) Koordinaten des lokalen Mi nimumpunktes
Tangente an f_{-1} in $P_{MIN}(3 \mid 2^{-5}e^3)$ mit Anstieg 0 ,da Extrempunkt, folgt $y = 2^{-5}e^3$ (Parallele zur x-Achse)
Gleichung der Geraden h: $y = e^3/32$ bzw. $y = 0{,}6277$
geeignete Einteilung der Koordinatenachsen
Skizze
Aussage zur Flächenzerlegung
Die Fläche kann in zwei Teilflächen zerlegt werden (siehe Skizze). Die Schnittstelle des Graphen f_{-1} und g liegt bei 0,443 (GTR: `Y2 = e^X/(8(-1+X)²)-e^X/32`, `solve(Y2,X,.5)`). Der Flächeninhalt ergibt sich dann aus:

$$\left|\int_0^{0.443} f_{-1}(x) - g(x)\,dx\right| + \left|\int_{0.443}^{3} g(x) - h(x)\,dx\right|$$

Aussage zu Integrationsgrenzen
GTR: `fnInt(Y2,X,0,.443)+fnInt(e^X/32-e³/32,.443,3)` → 1.14
Flächeninhalt A: A = 1,14 7 BE

e) Ansatz für Gleichung der Geraden s
$P_{MIN\,-1}(3 \mid 2^{-5}e^3)$ und $P_{MIN\,0}(2 \mid 2^{-5}e^2)$ und Zweipunktegleichung führt zu:

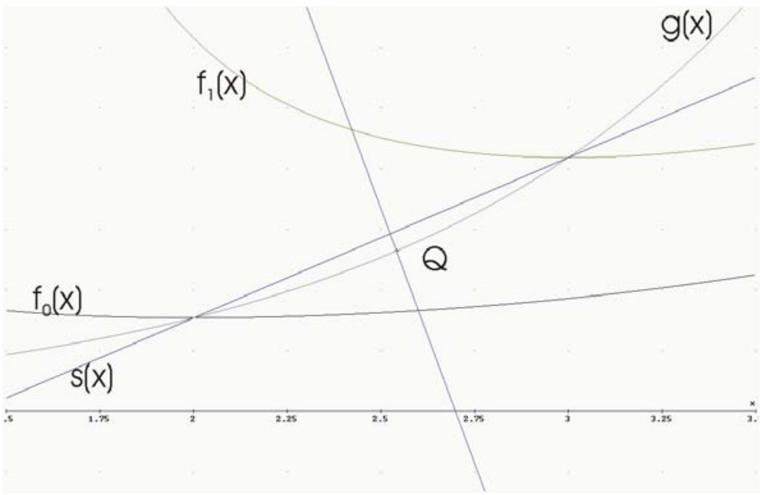
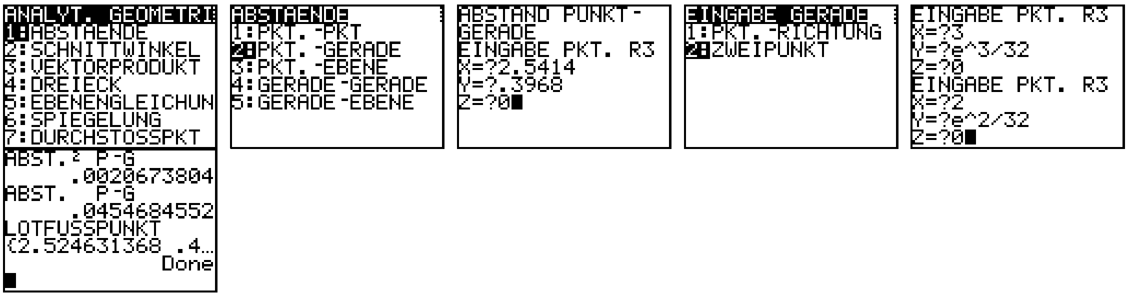


Abbildung 26

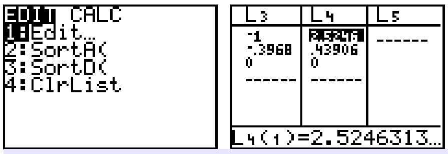
$$y = \frac{e^3 - e^2}{32} \cdot x + \frac{3e^2 - 2e^3}{32}$$

Gleichung der Geraden s: $y = 0{,}3968x - 0{,}5627$
Ansatz für Koordinaten des Punktes Q
$Q(x_Q \mid y_Q)$; $g'(x_Q) = (e^3 - e^2)/32$
GTR: `solve(nDerive( e^X/32,X,X)-.3968,X,2)` → 2.5414
GTR: `e^Ans/32` → 0,3968
x-Koordinate des Punktes Q: $x \approx 2{,}54$

y-Koordinate des Punktes Q: y ≈ 0,40
Ansatz für Senkrechte zur Geraden s
GTR prgmGEOMETRI: Menü Abstände | Abstand Punkt-Gerade – Eingabe der Gerade über Zweipunktegleichung und des Punktes Q – fertig (bei diesem Vorgehen, entfällt die Berechnung der Senkrechten).



Der Abstand beträgt 0,045. Um den Lotfußpunkt vollständig abzulesen, muss man das …+Edit-Menü bemühen:



Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden
Abstand d: d = 0,05
Hinweis: In Abhängigkeit vom verwendeten Verfahren und von der Rundung der Zwischenergebnisse kann die Lösung abweichen. <u>8 BE</u>
<u>35 BE</u>

Teil B

a) Ansatz für Abstand
Gegeben sind $C_1(4 \mid 3 \mid 0)$ und Ebene E_{AB1S} mit $B_1(8 \mid 1 \mid 0)$. Die Formulierung „Ermitteln Sie ...“ läßt die Verwendung des GTR zu: prgmGeometri.
Abstände | Punkt – Ebene | (Punkt C eingeben) | Dreipunkt | (Punkt A, B_1 und C eingeben) → Abstand = |-3.1719|
Abstand d: $d = 48/\sqrt{229}$
Ansatz für Winkel
Berechnung der Ebenennormalen: (mit GTR prgmGeometri: $E_{AB1S} = (6 \mid -12 \mid 7)$). Die Ebenennormale der Grundfläche ist z. B. $(0 \mid 0 \mid 1)$, da alle Punkte A, B, C und D in der x-y-Ebene liegen. Anschließend wird der Schnittwinkel der Ebenennormalen berechnet: (mit GTR prgmGeometri: Schnittwinkel | Zwei Richtungen | → 1.089 rad bzw. 62,447°).

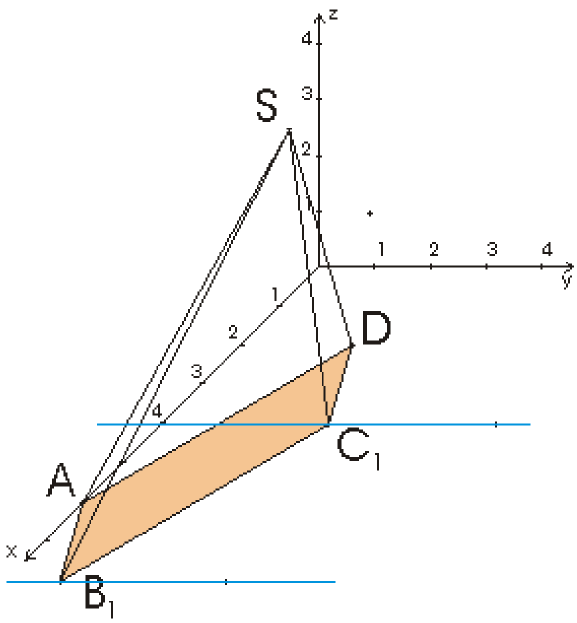


Abbildung 27

Die Formulierung „Berechnen Sie ...“ sollte die numerische Ebene des GTR zulassen, deshalb kann die Berechnung auch kürzer mit GTR prgmGeometri: Schnittwinkel | Zwei

Ebenen | jeweils Option Dreipunkt mit dem gleichen Ergebnis ermittelt werden.
Winkel: 62,4° 4BE

b) Länge der Strecke $\overline{B_tS}$ in Abhängigkeit vom Parameter t
Ansatz für Berechnung des Parameters t

$$l = \left|\vec{B_tS}\right| = \sqrt{(8-5)^2 + (t^2-3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{t^4 - 6t^2 + 54} = 23$$

und weiter mit GTR: `solve(√(X^4-6X²+54-23^2,X,4)` → 5
oder rechnerisch durch Ersetzung von $t^2 = z$ und Lösung der Gleichung $z^2 - 6z - 475 = 0 \Rightarrow z_1 = 25$ und $z_2 = -19$ (entfällt) $\Rightarrow t = \pm 5$

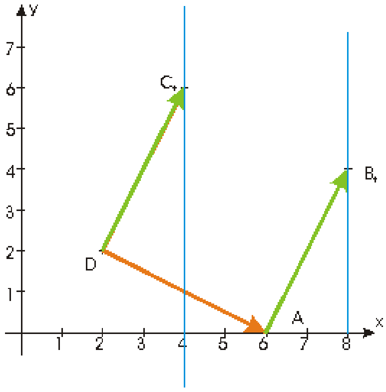


Abbildung 28

Lösung der Gleichung 4. Grades
Wert für t: t= 5 4BE

c) Länge einer Strecke
Vergleichen Sie auch mit der Lösung von Christian Moeller!
Ein anderer Lösungsweg: Die fraglichen Punkte liegen in der x-y-Ebene. Dabei liegen die Punkte C und D in Abhängigkeit von t auf den eingezeichneten Linien l_1 und l_2.
Zunächst bilden wir zum Vektor

$$\vec{DA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(im Bild orange dargestellt) den senkrechten, gleich langen Vektor

$$\vec{DA}_\perp = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(im Bild grün). Wie man leicht sieht gilt nun:

$$\vec{OB_t} = \vec{OA} + \vec{DA}_\perp = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

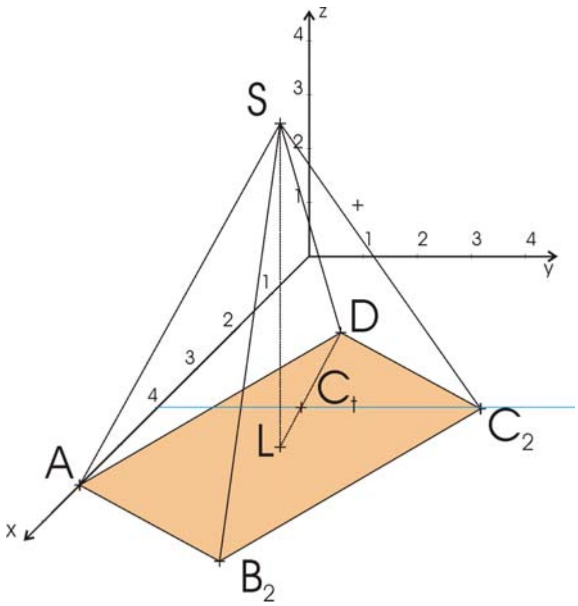


Abbildung 29

und

$$\vec{OC_t} = \vec{OD} + \vec{DA}_\perp = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt nun nur noch zu zeigen, dass die ermittelten Werte zu genau einem t gehören: t = 2.
Nachweis der Länge einer anderen Strecke
Nachweis der Orthogonalität
Wert für t: t= 2
Ansatz für Volumen
$A_G = 20$ FE; $h = s_Z = 6$ LE $\Rightarrow$
Volumen V: V = 40 6BE

d) Aussage über Verhältnis der Seitenlängen oder der Flächeninhalte
Aufgrund der gegebenen Bedingungen (Parallelität der Schnittfläche und der Grundfläche; 25%) entsteht wieder ein Quadrat (zentrische Stauchung mit Zentrum S und Faktor ½), dessen Kanten halb so lang sind wie die des Originals.

Aussage über Verhältnis der Längen der Höhen
Demzufolge wird auch die Gesamthöhe halbiert.
Gleichung der Ebene: z = 3 3 BE

e) Normalenvektor der Seitenfläche
Ansatz mithilfe des Winkels
Ein anderer Vorschlag:
Die gesuchte Seitenfläche enthält auch den Lotfußpunkt L der Spitze auf der Grundfläche.
Damit ist L = (5 | 3 | 0) und der Punkt C_t ist Schnittpunkt der Geraden g_{DL}:
$\vec{x} = \vec{OD} + s \cdot \vec{DL}$ und g_{Ct}: x = 4 (z = 0) ⇒ x = 2 + s · 3 und y = 2 + s · 1. Wegen x = 4 gilt s = 2/3 und y = 8/3. Aus $y_{C_t} = 3t$ folgt
Wert t: t= 8 / 9 3BE

f) benötigte Vektoren
$\vec{AB}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$; $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Ansatz für Nachweis
$\vec{AB}_t \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}_t| \cdot |\vec{AD}| \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$
Gleichung 4. Grades
$-8 + 2t^2 = \sqrt{(4 + t^4)} \cdot \sqrt{(20/17)}$
Lösung der Gleichung 4. Grades
Probe und Wert t: t = 3 5 BE
25 BE

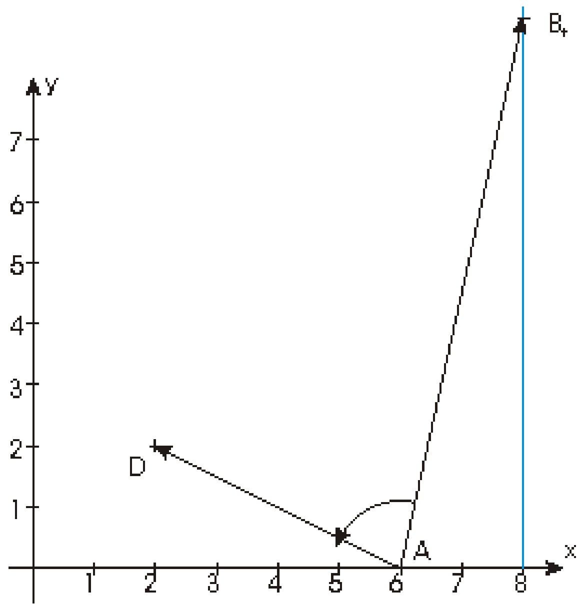


Abbildung 30

Teil C

a) Ansatz für Anzahl
2 von 6 Fragen zur KFZ-Technik: $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
10 von 24 Fragen Verkehrsregeln: $\begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$
Anzahl: 29418840 2 BE

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Berechnung des Gegenereignisses G (Schüler besteht nicht): P(G) = 0,35 · 0,2 = 0,7
Wahrscheinlichkeit: p = 0,93 2 BE

c) Ansatz für Wahrscheinlichkeit
P(A) = ,65 · ,9 = ,585
P(B) = ,35 · ,8 · ,75 = ,21
Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrschüler die praktische Prüfung im ersten Versuch besteht
P(A) + P(B) = ,795
Ansatz für Anzahl der Fahrschüler
Bernoulli-Kette mit p = ,795 und Ereignis C: mindestens ein Schüler besteht bei Praxis 1
⇒ Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignis': Wie viele Schüler müssen teilnehmen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass alle durchfallen, kleiner als 1% wird.
$\overline{p}^n \leq 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{-2}{\log ,205} \approx 2{,}9$

Ergebnis: Der Kurs muss mindestens 3 Fahrschüler umfassen.
Ansatz für Wahrscheinlichkeit

$$\frac{P(A)}{P(A)\cdot P(B)}$$

Wahrscheinlichkeit: p=0,7358 6 BE

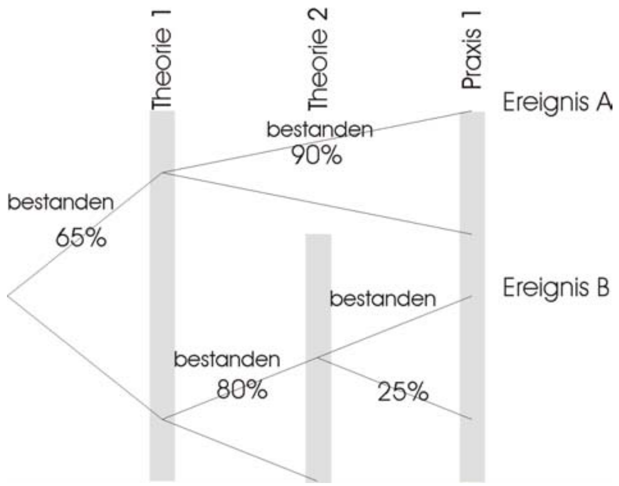


Abbildung 31

d) Erkennen der Verteilung
Binomialverteilung mit großem n: p = ,96; n = 10000; μ = 9600; σ = √384
Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Näherungsformel von Laplace:
P(9581 ⩽ X ⩽ 10000) = Φ(20,4) – 1 + Φ(0,9951) = Φ(0,9951) ≈ 0,84
Wahrscheinlichkeit: p = 0,8402 (In Abhängigkeit vom verwendeten Lösungsverfahren, von Programmen und Rechenhilfsmitteln kann die Lösung im Intervall 0,83 < p < 0,85 liegen.) 3 BE

e) Wahrscheinlichkeit: p = 0,6100 (In Abhängigkeit vom verwendeten Lösungsverfahren, von Programmen und Rechenhilfsmitteln kann die Lösung im Intervall 0,58 < p < 0,62 liegen.)
Näherungsformel wie oben:
1 - P(9590 ⩽ X ⩽ 9610) = 1- (Φ(,5358) – 1 + Φ(,5358)) = 2 · (1 - Φ(,5358)) ≈ 0,594
Begründung 2 BE
Die Tschebyschevsche Ungleichung gibt eine Abschätzung an: P(μ-a ⩽ X ⩽ μ+a) ⩾ 1 - $(\sigma/a)^2$; der Term $(\sigma/a)^2$ ist aber hier 3,84 und die Abschätzung P ⩾ -2,84 trifft trivialer Weise immer zu.

15 BE

Aufgabe D 1

a) Nullstellen: $x_N = \frac{\pi}{t}\cdot\left(\frac{3}{2} + 2k\right) \quad (k \in \mathbb{N})$

1. Ableitung:
$f'_t(x) = t^2\cdot\cos tx$
Extremstellen:

cos tx = 0 ⇔ $x_E = \dfrac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{t}$ mit k ∈ **N**;

2. Ableitung:
$f''_t(x) = -t^3\cdot\sin tx$
Aussage zur Art des Extremums für gerade k:
für k = 2n (n ∈ **N**) gilt stets sin tx_E = 1
Aussage zur Art des Extremums für ungerade k:
analog gilt für k = 2n + 1 stets sin tx_E = -1
Koordinaten der lokalen Extrempunkte:

$P_{MAX}\left(\frac{\pi}{t}\cdot\left(\frac{1}{2} + k\right);\ 2t\right)$ für (k ∈ **N** und k ist gerade)

$P_{MIN}\left(\frac{\pi}{t}\cdot\left(\frac{1}{2}+k\right);\,0\right)$ für (k ∈ **N** und k ist ungerade) 7 BE

b) Ansatz für Flächeninhalt

Integration zwischen zwei benachbarten Tiefpunkten $T_1(x_1 \mid y_1)$ mit k = 1 und $T_2(x_2 \mid y_2)$ mit k = 3:

$$\int_{\frac{3\pi}{2t}}^{\frac{7\pi}{2t}} f_t(x)\,dx = F_t\left(\frac{7\pi}{2t}\right) - F_t\left(\frac{3\pi}{2t}\right)$$

Stammfunktion

$$\int f_t(x)\,dx = -\cos tx + tx$$

Flächeninhalt A: A = 2 π 3 BE

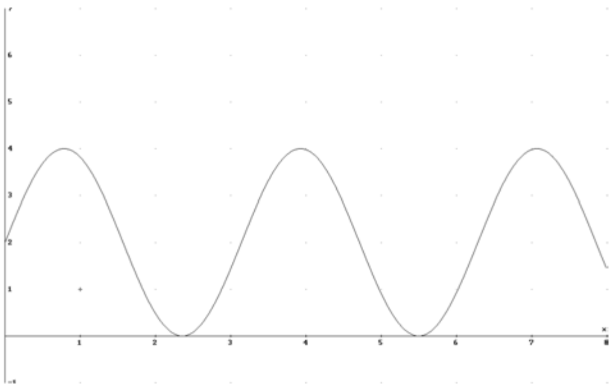


Abbildung 32: prinzipielles Aussehen der Funktion

c) Wendestelle für k=1:

$$W\left(\frac{\pi}{t}\middle| t\right)$$

Ansatz für Wert t:

Zielfunktion $d(t) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{t}\right)^2 + t^2}$, wobei das Finden der Extremstelle für

$d^2(t) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 + t^2$ ausreicht; weiter mit GTR: `solve(nDe-rive(π²/X²+X²,X,X),X,1)` → 1,772

Wert t: t= $\sqrt{\pi}$ 3 BE

d) Ansatz für Wert t

Nullpunkte sind gleichzeitig lokale Minima. Die kleinste Stelle ist $x_{E;\,k=1} = 3/2 \cdot \pi/t$, die zweite $x_{E;\,k=3}$ usw. Die achte Stelle ist folglich $x_{E;\,k=15} = 31/2 \cdot \pi/t$. Laut Aufgabenstellung soll die Ungleichung $x_{E;\,k=15} = 31/2 \cdot \pi/t \leqslant 2\pi$ gelten.

Wert t: t ⩾ 7,75 2 BE

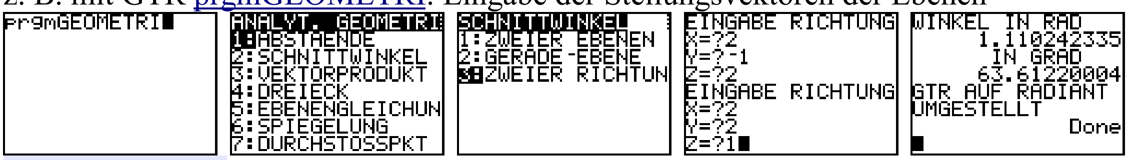
15 BE

Aufgabe D 2

a) Gleichung der Schnittgeraden: z.B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\6\end{pmatrix}$ (s ∈ **R**)

Größe des Schnittwinkels α = 63,6°

z. B. mit GTR prgmGEOMETRI: Eingabe der Stellungsvektoren der Ebenen



Ansatz für Wert t

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

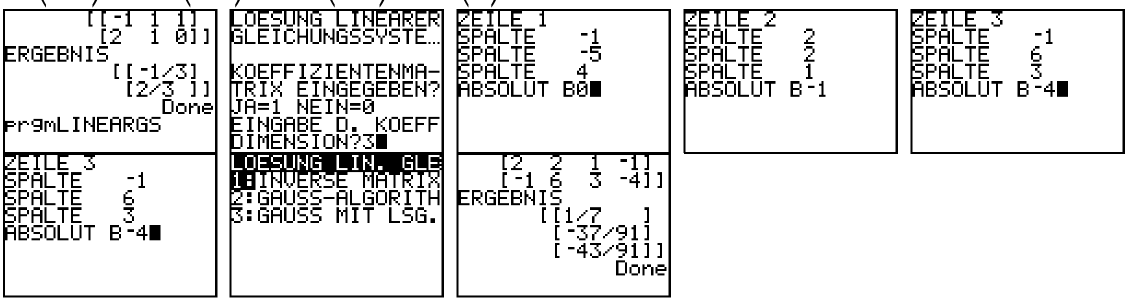
z. B. mit GTR prgmLINEARGS: r = -1/3, s = 2/3 und
Wert t: t = 13/2 4 BE

b) Ansatz für Abstand der Punkte
Alle Punkte mit gleichem Abstand von zwei sich schneidenden Geraden, liegen auf den beiden Winkelhalbierenden. Ähnlich verhält es sich bei den beiden Ebenen. Der Unterschied ist, dass die Punkte gleicher Entfernung auf zwei Ebenen liegen, die die Raumwinkel halbieren. Die „winkelhalbierenden" Ebenen sind zueinander senkrecht. Außerdem enthalten all diese Ebenen die in a) berechnete Schnittgerade. Damit reduziert sich das Problem. Wir können das Problem sozusagen „in der Ebene" lösen und mit Stellungsvektoren anstelle von Punkten auf den Ebenen rechnen.
Um eine „winkelhalbierende" Ebene W zu berechnen, normieren wir die Stellungsvektoren $\vec{n}_i$ der Ebenen E_1 und E_2, erhalten $\vec{v}_i = \frac{\vec{n}_i}{|\vec{n}_i|}$ und berechnen den fehlenden Vektor $\vec{r}_1$ in W_1 durch $\vec{r}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2$ in W_2 durch $\vec{r}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$. Da uns nur die Richtungen interessieren, können wir den Faktor 1/3 vernachlässigen:

$W_{1:}\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ und $W_{2:}\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$. Die gesuchten Punkte ergeben sich aus dem Durchschnitt der Geraden g mit den Ebenen W_i.
Die Lösung der linearen Gleichungssysteme kann mittels GTR prgmLINEARGS erfolgen.

Aus $\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ folgt

$\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ und durch



ergibt sich z. B. $r_1 = 1/7$ und damit S_1; analog folgt $r_2 = 13/5$ und S_2.
Umformungen
Werte der Parameter

Koordinaten der Punkte: S_1 (8/7; -2/7; -27/7); S_2 (18/5; -26/5; -7/5) 4 BE

c) Skizze
durch Bestimmung der Durchstoßpunkte $D_{x,y,z}$ der Koordinatenachsen mit der Ebene
Aussage über Schnittpunkte der Ebene E_2 mit der x- und der y-Achse
Aussage über Spurgerade der Ebene F
Die Ebene F enthält offensichtlich die Winkelhalbierende der x- und y-Achse, außerdem enthält sie die z-Achse. Aufgrund der Symmetrie der Punkte D_i ist die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide.
Aussage zur Lage der Ebene F bezüglich der z-Achse
Schlussfolgerung 5 BE

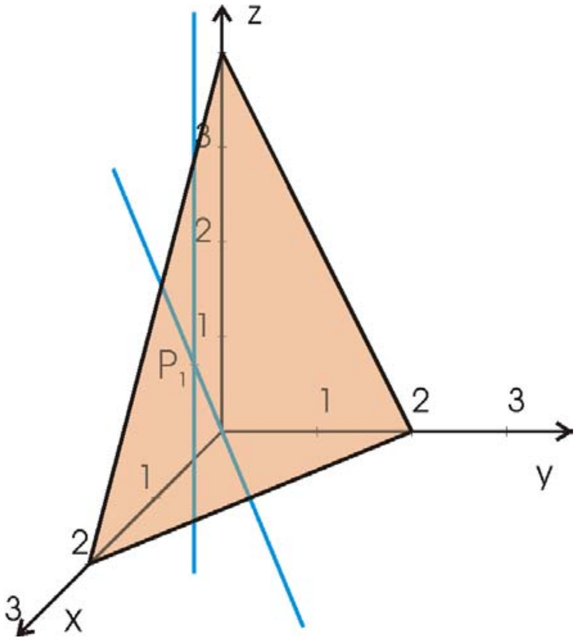


Abbildung 33

d) eine richtige Aussage
z. B.: Es wird die Gerade mit dem Punkt P und der Richtung des Normalenvektors

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Ebene E_2 gebildet:

$\vec{x} = \vec{OP} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bei der Berechnung des Lotfußpunktes L von P auf E_2 ergibt sich ein konkreter Wert für den Parameter u. Ist dieser größer Null, so ist P innerhalb der Pyramide.

Beschreibung <u>2 BE</u>

<u>15 BE</u>